١٢

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الفرع العلمي والصناعي

الرزمة التعليمية

٢٠٢٤

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

moehe.gov.ps | mohe.pna.ps | mohe.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
هاتف 2983280-2-970+ | فاكس 2983250-2-970+

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 - رام الله - فلسطين
pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

المحتـــويات

الوحدة ١

الوحدة ٢

الوحدة ٣

البنود التي باللون الأحمر تستثنى من الفرع الصناعي

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف حساب التفاضل في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

* إيجاد متوسط التغير، وتفسيره هندسياً وفيزيائياً.
* حساب المشتقة الأولى عند نقطة باستخدام قواعد الاشتقاق.
* التعرف إلى المشتقات العليا للاقتران، وإجراء بعض التطبيقات عليها.
* إيجاد مشتقة الاقترانات المثلثية.
* التعرف إلى مشتقة الاقتران الأسّي الطبيعي، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي.
* إيجاد بعض النهايات باستخدام قاعدة لوبيتال.
* التعرف إلى قاعدة السلسلة، واستخدامها في إيجاد مشتقة تركيب اقترانين.
* حساب المشتقة الأولى لعلاقة ضمنية.
* التعرف إلى المعنى الهندسي والفيزيائي للمشتقة، وحل مسائل عليهما.
* إيجاد فترات التزايد والتناقص والنقاط الحرجة لاقتران معلوم.
* إيجاد القيم العظمى والصغرى لمنحنى اقتران معلوم.
* إيجاد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف لمنحنى اقتران معلوم.
* تحديد خصائص اقتران، إذا علم منحنى إحدى مشتقاته.
* توظيف القيم القصوى المطلقة في حل مسائل حياتية.
* التعرف إلى المصفوفة، وبعض المصفوفات الخاصة.
* إيجاد رتبة المصفوفة، وعدد مدخلاتها.
* التعرف إلى شروط تساوي مصفوفتين، وحل معادلات ناتجة من تساويهما.
* إجراء العمليات على المصفوفات.
* التعرف إلى مفهوم المحددات.
* حساب محدد المصفوفات المربعة من الرتبة الأولى والثانية والثالثة، وتمييز المنفردة منها.
* إيجاد النظير الضربي للمصفوفات المربعة غير المنفردة من الرتبة الثانية.
* توظيف المصفوفات في حل أنظمة معادلات خطّيّة.
* إيجاد الاقتران الأصلي لاقتران معطى (إن أمكن) وتحديد العلاقة بين التفاضل والتكامل.
* التعرف إلى قواعد التكامل غير المحدود، واستخدامها في إيجاد تكاملات معطاة.
* إيجاد التكامل غير المحدود لاقترانات كثيرة حدود، ومثلثية، وأسّية، ولوغاريتمية، ونسبية.
* استخدام طرق التكامل، مثل: التكامل بالتعويض، وبالأجزاء في إيجاد تكاملات معطاة.
* توظيف التكامل غير المحدود في تطبيقات هندسية وفيزيائية.
* التعرف إلى التجزئة، وحساب مجموع ريمان.
* إيجاد التكامل لاقتران خطّي باستخدام التعريف.
* التعرف إلى النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل.
* التعرف إلى خصائص التكامل المحدود.
* حساب التكامل المحدود.
* إيجاد مساحة منطقة مستوية باستخدام التكامل المحدود.

الوحدة

١

١ - ١ متوسط التغير (Rate of Change)

نشاط ١: عائلة فلسطينية مكونة من: أم محمد وولديها التوأمين محمد وخالد كانت كتلة محمد قبل عشر سنوات ٣٢ كغم، وأصبحت اليوم٦٢ كغم، أما كتلة خالد فكانت ٢٩ كغم، ولكنها اليوم ٥٢ كغم. ارتاحت أم محمد للتغير في كتلة محمد، بينما ذهبت بابنها خالد إلى الطبيب ... برأيك لماذا؟

تعريف:

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً وتغيرت س من س$_{١}$ إلى س$_{٢}$ ، س$_{١}$ $\neq$ س$_{٢}$ فإن:

- التغير في س يساوي س$_{٢}$ − س$_{١}$ ونرمز له بالرمز Δس ويقرأ دلتا س .
- التغير في الاقتران ق(س) يساوي ق(س$_{٢}$) − ق(س$_{١}$) ويرمز له بالرمز Δص.
- متوسط التغير في الاقتران ص = ق(س) يساوي $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

$$= \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$$

ويمكن كتابته على الصورة $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_{١} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{هـ}}$

حيث هـ = Δس $\neq$ ٠ ، ونسميه اقتران متوسط التغير عند س$_{١}$.

مثال ١ : إذا كان ص = ق(س) = س^{٣} − ٥س + ٣ ، جد:

① Δس عندما تتغير س من $^{-}$١ إلى ٢.

② التغير في ق(س) عندما تتغير س من $^{-}$١ إلى ٢.

③ متوسط التغير في ق(س) عندما تتغير س من $^{-}$١ إلى ٢.

الحل :

① بما أن س$_{١}$ = $^{-}$١ ، س$_{٢}$ = ٢ ، فإن Δس = س$_{٢}$ − س$_{١}$ = ٣

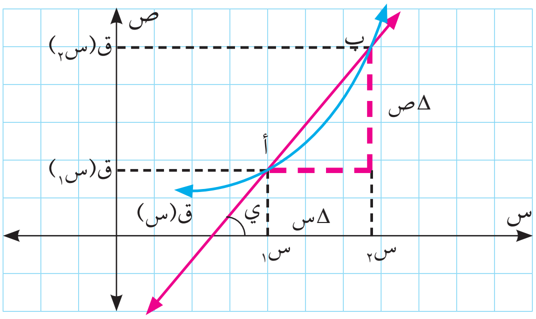
② Δص = ق(س$_{٢}$) − ق(س$_{١}$) = ق(٢) − ق($^{-}$١) = ١ − ٧ = $^{-}$٦

③ متوسط التغير = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{^{-}٦}{٣} = {}^{-}٢$

المعنى الهندسي لمتوسط التغير:

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) والمستقيم المار بالنقطتين أ ، ب والذي يسمى قاطعاً للمنحنى، ويكون

ميله = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$



تعريف:

متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من $\text{س}_١$ إلى $\text{س}_٢$ يساوي ميل القاطع المار بالنقطتين، ($\text{س}_١$ ، ق($\text{س}_١$)) ، ($\text{س}_٢$ ، ق($\text{س}_٢$)) ونسمي الزاوية (ي) التي يصنعها القاطع للمنحنى مع الاتجاه الموجب لمحور السينات بزاوية ميل المستقيم، ويكون (ظاي = ميل القاطع).

مثال ٢ : إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) = س + جا٢س في النقطتين (٠ ، ق(٠)) ، ($\frac{\pi}{٢}$ ، ق($\frac{\pi}{٢}$))

① احسب ميل المستقيم ل.

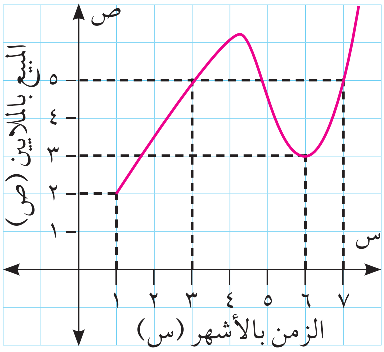
② جد قياس زاوية ميل المستقيم ل.

الحل : ① ميل المستقيم ل = متوسط تغير ق(س) في الفترة $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$

$$= \frac{\text{ق}(\frac{\pi}{٢}) - \text{ق}(٠)}{\frac{\pi}{٢} - ٠} = \frac{\frac{\pi}{٢} + \text{جا}(٢ \times \frac{\pi}{٢}) - (٠ + \text{جا}٠)}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{\frac{\pi}{٢}}{\frac{\pi}{٢}} = ١$$

② ميل المستقيم ل = ظا ي = ١ ومنها قياس زاوية ميل المستقيم ل هو $\frac{\pi}{٤}$ (لماذا؟)

نشاط ٢: يمثل منحنى الاقتران ص = ق(س) في الشكل المجاور مبيع شركة سيارات حيث ص: المبيع بالملايين خلال س شهراً، أراد عمر من الرسم إيجاد متوسط التغير في المبيع عندما تتغير س من ١ إلى ٣، فكتب



$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)}{٣ - ١} = \frac{٥ - ٢}{٣ - ١} = \frac{٣}{٢}$$

والآن أكمل: متوسط التغير في ص عندما تتغير س من ٣ إلى ٧ يساوي ....

متوسط التغير في ص عندما تتغير س من ٣ إلى ٦ يساوي........

تمارين ١ - ١

١ إذا كان ق(س) = $\frac{٣}{\text{س}}$ + س^{٢}، جد:

أ التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٣ إلى ٥.

ب متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٤ إلى ١.

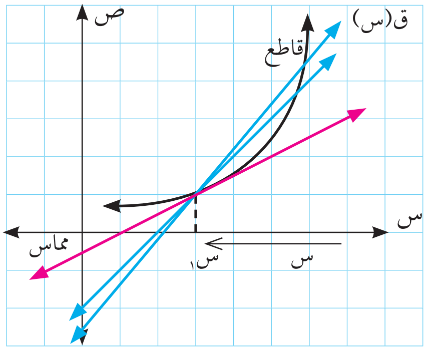
٢ إذا كان ق(س) = جتاس − ٣ جاس جد متوسط التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [$\frac{\pi}{٢}$ ، π].

٣ إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [١ ، ٣]، يساوي ٤، وكان ك(س) = س^{٢} + ٣ق(س)، جد متوسط التغير للاقتران ك(س) في نفس الفترة.

٤ إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين (١ ، أ)، (٣ ، ب) وصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. احسب متوسط التغير في الاقتران هـ(س) = ٣ق(س) + س^{٢} − ١ في الفترة [١ ، ٣].

١ - ٢ قواعد الاشتقاق (Rules of Differentiation)

تعلمت في الدرس السابق مفهوم متوسط التغير للاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من $\text{س}_١$ إلى $\text{س}_١ + \Delta\text{س}$ وكان $\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_١ + \Delta\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\Delta\text{س}}$ ، $\Delta\text{س} \neq ٠$



وإذا أخذنا $\underset{\Delta\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$ وكانت هذه النهاية موجودة فإننا نسميها معدل التغير للاقتران ق(س) عند $\text{س}_١$ أو المشتقة الأولى للاقتران ق(س) عند س = $\text{س}_١$ ونقول إن ق(س) قابل للاشتقاق عند $\text{س}_١$ (أي كلما اقتربت س من $\text{س}_١$ فإن متوسط تغير الاقتران (ميل القاطع) يؤول إلى معدل تغير الاقتران ق(س) (ميل المماس) عند س = $\text{س}_١$، انظر الشكل المجاور.

تعريف (١)*:

إذا كانت ص = ق(س) اقتراناً معرفاً عند $\text{س}_١$ في مجاله، وكانت $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}_١+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{هـ}}$ موجودة فإن قيمة هذه النهاية تسمى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) عند $\text{س}_١$،

ونرمز لها بأحد الرموز الآتية: $\text{قَ}(\text{س}_١)$ أو $\text{صَ}\Big|_{\text{س} = \text{س}_١}$ أو $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\Big|_{\text{س} = \text{س}_١}$

ويمكن كتابتها على النحو $\text{قَ}(\text{س}_١) = \underset{\text{س} \to \text{س}_١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س} - \text{س}_١}$

تعريف (٢):

ليكن الاقتران ق(س) معرفاً عندما س = $\text{س}_١$ فإن:

$\text{قَ}(\text{س}_١)^{+} = \underset{\text{هـ} \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}_١ + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{هـ}}$ (مشتقة ق(س) من يمين العدد $\text{س}_١$)

$\text{قَ}(\text{س}_١)^{-} = \underset{\text{هـ} \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}_١ + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{هـ}}$ (مشتقة ق(س) من يسار العدد $\text{س}_١$)

وعندما $\text{قَ}(\text{س}_١)^{+} = \text{قَ}(\text{س}_١)^{-} = \text{ل}$، فإن ق(س) قابل للاشتقاق عند $\text{س}_١$ وتكون $\text{قَ}(\text{س}_١) = \text{ل}$

تعريف (٣):

- إذا كان الاقتران ق(س) معرفاً على [أ ، ب] فإن ق(س) غير قابل للاشتقاق عند أطراف الفترة [أ ، ب].
- يكون ق(س) قابلاً للاشتقاق على] أ ، ب[إذا كان قابلاً للاشتقاق عند كل نقطة فيها.

فكّر وناقش:

مجال قَ(س) ⊆ مجال ق(س).

قاعدة (١):

إذا كان ق(س) = جـ حيث جـ ∈ ح فإن قَ(س) = ٠ لجميع قيم س ∈ ح.

مثال ١ : جد قَ(س) لكل مما يأتي: ① ق(س) = ٥ ② ق(س) = جتا π

الحل :

١ قَ(س) = ٠

٢ قَ(س) = ٠

قاعدة (٢):

إذا كان ق(س) = س فإن قَ(س) = ١

قاعدة (٣):

إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق وكان جـ ∈ ح فإن ك(س) = جـ ق(س) قابل للاشتقاق وتكون كَ(س) = جـ قَ(س).

مثال ٢ : إذا كان ق(س) = ٥س ، جد قَ(س)

الحل : قَ(س) = ٥ × ١ = ٥

قاعدة (٤):

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، فإن ك(س) = ق(س) ± هـ(س) قابل للاشتقاق، وتكون كَ(س) = قَ(س) ± هـَ(س).

* لا يطلب من الطلبة إيجاد المشتقة بالتعريف.

ملاحظة:

تبقى القاعدة (٤) صحيحة لأكثر من اقترانين.

مثال ٣ : إذا كان قَ(١) = ٥ ، كَ(١) = ‎-‎٣ ، وكان ل(س) = ٢س + ق(س) – ٣ك(س) ، جد لَ(١).

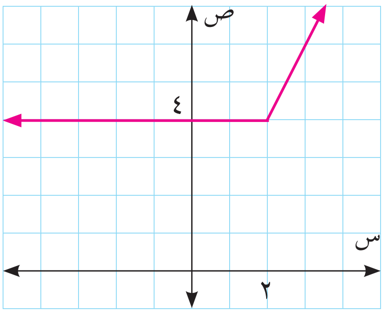
الحل : لَ(س) = ٢ + قَ(س) – ٣ كَ(س)

لَ(١) = ٢ + قَ(١) – ٣ كَ(١)

وبالتعويض ينتج أن: لَ(١) = ١٦

• • •

مثال ٤ : إذا كان ق(س) = { ٢س ، س ≥ ٢ ؛ ٤ ، س < ٢ ، جد قَ(٢)



الحل : ق(س) متصل على مجاله (تحقق من ذلك)، ومنها يكون

قَ(س) = { ٢ ، س > ٢ ؛ ٠ ، س < ٢

أما عند س = ٢ فنبحث بالمشتقة عن يمينها وعن يسارها

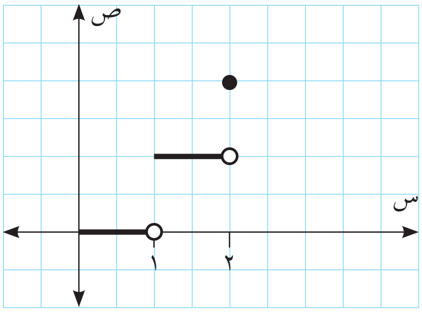
فتكون قَ(٢)$^+$ = ٢ ، قَ(٢)$^-$ = ٠ ، ومنها قَ(٢) غير موجودة. (لماذا؟)

• • •

مثال ٥ : إذا كان ق(س) = [س] ، س ∈ [٠ ، ٢] . جد قَ(س)

الحل : نعيد كتابة ق(س) دون رمز أكبر عدد صحيح.

ق(س) = { ٠ ، ٠ ≤ س < ١ ؛ ١ ، ١ ≤ س < ٢ ؛ ٢ ، س = ٢



لاحظ أن ق(س) منفصلاً عند س = ١

قَ(س) = { ٠ ، ٠ < س < ١ ؛ ٠ ، ١ < س < ٢

قَ(٠) غير موجودة ، قَ(٢) غير موجودة ..... (لماذا؟)

و قَ(١) غير موجودة ..... (لماذا؟)

• • •

أتعلم:

عند إيجاد المشتقة باستخدام قواعد الاشتقاق، لا بد من بحث الاتصال أولاً.

قاعدة (٥):

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق فإن ك(س) = ق(س) × هـ(س) قابل للاشتقاق وتكون كَ(س) = ق(س) × هـَ(س) + هـ(س) × قَ(س)

مثال ٦ : إذا كان ق(س) = (٥س – ١)(٢ – س) جد قَ(س)، ثم قَ(−١).

الحل : قَ(س) = (٥س – ١) × (−١) + (٥) (٢ – س)

ومنها قَ(س) = −٥س + ١ + ١٠ – ٥س = −١٠س + ١١

وتكون قَ(−١) = −١٠ × −١ + ١١ = ٢١

مثال ٧ : إذا كان ق(س) = س ك(س) جد قَ(٢) علماً بأن ق(٢) = −٦ ، كَ(٢) = ٤

الحل : قَ(س) = س × كَ(س) + ١ × ك(س)

قَ(٢) = ٢كَ(٢) + ك(٢) = ٨ + ك(٢)

لكن ق(٢) = ٢ × ك(٢) ، ومنها ك(٢) = −٣

قَ(٢) = ٨ – ٣ = ٥

نظرية:

إذا كان ق(س) = س^{ن} ، فإن قَ(س) = ن س$^{ن-١}$، ن ≠ ١ ، ن ∈ ص$^{+}$

مثال ٨ : إذا كان ق(س) = س^{٣} – ٢س + ٥، جد قَ(س)، ثم قَ(−٢).

الحل : قَ(س) = ٣س^{٢} – ٢ ومنها قَ(−٢) = ٣(−٢)^{٢} – ٢ = ١٠

أتعلم:

إذا كان ق(س) كثير حدود، فإن ق(س) قابل للاشتقاق.

نظرية:

يكون ق قابلاً للاشتقاق عند س = س$_{١}$

إذا وفقط إذا كان ق(س) متصلاً عند س$_{١}$ و قَ(س$_{١}$)$^{+}$ = قَ(س$_{١}$)$^{-}$

مثال ٩ : إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{أس}^{٢} + \text{ب} & ،\ ١ \leq \text{س} \\ \text{س}^{٣} + \text{س} & ،\ ١ > \text{س} \end{cases} ،$$

أوجد قيمة أ ، ب علماً بأن ق(س) قابل للاشتقاق على ح

الحل : نعلم أن ق(س) متصل عند س = ١ ..... (لماذا؟)

ومنها $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(١) أي أن أ + ب = ٢

$$\text{قَ(س)} = \begin{cases} ٢\text{أ س} & ،\ ١ \leq \text{س} \\ ٣\text{س}^{٢} + ١ & ،\ ١ > \text{س} \end{cases} ،$$

وكذلك قَ(١)$^{+}$ = قَ(١)$^{-}$ ومنها ٢أ = ٤

أي أن أ = ٢ ، ب = ٠

قاعدة (٦):

إذا كان ك(س) ، م(س) اقترانين قابلين للاشتقاق فإن ق(س) = $\dfrac{\text{ك(س)}}{\text{م(س)}}$ ، م(س) ≠ ٠

قابل للاشتقاق وتكون قَ(س) = $\dfrac{\text{م(س)} \times \text{كَ(س)} - \text{ك(س)} \times \text{مَ(س)}}{(\text{م(س)})^{٢}}$

نتيجة:

إذا كان ق(س) = $\text{س}^{\text{ن}}$ ، فإن قَ(س) = ن $\text{س}^{\text{ن}-١}$ ، ن ∈ ص ، س ≠ ٠

مثال ١٠: إذا كان ق(س) = $\frac{١}{\text{س}^{٣}} + \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} - ١}$ ، س ≠ ٠ ، ١ ، جد قَ(−١).

الحل :

$$\text{ق(س)} = \text{س}^{-٣} + \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} - ١}$$

$$\text{قَ(س)} = -٣ \times \text{س}^{-٤} + \frac{(\text{س} - ١) \times ٢\text{س} - \text{س}^{٢} \times ١}{(\text{س} - ١)^{٢}}$$

$$\text{قَ(س)} = \frac{-٣}{\text{س}^{٤}} + \frac{(\text{س} - ١) \times ٢\text{س} - \text{س}^{٢}}{(\text{س} - ١)^{٢}}$$ ومنها قَ(−١) = $\frac{-٩}{٤}$ (تحقّق من ذلك)

المشتقات العليا (Higher Derivatives)

إذا كان ص = ق(س) = $\text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٢} - ٢$، جد قَ(س).

هل يمكنك تكرار عملية الاشتقاق بالنسبة لـ س؟ ولماذا؟

نسمي المشتقات التي تلي المشتقة الأولى بالمشتقات العليا.

وإذا كانت ص = ق(س) حيث ق قابل للاشتقاق، فإن المشتقة الأولى هي صَ = $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قَ(س) تمثل اقتراناً جديداً. وإذا كانت المشتقة الأولى قابلةً للاشتقاق، فإن مشتقتها $\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)$ تسمى المشتقة الثانية، ويرمز لها بالرمز صً أو قً(س) أو $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ وتقرأ (دال اثنين ص دال س تربيع) وهكذا بالنسبة للمشتقات الثالثة والرابعة... ونعبر عن المشتقة من الرتبة ن بإحدى الصور الآتية:

$\text{ص}^{(\text{ن})}$ أو $\frac{\text{د}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{د س}^{\text{ن}}}$ أو $\text{ق}^{(\text{ن})}\text{(س)}$، حيث ن ∈ ص^{+} ، ن > ٢

مثال ١٢: إذا كان ق(س) = $\text{س}^{٥} + ٤\text{س}^{٣} - ١$، جد $\text{ق}^{(٥)}\text{(س)}$. ثم جد $\text{ق}^{(٤)}(٢)$.

الحل :

قَ(س) = $٥\text{س}^{٤} + ١٢\text{س}^{٢}$ ، قً(س) = $٢٠\text{س}^{٣} + ٢٤\text{س}$

$\text{ق}^{(٣)}\text{(س)} = ٦٠\text{س}^{٢} + ٢٤$ ، $\text{ق}^{(٤)}\text{(س)} = ١٢٠\text{س}$ ، $\text{ق}^{(٥)}\text{(س)} = ١٢٠$

$\text{ق}^{(٤)}(٢) = ١٢٠ \times ٢ = ٢٤٠$

تمارين ١ - ٢

① جد $\acute{ق}(س)$ في كل مما يأتي عند قيم س إزاء كلّ منها:

أ $ق(س) = س^{٥} - س^{٢} + جـ$ ، حيث جـ ثابت ، عندما $س = {}^{-}١$

ب $ق(س) = (س^{٣} - ١)(١٢ + س)$ ، عندما $س = ٣$

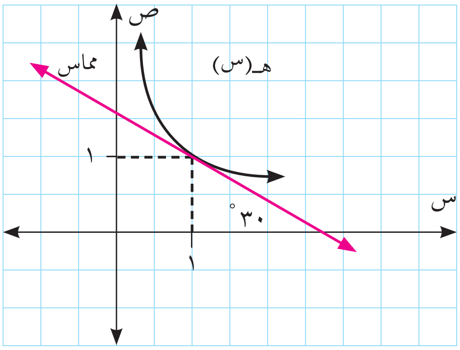
جـ $ق(س) = \frac{س^{٢}}{٥ - س^{٢}}$ ، $س \neq \pm \sqrt{٥}$ ، عندما $س = {}^{-}٢$

② بالاعتماد على المعطيات في الجدول المجاور، جد ما يأتي:

أ $\acute{(ق + هـ^{٢})}(١)$

ب $\acute{\left(س^{٢}\, ق - \frac{٣}{هـ}\right)}(١)$

ق(١)	$\acute{ق}(١)$	هـ(١)	$\acute{هـ}(١)$
٢	٣	⁻١	⁻٣



③ إذا كان $ق(س) = \frac{س}{س^{٢} + ١}$ وكان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران هـ(س)، فجد $\acute{\left(\frac{ق}{هـ}\right)}(١)$

⑤ إذا كان $ق(س) = (١ - س)(١ + س)(١ + س^{٢})(١ + س^{٤})(١ + س^{٨})$، جد $\acute{ق}(١)$.

⑥ إذا كان $ق(س) = س^{٤} + أ\, س^{٣} - ٣$ ، جد قيمة أ ، حيث $ق^{(٣)}(٢) = ١٨$

١ - ٣ مشتقات الاقترانات المثلثية (The Derivative of Trigonometric Functions)

لقد تعرفت في الدروس السابقة اشتقاق الاقترانات كثيرة الحدود، والاقترانات النسبية، وستتعرف في هذا الدرس على قواعد خاصة لإيجاد مشتقة الاقترانات المثلثية.

قاعدة (١):

إذا كان ق(س) = جاس، س بالتقدير الدائري فإن قَ(س) = جتاس

مثال ١ : إذا كان ق(س) = س جاس ، جد قَ$\left(\frac{\pi}{٢}\right)$

الحل : ق(س) = س جاس

قَ(س) = جاس + س جتاس

قَ$\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ = ١

قاعدة (٢):

إذا كان ق(س) = جتاس ، س بالتقدير الدائري ، فإن قَ(س) = $^{-}$جاس

مثال ٢ : إذا كان ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{جتاس}}$ ، جد قَ(س)

الحل : قَ(س) = $\frac{\text{جتاس} \times ٢\text{س} - \text{س}^{٢} \times {}^{-}\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

= $\frac{٢\text{س جتاس} + \text{س}^{٢}\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

قاعدة (٣):

- إذا كان ق(س) = ظاس ، فإن قَ(س) = قا^{٢}س.
- إذا كان ق(س) = ظتاس ، فإن قَ(س) = $^{-}$قتا^{٢}س.
- إذا كان ق(س) = قاس ، فإن قَ(س) = قاس ظاس .
- إذا كان ق(س) = قتاس ، فإن قَ(س) = $^{-}$قتاس ظتاس.

فكّر وناقش:

تحقّق من صحة القواعد السابقة بالتعويض بدلالة جاس، جتاس، ثم باستخدام قواعد الاشتقاق.

مثال ٣ : إذا كان ق(س) = قاس + ظاس ، جد قَ(س) ، قَ$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$.

الحل : قَ(س) = قاس ظاس + قا^{٢}س = قاس(ظاس + قاس)

قَ$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = قا$\frac{\pi}{٤}$ $\left(\text{ظا}\frac{\pi}{٤} + \text{قا}\frac{\pi}{٤}\right)$ = ٢ + $\sqrt{٢}$ (لماذا؟)

مثال ٤ : إذا كانت ص = قتاس ظتاس ، أثبت أن: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قتاس − ٢قتا^{٣}س

الحل : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $^{-}$قتاس ظتاس ظتاس + قتاس × $^{-}$قتا^{٢}س = $^{-}$قتاس ظتا^{٢}س − قتا^{٣}س

= $^{-}$قتاس ($^{-}$١ + قتا^{٢}س) − قتا^{٣}س

= قتاس − قتا^{٣}س − قتا^{٣}س = قتاس − ٢قتا^{٣}س

تمارين ١ - ٣

① جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ لكلٍ مما يأتي:

- أ ص = ٢جتاس − ٢ظاس
- ب ص = $\frac{١ - \text{قاس}}{١ + \text{قاس}}$
- جـ ص = س^{٢}قاس

② إذا كان ق(س) = $\frac{١}{٢}$س^{٢} − جتاس ، س ∈ [$^{-}$٢π ، ٢π] ،

جد مجموعة قيم س التي تجعل قً(س) = ٠

١ – ٤ قاعدة لوبيتال، ومشتقة الاقتران الأسّي واللوغاريتمي (L'Hôpital's Rule)

أولاً: قاعدة لوبيتال

تعلمت في الصف الحادي عشر كيفية إيجاد النهايات التي تكون على الصورة غير المعينة ($\frac{٠}{٠}$) ولاحظت أن كثيراً منها يحتاج إلى خطواتٍ عديدةٍ وأحياناً معقدةٍ، وهنا سوف نتعلم طريقة جديدة لحساب قيمة بعض هذه النهايات.

قاعدة لوبيتال:

إذا كان ق(س)، هـ(س) قابلين للاشتقاق عند النقطة س = أ ، ل ∈ ح ، وكانت

$$\frac{ق(أ)}{هـ(أ)} = \frac{٠}{٠} \quad ، \quad \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \frac{قَ(س)}{هـَ(س)} = ل \quad \text{فإن} \quad \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = ل$$

ملاحظة:

سوف لا نتعرض لحالات لوبيتال الأخرى.

مثال ١ : جد $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{جاس}{س}$ باستخدام قاعدة لوبيتال.

الحل : من خلال التعويض المباشر تكون $\frac{جا٠}{٠} = \frac{٠}{٠}$ ، ومنها يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال

فتكون $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{جاس}{س} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{جتاس}{١} = جتا ٠ = ١$

مثال ٢ : جد $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ باستخدام قاعدة لوبيتال.

الحل : من خلال التعويض المباشر تكون $\frac{٢^٢ - ٤}{٢ - ٢} = \frac{٠}{٠}$

ومنها $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} = \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{٢س}{١} = ٤$

ملاحظة:

عند استخدام قاعدة لوبيتال، إذا كانت $\frac{\text{ق}'(\text{أ})}{\text{هـ}'(\text{أ})} = \frac{٠}{٠}$

فإننا نستمر بتطبيق القاعدة حتى نحصل على عدد حقيقي.

مثال ٣ : جد $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س}^{٢}}$ باستخدام قاعدة لوبيتال.

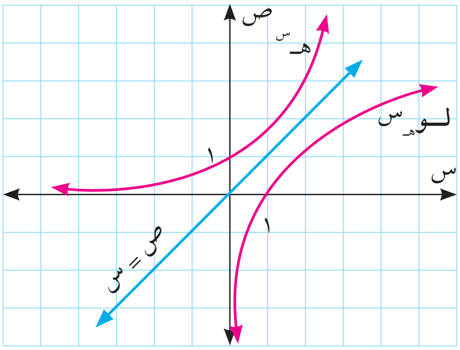
الحل : من خلال التعويض المباشر تكون $\frac{١ - \text{جتا}٠}{٠^{٢}} = \frac{٠}{٠}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س}^{٢}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جاس}}{٢\text{س}}$ لكن $\frac{\text{جا}٠}{٠} = \frac{٠}{٠}$

نطبق قاعدة لوبيتال مرةً أخرى

فتكون $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جاس}}{٢\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جتاس}}{٢} = \frac{١}{٢}$

ثانياً: مشتقة الاقتران الأسّي واللوغاريتمي



تعلمت سابقاً الاقتران الأسّي الذي يكتب على الصورة $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}^{\text{س}}$ ، $\text{أ} \neq ١$ ، $\text{أ} > ٠$ والاقتران اللوغاريتمي على الصورة $\text{ل}(\text{س}) = \text{لــو}_{\text{أ}}\text{س}$ ، $\text{س} > ٠$ ، $\text{أ} \neq ١$ ، $\text{أ} > ٠$ وسوف نقتصر دراستنا على الاقتران الأسّي الطبيعي $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، $\text{ق}(\text{س}) = \text{لــو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، حيث هـ تسمى العدد النيبيري.

تعريف:

العدد النيبيري هو العدد الحقيقي، غير النسبي، الذي قيمته التقريبية $\text{هـ} \cong ٢,٧١٨٢٨١٨$

ويحقق العلاقة الآتية: $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}} = ١$

ونورد بعض خصائص الاقترانين:

الاقتران الأسّي الطبيعي / مجاله ح

① $\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{س+ص}}$

② $\dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{ص}}} = \text{هـ}^{\text{س−ص}}$

③ $(\text{هـ}^{\text{س}})^{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{س ص}}$

④ $\text{هـ}^{٠} = ١$

⑤ $\text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}} = \text{س}$ ، $\text{س} > ٠$

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي / مجاله ح^{+}

① $\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}$

② $\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\dfrac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}$

③ $\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، $\text{س} > ٠$

④ $\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}} = \text{س}$

قاعدة (١):

إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، فإن $\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{س}$ ، $\text{ص} > ٠$

قاعدة (٢):

إذا كان $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{س}}$ فإن $\text{قَ(س)} = \text{هـ}^{\text{س}}$

مثال ٤ : إذا كان $\text{ق(س)} = \text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{قتاس}$ ، فجد قَ(س) .

الحل : $\text{قَ(س)} = \text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٣\text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \text{قتاس ظتاس}$

قاعدة (٣):

إذا كان $\text{ق(س)} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، $\text{س} > ٠$ ، فإن $\text{قَ(س)} = \dfrac{١}{\text{س}}$

مثال ٥ : إذا كان $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{١٠}$ ، فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عندما $\text{س} = ٥$

الحل : $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{١٠} = ١٠\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

ومنها يكون $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١٠ \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{١٠}{\text{س}}$

$$\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س}=٥} = \frac{١٠}{٥} = ٢$$

مثال ٦ : بيّن باستخدام قاعدة لوبيتال ما يأتي:

① $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}} = ١$

② $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}^٢ - ١} = \frac{١}{٢}$

الحل : ① بالتعويض المباشر $\frac{\text{هـ}^٠ - ١}{٠} = \frac{٠}{٠}$ لذلك نستخدم قاعدة لوبيتال

ومنها $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{١} = \text{هـ}^٠ = ١$

② بالتعويض المباشر تكون $\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}١}{١^٢ - ١} = \frac{٠}{٠}$ لذلك نستخدم قاعدة لوبيتال

ومنها $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}^٢ - ١} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{\text{س}}}{٢\text{س}} = \frac{١}{٢}$

تمارين ١ - ٤

① احسب النهايات الآتية باستخدام قاعدة لوبيتال:

أ $\underset{\text{س}\leftarrow \text{١}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}-\text{١}} - \text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

ب $\underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٤س}}{\text{ظاس}}$

② جد $\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ في كلّ مما يأتي:

أ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتاس}$

ب $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{س} > \text{٠}$

جـ $\text{ص} = (\text{هـ}^{\text{س}} - \text{٢})(\text{هـ}^{\text{س}} + \text{٢})$

③ إذا كان $\acute{\text{ق}}(\text{١}) = {}^{-}\text{٢}$ ، $\text{ق}(\text{٣}) = {}^{-}\text{٢}$ ، $\acute{\text{ق}}(\text{٣}) = \text{٤}$ جد قيمة: $\underset{\text{س}\leftarrow \text{١}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}}{\text{ق}(\text{١}) - \text{ق}(\text{س})}$

④ إذا كانت $\text{ص} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{١}$ ، فجد قيمة/ قيم س التي تجعل $\acute{\text{ص}} = \text{ص}$

ورقة عمل (١)

① إذا كانت $\text{ص} = \dfrac{\text{جاس}}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq \text{٠}$ ، أثبت أن: $\ddot{\text{ص}} + \dfrac{\text{٢}}{\text{س}}\acute{\text{ص}} + \text{ص} = \text{٠}$

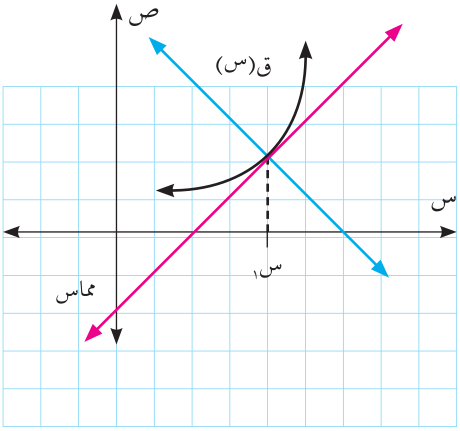
② إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ ، $\text{ن} \in \text{ص}$ ، وكان $\text{ق}^{(\text{٣})}(\text{س}) = \text{أ س}$ ، جد قيمة أ

③ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + \text{هـ}^{\text{س}+\text{١}}$ ، (هـ العدد النيبيري)

جد متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٠ إلى ١

١ - ٥ تطبيقات هندسية وفيزيائية (Geometric and Physical Applications)

أولاً: تطبيقات هندسية:



نلاحظ في الشكل المجاور أن معدل التغير للاقتران ق(س) (ميل المنحنى) عند س$_{١}$ هو ميل المماس المرسوم للمنحنى وتساوي قَ(س$_{١}$) ونسمي النقطة (س$_{١}$ ، ق(س$_{١}$)) نقطة التماس.

تعريف:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند النقطة أ (س$_{١}$ ، ق(س$_{١}$))، فإن ميل المنحنى عند النقطة أ هو ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س)، ويساوي قَ(س$_{١}$) .

ويعرف العمودي على منحنى الاقتران، بأنه العمودي على المماس للمنحنى عند نقطة التماس.

مثال ١ : جد ميل منحنى الاقتران ق(س) = س^{٣} + ٥س عند س = ١ ، ثم جد معادلتي المماس والعمودي على المماس عند تلك النقطة.

الحل :

ميل المنحنى عند س = ١ يساوي قَ(١)

قَ(س) = ٣س^{٢} + ٥ ومنها قَ(١) = ٨ = ميل المماس

لكن نقطة التماس هي (١ ، ق(١)) = (١ ، ٦)

معادلة المماس هي: ص - ص$_{١}$ = م(س - س$_{١}$)

أي: ص - ٦ = ٨(س - ١) ومنها ص = ٨س - ٢

ميل العمودي على المماس = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}} = \frac{-١}{٨}$

ومنها تكون معادلة العمودي على المماس هي:

٨ص + س - ٤٩ = ٠ (تحقق من ذلك)

مثال ٢ : إذا كان المماس لمنحنى $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٤}{\text{س}}$ ، $\text{س} > ٠$ ، يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، أثبت أن العمودي على المماس عند نقطة التماس لمنحنى ق(س) يمر بالنقطة (٠ ، ٠).

الحل : نفرض نقطة التماس $\text{أ}(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$

ميل المماس = ظا ١٣٥ = $^-١$ ، $\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \frac{^-٤}{\text{س}^٢}$

لكن ميل المنحنى عند $\text{س}_١ = \frac{^-٤}{\text{س}_١^٢}$

ومنها $^-١ = \frac{^-٤}{\text{س}_١^٢}$

إذن $\text{س}_١ = ٢$ لأن $\text{س}_١ > ٠$

نقطة التماس هي (٢ ، ٢) ، ومنها ميل العمودي = $\frac{^-١}{^-١} = ١$

معادلة العمودي هي $\text{ص} - ٢ = ١(\text{س} - ٢)$ ومنها $\text{ص} = \text{س}$

النقطة (٠ ، ٠) تقع على العمودي على المماس.

أي أن العمودي على المماس يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

مثال ٣ : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢}{\text{هـ}^{\text{س}}}$ عند النقطة التي إحداثيها السيني = ١

الحل : $\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \frac{٢\text{س هـ}^{\text{س}} - \text{س}^٢\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}})^٢}$

ومنها يكون ميل المماس = $\bar{\text{ق}}(١) = \frac{١}{\text{هـ}}$ (لماذا ؟)

عندما $\text{س}_١ = ١$، فإن $\text{ص}_١ = \frac{١}{\text{هـ}}$ فتكون معادلة المماس هي:

$$\text{ص} - \frac{١}{\text{هـ}} = \frac{١}{\text{هـ}}(\text{س} - ١)$$

ومنها $\text{هـ ص} = \text{س}$

مثال ٤ : إذا كان المستقيم ص = $-$٣س + جـ يمس منحنى ق(س) = $-$٢س^{٢} + ٥س + ١
جد نقطة/ نقط التماس.

الحل : نفرض أن نقطة التماس (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ، قَ(س) = $-$٤س + ٥

وبما أن ميل المماس = ميل المنحنى

إذن $-$٣ = $-$٤س$_{١}$ + ٥ ومنها س$_{١}$ = ٢

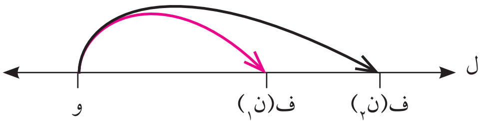
نقطة التماس = (٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ٣) (تحقق من ذلك)

ثانياً: تطبيقات فيزيائية:

لتكن (و) نقطة على المستقيم ل وتحرك جسم عليه بحيث كانت ف تمثل بعد الجسم عن النقطة (و) بعد ن ثانية فإن:

السرعة المتوسطة في الفترة [ن$_{١}$ ، ن$_{٢}$]

تساوي $\dfrac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \dfrac{\text{ف}(\text{ن}_{٢}) - \text{ف}(\text{ن}_{١})}{\text{ن}_{٢} - \text{ن}_{١}}$



تعريف:

السرعة اللحظية (ع) عند الزمن ن هي ع(ن) = $\dfrac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = فَ

التسارع اللحظي (ت) عند الزمن ن هو $\dfrac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \dfrac{\text{د}^{٢}\text{ف}}{\text{د ن}^{٢}}$ = فً

مثال ٥ : تحرك جسم على خط مستقيم، بحيث إن بعده عن نقطة ثابتة (و) يتحدد بالعلاقة
ف = ن^{٣} $-$ ٩ن^{٢} + ٧ حيث ف بعده بالأمتار ، ن الزمن بالثواني، جد:

① السرعة المتوسطة للجسم في الفترة [١ ، ٣]

② تسارع الجسم عندما يعكس الجسم من اتجاه حركته.

الحل : ف = ن^{٣} $-$ ٩ن^{٢} + ٧

① السرعة المتوسطة $\dfrac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \dfrac{\text{ف}(٣) - \text{ف}(١)}{٣ - ١} = \dfrac{-٤٧ - ١^{-}}{٣ - ١} = -٢٣$ م/ ث.

٢ فَ(ن) = ع(ن) = ٣ن^{٢} − ١٨ن

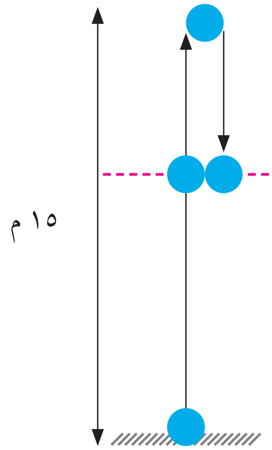
يعكس الجسم اتجاه حركته في اللحظة التي تتغير فيها إشارة ع

أي عندما ع(ن) = ٠ ومنها ٣ن^{٢} − ١٨ن = ٠ ⇐ ٣ن(ن − ٦) = ٠ ، ن = ٠، ن = ٦ ثوانٍ

يعكس الجسم اتجاه حركته بعد ٦ ثوانٍ

ت(ن) = ٦ن − ١٨ ⇐ ت(٦) = ٦ × ٦ − ١٨ = ١٨ م/ث^{٢}

مثال ٦ : قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض، بحيث يتحدد بعده عن سطح الأرض بالعلاقة ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن^{٢} ، حيث ف: ارتفاع الجسم بالأمتار، ن: الزمن بالثواني، جد:



١ أقصى ارتفاع يصله الجسم.

٢ سرعة الجسم وهو على ارتفاع ١٥ م من سطح الأرض.

٣ المسافة التي قطعها الجسم خلال الثواني الأربعة الأولى.

الحل : ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن^{٢}

١ عندما يصل الجسم أقصى ارتفاع فإن ع(ن) = ٠

ع(ن) = ٢٠ − ١٠ن = ٠ أي أن ن = ٢ ثانية

∴ أقصى ارتفاع = ف(٢) = ٢٠ × ٢ − ٥ × ٤ = ٢٠م

٢ عندما يكون الجسم على ارتفاع ١٥م فإن ف(ن) = ١٥

⇐ ٢٠ن − ٥ن^{٢} = ١٥ ⇐ ٥ن^{٢} − ٢٠ن + ١٥ = ٠

⇐ (ن − ١)(ن − ٣) = ٠ ومنها ن = ١ ، ن = ٣

يكون الجسم على ارتفاع ١٥م عندما:

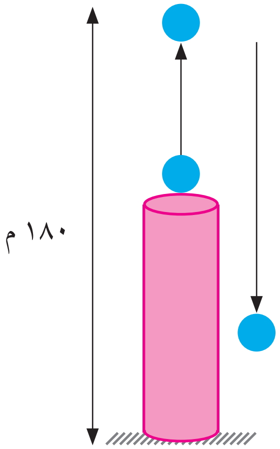
- ن = ١ أي أن ع(١) = ٢٠ − ١٠ × ١ = ١٠ م/ث، الجسم صاعد.
- ن = ٣ ، أي أن ع(٣) = ٢٠ − ١٠ × ٣ = $^{-}$١٠ م/ث، (ماذا تعني السرعة السالبة؟)

٣ عندما ن = ٤ ثانية يكون الجسم على ارتفاع : ف(٤) = ٢٠ × ٤ − ٥ × ١٦ = ٠م ، أي يكون الجسم قد وصل سطح الأرض، وتكون المسافة المقطوعة = ٢ × أقصى ارتفاع − ف(٤) = ٤٠م

مثال ٧ : قذف جسم رأسياً إلى أعلى من قمة برج بحيث إن ارتفاعه عن البرج بالأمتار بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة
ف(ن) = ٣٠ن − ٥ن^{٢} ، جد:

① ارتفاع البرج علماً بان أقصى ارتفاع للجسم عن سطح الأرض = ١٨٠م

② سرعة ارتطام الجسم بسطح الأرض.



الحل :

① عند أقصى ارتفاع عن قمة البرج تكون ع(ن) = ٠
ع(ن) = فَ(ن) = ٣٠ − ١٠ن = ٠ ومنها ن = ٣
أقصى ارتفاع عن قمة البرج = ف (٣) = ٤٥م
لكن أقصى ارتفاع عن سطح الأرض= ١٨٠م ، ارتفاع البرج = ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥م

② يرتطم الجسم بالأرض عندما تكون ف(ن) = $^{-}$١٣٥م (فسّر).
بحل المعادلة ينتج أن ن = ٩ ومنها السرعة ٣٠ − ١٠ × ٩ = $^{-}$٦٠ م/ ث

تمارين ١ - ٥

① جد النقطة/النقط على منحنى ق(س) = س^{٢} −٢س + ١ التي يكون عندها المماس للمنحنى عمودياً على المستقيم س + ٢ص − ٤ = صفر

② جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = ٣ − ظا^{٢}س عندما س = $\frac{\pi}{٤}$

③ إذا كان المستقيم س = أ − ٦ص يمس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٣س}{س − ٢}$ ، س ≠ ٢ ، جد قيم أ.

④ قذف جسم رأسياً إلى أعلى وَفق العلاقة ف = ٤٠ن − ٥ن^{٢}، حيث ف ارتفاعه بالأمتار، ن بالثواني. جد سرعة الجسم عندما تكون المسافة الكلية المقطوعة ١٠٠ م.

١ – ٦ قاعدة السلسلة (Chain Rule)

تواجهنا بعض الاقترانات مثل ق(س) = (س^{٢} + ١)^{٣}، والمطلوب إيجاد قَ(س)، وهنا نلجأ إلى فك المقدار أولاً ثم اشتقاق الناتج، أو استخدام مشتقة حاصل الضرب، ولكن هذه الطريقة تزداد صعوبةً وتعقيداً كلما كان الأسّ كبيراً، وهذا يدعو إلى البحث عن طريقة أسهل لإيجاد مشتقة هذه الاقترانات. فمثلاً، إذا كان ص = ق(س) = (س^{٢} + ١)^{٣}، وفرضنا أن ع = هـ(س) = س^{٢} + ١ فيكون ص = ق(ع) = ع^{٣}

أتذكر:

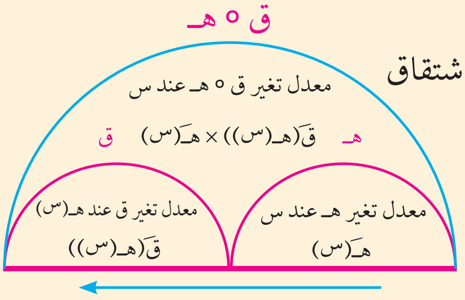
(ق ο هـ) (س) = ق(هـ(س)) هو الاقتران المركب من ق ، هـ

قاعدة السلسلة:

إذا كانت ص = ق(ع) ، ع = هـ(س)
وكان هـ(س) قابلاً للاشتقاق و ق(س) قابلاً للاشتقاق
عند هـ(س) ، مدى هـ ⊆ مجال ق

فإن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

أي أن (ق ο هـ)َ (س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)



مثال ١ : إذا كان ق(س) = س^{٣} + س ، هـ(س) = س^{٢} ، جد:

① (ق ο هـ)َ (س)
② (هـ ο هـ)َ (٢)

الحل : قَ(س) = ٣س^{٢} + ١ ، هـَ(س) = ٢س

① (ق ο هـ)َ (س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)

= قَ(س^{٢}) × ٢س = (٣(س^{٢})^{٢} + ١) × ٢س = ٦س^{٥} + ٢س

② (هـ ο هـ)َ (٢) = هـَ(هـ(٢)) × هـَ(٢)

= هـَ(٤) × هـَ(٢) =٨ × ٤ = ٣٢

مثال ٢ : إذا كان $ص = ع^{٢} - ٥ع$ ، $ع = \frac{١}{س + ١}$ ، $س \neq -١$، جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = ٠$

الحل : $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} = (٢ع - ٥) \times \frac{-١}{(س + ١)^{٢}}$ ، عندما $س = ٠$ فإن $ع = ١$

ومنها $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ٠، ع = ١} = (٢ - ٥) \times \frac{-١}{(٠ + ١)^{٢}} = -٣ \times -١ = ٣$

مثال ٣ : جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $ص = س\, ق(س^{٢} + ١)$ عندما $س = ٢$، علماً بأن $ق(س)$ قابل للاشتقاق، $ق'(٥) = ٣$ ، $ق(٥) = -١$

الحل : $\frac{د ص}{د س} = ١ \times ق(س^{٢} + ١) + س \times ٢س\, ق'(س^{٢} + ١)$

ميل المماس $= \left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ٢} = ق(٥) + ٨\, ق'(٥) = -١ + ٢٤ = ٢٣$

ميل المماس $= ٢٣$ ، نقطة التماس هي $(٢ ، -٢)$. (لماذا؟)

معادلة المماس هي $ص - -٢ = ٢٣(س - ٢)$ ومنها $ص = ٢٣س - ٤٨$

نتيجة:

إذا كان $ص = (هـ(س))^{ن}$ ، وكان $هـ(س)$ قابلاً للاشتقاق ، $ن \in ص$

فإن $\frac{د ص}{د س} = ن(هـ(س))^{ن-١} \times هـ'(س)$

مثال ٤ : إذا كان $ق(س) = \left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{٥}$ ، $س \neq ١$، جد $ق'(٢)$

الحل : $ق'(س) = ٥\left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{٤} \times \frac{(س - ١) \times ١ - ١(س + ١)}{(س - ١)^{٢}}$

$= ٥\left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{٤} \times \frac{-٢}{(س - ١)^{٢}}$

$ق'(٢) = ٥ \times ٣^{٤} \times -٢ = -٨١٠$

قاعدة:

إذا كان ك(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق فإن:

- $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{ك(س)}}$ قابل للاشتقاق، وتكون $\text{قَ(س)} = \text{كَ(س)}\ \text{هـ}^{\text{ك(س)}}$
- $\text{م(س)} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ك(س)}$ ، $\text{ك(س)} > ٠$ قابل للاشتقاق وتكون $\text{مَ(س)} = \dfrac{\text{كَ(س)}}{\text{ك(س)}}$

مثال ٥ :

① إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جتاس}}$ فجد $\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عندما $\text{س} = \dfrac{\pi}{٢}$

② إذا كان $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{س}^{٢}$ ، فبيّن أن: $\text{صً} \,.\, \text{هـ}^{\text{ص}} = {}^{-}٢$

الحل :

① $\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} = {}^{-}\text{جاس هـ}^{\text{جتاس}}$ ومنها $\left.\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س} = \frac{\pi}{٢}} = {}^{-}١\,\text{هـ}^{٠} = {}^{-}١$

② $\text{ص} = ٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{س}$ ومنها $\text{صَ} = \dfrac{٢}{\text{س}}$ ، $\text{صً} = \dfrac{{}^{-}٢}{\text{س}^{٢}} = \dfrac{{}^{-}٢}{\text{هـ}^{\text{ص}}}$ (لماذا؟)

أي أن $\text{صً} \,.\, \text{هـ}^{\text{ص}} = {}^{-}٢$

تمارين ١ - ٦

① جد $\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عندما س = ١ لكل مما يأتي:

أ $\text{ص} = (\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)^{{}^{-}٣}$

ب $\text{ص} = \text{س}^{٢}\,\text{قا}\,\dfrac{\pi}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq ٠$

جـ $\text{ص} = ٥\text{ع}^{٢} - ٧$، $\text{ع} = \dfrac{١}{\text{س}^{٢} + ١}$

د $\text{ص} = \text{ظا}\left(\dfrac{\pi}{\text{س}}\right) + \text{جتا}^{٢}(\pi\,\text{س})$ ، $\text{س} \neq ٠$

هـ $\text{ص} = (\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س})^{٣}$ ، $\text{س} > ٠$

② إذا كان $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{م(س)})}{٢\text{س}}$ ، وكان $\text{م(١)} = \text{هـ}^{٢}$ ، $\text{مَ(١)} = ٢\text{هـ}$ ، فجد قَ(١).

③ إذا كان $\text{ق(س)} = \text{س}^{٢}\text{م}(\text{س}^{٢} + ١)$ اعتمد على الجدول المجاور في إيجاد قً(١).

م(٢)	مَ(٢)	مً(٢)
٥	⁻١	١

④ إذا كان $\text{ص} = \text{ق}^{٣}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}^{٣})$، جد $\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عندما س = ٢

علماً بأن ق(٢) = ١ ، قَ(٢) = ⁻٢ ، قَ(٨) = ٢ .

١ - ٧ الاشتقاق الضمني (Implicit Differentiation) للعلمي فقط

سبق لك إيجاد مشتقة الاقتران ص = ق(س) عندما تكون العلاقة بين المتغيرين صريحة (ص معرفة بدلالة س)، ولكن في العلاقة $س^{٢} + ٥ص^{٢} = س ص - ٣$ ليس من السهل كتابة ص بدلالة س ، فنسميها علاقةً ضمنيةً، ونجد $\frac{د ص}{د س}$ بطريقة تسمى الاشتقاق الضمني، حيث يتم اشتقاق كل من طرفي العلاقة بالنسبة إلى س ضمن قواعد الاشتقاق.

مثال ١ : إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} + ١ = ٤س - ص$ ، جد $\frac{د ص}{د س}$ ، ثم جد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (١ ، ١)

الحل : نشتق طرفي العلاقة ضمنياً بالنسبة إلى س :

$٢س + ٢ص\acute{ص} = ٤ - \acute{ص}$

$٢ص\acute{ص} + \acute{ص} = ٤ - ٢س$ (تجميع الحدود التي تحوي $\acute{ص}$ على جهة واحدة)

$\acute{ص}(٢ص + ١) = ٤ - ٢س$ (إخراج عامل مشترك $\acute{ص}$ من الطرف الأيمن)

$\Leftarrow \acute{ص} = \frac{٤ - ٢س}{٢ص + ١}$ ومنها $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (١ ، ١) $= \frac{٤ - ٢}{٢ + ١} = \frac{٢}{٣}$

مثال ٢ : إذا كان $٣ص = جاس جتا٢ص$ ، جد $\frac{د ص}{د س}$

الحل : نشتق طرفي العلاقة ضمنياً بالنسبة إلى س

$٣\acute{ص} = جتاس جتا٢ص + جاس \times - ٢ جا٢ص \times \acute{ص}$

$٣\acute{ص} + ٢جاس \times جا٢ص \times \acute{ص} = جتاس جتا٢ص$

ومنها $\acute{ص} = \frac{جتاس \times جتا٢ص}{٣ + ٢جاس \times جا٢ص}$

مثال ٣ : جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $(س + ص)^{٣} - ٣ص^{٢} = ٥$ ، $ص > ٠$ ، عند نقطة تقاطع منحناها مع المستقيم $س + ص = ٢$

الحل : بالتعويض بدل س + ص بالعدد ٢ في معادلة المنحنى ينتج أن: $٢^{٣} - ٣ص^{٢} = ٥$

إذن ص = ١ ، ومنها نقطة التقاطع هي(١ ، ١)

لكن ميل المماس = ميل المنحنى عند النقطة (١ ، ١)

نشتق العلاقة ضمنياً بالنسبة إلى س فينتج $٣(س + ص)^{٢}(١ + ص') - ٦ص ص' = ٠$

وبتعويض النقطة (١ ، ١) ينتج أن: $٣(١ + ١)^{٢}(١ + ص') - ٦ ص' = ٠$ ومنها $ص' = {}^{-}٢$

ميل المماس = $^{-}٢$ وتكون معادلة المماس هي: $ص = {}^{-}٢س + ٣$

قاعدة:

إذا كانت $ص = س^{\frac{م}{ن}}$ ، م ، ن ∈ ص ، م ≠ ن ، ن ≠ ٠ ، فإن $\frac{د ص}{د س} = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن} - ١}$

نتيجة:

إذا كان $ق(س) = (هـ(س))^{ن}$ ، ن ∈ ح

وكان هـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق فإن $ق'(س) = ن\,(هـ(س))^{ن-١} \times هـ'(س)$

مثال ٤ : إذا كان $ق(س) = (س^{٣} + ٥س - ٢)^{\frac{٣}{٤}}$ ، جد $ق'(٢)$

الحل :

$$ق'(س) = \frac{٣}{٤}(س^{٣} + ٥س - ٢)^{-\frac{١}{٤}} \times (٣س^{٢} + ٥)$$

$$= \frac{٣}{٤} \times \frac{(٣س^{٢} + ٥)}{\sqrt[٤]{س^{٣} + ٥س - ٢}}$$

$$ق'(٢) = \frac{٣}{٤} \times \frac{(٣ \times ٢^{٢} + ٥)}{\sqrt[٤]{٢^{٣} + ٥ \times ٢ - ٢}}$$

$$= \frac{٣}{٤} \times \frac{١٧}{٢} = \frac{٥١}{٨}$$

نشاط: إذا كانت $ص = \frac{(س + ١)^{٥}(س + ٢)^{٤}}{(س^{٢} + ١)^{٣}}$

لإيجاد $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ٠}$ نأخذ لوغاريتم الطرفين فيصبح:

$$لـو_{هـ} ص = لـو_{هـ} \frac{(س + ١)^{٥}(س + ٢)^{٤}}{(س^{٢} + ١)^{٣}}$$

وبتطبيق قوانين اللوغاريتمات تصبح:

$$لـو_{هـ} ص = ٥لـو_{هـ}(س + ١) + ٤لـو_{هـ}(س + ٢) - ٣لـو_{هـ}(س^{٢} + ١)$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س تكون $\frac{ص'}{ص} =$ ....

منها $\frac{د ص}{د س} =$ ....

ومنها $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ٠} =$ ....

تمارين ١ - ٧

① جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يأتي :

أ $س^{٣} + س ص + ٢ص^{٢} = ٥$

ب $ص = \sqrt[٥]{١ - س^{٢}} + ٣$

جـ $ص = جا(س + ص)$

② جد معادلة العمودي على منحنى الدائرة التي معادلتها $س^{٢} - ٣س + ص^{٢} = ٢٥$ ، عند كل من نقطتي تقاطعها مع منحنى $ص = س^{٢} - ٣س + ٥$

③ إذا كان المستقيم المار بالنقطة $(-٢ ، ٠)$ يمس منحنى العلاقة $٤س^{٢} + ص^{٢} = ٤$، جد نقطة/ نقط التماس.

④ إذا كان $هـ^{ص} + هـ^{س} = هـ^{-ص} + هـ^{-س}$ ، فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(-١ ، ١)$.

ورقة عمل (٢)

① إذا كانت $\text{س}^{٢} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س ص})$ ، س ، ص > ٠ ، فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عند النقطة (١ ، هـ).

② من نقطة على سطح الأرض قذف جسم رأسياً إلى أعلى، وكان ارتفاعه ف بالأمتار بعد ن من الثواني يعطى بالعلاقة $\text{ف} = ٣٠\text{ن} - ٥\text{ن}^{٢}$،

جد:

أ أقصى ارتفاع يصله الجسم.

ب سرعة الجسم وهو نازل عندما يكون على ارتفاع ٤٠ م.

③ جد: أ $\lim\limits_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \frac{\text{ظا}(٢\text{س} + \text{هـ}) - \text{ظا }٢\text{س}}{\text{هـ}}$

ب $\lim\limits_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \frac{\text{ق}(١ + ٣\text{هـ}) - \text{ق}(١ - ٣\text{هـ})}{١٠\text{ هـ}}$ ، علماً بأن $\text{قَ}(١) = -٢$

جـ $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١} \frac{\text{قَ}(٢\text{س}) - \text{قَ}(٢)}{\text{س} - ١}$ ، علماً بأن $\text{قَ}(٢) = ٣$ ، $\text{قً}(٢) = ٥$

④ جد النقطة/ النقاط التي يكون عندها المماس لمنحنى $\text{ق(س)} = \text{س} + \frac{١}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq ٠$ موازياً للقاطع الواصل بين النقطتين (١ ، ٢) ، $(٢ ، \frac{٥}{٢})$

⑤ إذا كان ق(س) = أجاس ، $\text{هـ(س)} = \frac{٣\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}$ فجد قيمة أ بحيث $(\text{هـ} \circ \text{ق})َ(\frac{\pi}{٦}) = ٠$ ، أ ≠ ٠

⑥ إذا كان $\text{ق(س)} = \text{جا}^{٣}\text{س} - \text{جتا}^{٣}\text{س}$ ، جد $\text{قً}(\frac{\pi}{٤})$.

اختبار الوحدة

١ ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كلٍ مما يأتي:

١ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [١ ، ٣] يساوي ٤ وكان متوسط تغير نفس الاقتران في الفترة [٣ ، ٧] يساوي $^-$٥، فما متوسط تغير الاقتران ق(س) في [١ ، ٧]؟

أ) ٢ ب) ١ جـ) $^-$١ د) $^-$٢

٢ إذا كان المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند النقطة (٢ ، $^-$١) يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فما قيمة $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{ق(س) - ق(٢)}{٢س - ٤}$؟

أ) $^-$١ ب) $\frac{^-١}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) ١

٣ إذا كان ق(س) = جتا٢س، فما قيمة قً(س) + ٦ق(س) ؟

أ) جتا٢س ب) جا٢س جـ) ٢جتا٢س د) ٢جا٢س

٤ إذا كان $س^٢ - س\,ص + ص^٢ = ٣$، فما قيمة $\frac{د\,ص}{د\,س}$ عند النقطة (١ ، $^-$١) ؟

أ) $^-$٢ ب) $^-$١ جـ) ١ د) ٢

٥ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ٢ &، \quad س \neq ٥ \\ ١٠س &، \quad س = ٥ \end{cases}$ ، فما قيمة قَ(٥) ؟

أ) ٠ ب) ٤ جـ) ١٠ د) غير موجودة

٦ يتحرك جسيم على خط مستقيم وَفق العلاقة: ف(ن) ع(ن) = ن

ف: المسافة بالأمتار، ن : الزمن بالثواني، ع(ن) السرعة، وكانت ع(٢) = ٣م/ ث،

فما قيمة التسارع عندما ن = ٢ ثانية؟

أ) $^-$٨ م/ $ث^٢$ ب) ٨م/ $ث^٢$ جـ) ١٢ م / $ث^٢$ د) $^-$١٢م/ $ث^٢$

٧ إذا كانت ق(س) = $(س^٢ + ٧)^{\frac{٢}{٣}}$ ، فما قيمة قً(١) ؟

أ) $\frac{١١}{١٨}$ ب) $\frac{٤}{٩}$ جـ) $\frac{١٥}{١٨}$ د) $\frac{١}{٢}$

٨ إذا كان $(\text{ق} \circ \text{هـ})'(٣) = ١٥$ ، وكان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٩$ ، $\text{هـ}'(٣) = ٥$ ، فما قيمة هـ(٣)؟

أ) ٠ ب) ١,٥ جـ) ٢ د) ٣

٢ جد متوسط التغير للاقتران $\text{ص} = \text{ق}(\text{س}) = (\text{س} + ١)\text{هـ}^{\text{س}^{٢}-\text{س}}$ عندما تتغير س من ٠ إلى ١

٣ إذا كان ق(٢) = ٣ ، $\text{ق}'(٢) = {}^{-}١$، جد $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١) - \text{ق}(٢)}{\text{س}^{٢} - ١}$.

٤ جد قيمة كل من النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال

أ $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}^{٤\text{س}} - ١}{\text{ظاس}}$

ب $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} - \text{هـ}^{\text{س}}}{٢\text{س}}$

جـ $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتاس}}{\text{س جاس}}$

٥ إذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - ٢}{\text{س} - ١} = ٣$، ق متصلاً على ح.

جد $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣}\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(١)}{\text{س} - ١}$

٨ إذا كان $\text{ص} = \text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س هـ}^{٦\text{س}}}{\text{جاس}}$ ، جاس ≠ ٠ جد $\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الوحدة

٢

٢ - ١ الاقترانات المتزايدة والمتناقصة (Increasing and Decreasing Functions)

تعريف:

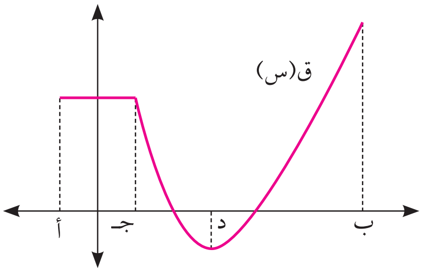
يكون منحنى الاقتران ق(س) المعرف في [أ، ب] ، س$_١$ ، س$_٢$ ∈ [أ ، ب]

① متزايداً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س$_١$ < س$_٢$ فإن ق(س$_١$) < ق(س$_٢$)

② متناقصاً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س$_١$ < س$_٢$ فإن ق(س$_١$) > ق(س$_٢$)

③ ثابتاً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س$_١$ < س$_٢$ فإن ق(س$_١$) = ق(س$_٢$)

مثال ١ : في الشكل المجاور، حدد الفترات التي يكون فيها منحنى الاقتران ق(س) متزايداً، أو متناقصاً، أو ثابتاً.

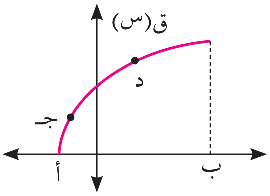


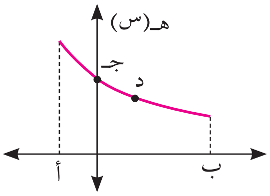
الحل : يكون منحنى الاقتران ق(س) ثابتاً في [أ، جـ] ويكون متناقصاً في [جـ ، د] لأنه كلما زادت قيمة س في الفترة [جـ ، د] تقل قيمة ق(س)، ويكون متزايداً في [د ، ب] (لماذا؟)

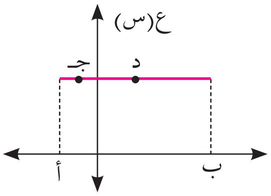
(ملاحظة : لا يطلب من الطالب التحقق من التزايد والتناقص جبرياً باستخدام التعريف)

التزايد والتناقص باستخدام اختبار المشتقة الأولى

نشاط: الشكل أدناه يمثل منحنيات الاقترانات : ق(س)، هـ(س)، ع(س) المعرفة في الفترة [أ، ب] ، معتمداً عليها قم بما يأتي:







١ حدد أي الاقترانات السابقة يكون منحناه متزايداً، وأيها متناقصاً، وأيها ثابتاً في الفترة [أ، ب].

٢ ارسم لكل منحنى مماساً عند النقطة جـ ومماساً عند النقطة د.

٣ نوع زاوية الميل للمماسات المرسومة هي …………

٤ إشارة ظل زاوية ميل المماس لكل من المماسات التي رسمت هي ………… (لماذا؟)

٥ ما إشارة كل من قَ(س)، هـَ(س)، عَ(س) في] أ، ب[؟

٦ ما العلاقة بين فترات التزايد والتناقص وإشارة المشتقة الأولى للاقتران؟

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب] وقابلاً للاشتقاق في] أ، ب[فإن منحنى :

١ الاقتران ق(س) يكون متزايداً في [أ، ب] إذا كانت قَ(س) > صفر، ∀ س ∈] أ، ب[

٢ الاقتران ق(س) يكون متناقصاً في [أ، ب] إذا كانت قَ(س) < صفر، ∀ س ∈] أ، ب [

٣ الاقتران ق(س) يكون ثابتاً في [أ، ب] إذا كانت قَ(س) = صفر، ∀ س ∈] أ،ب [

مثال ٢ : جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) علماً بأن:

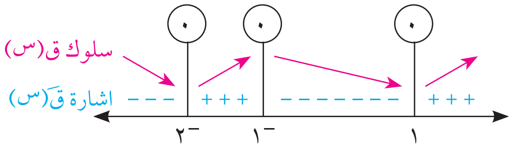
قَ(س) = (س^{٢} − ١)(س + ٢)، س ∈ ح

الحل : نضع قَ(س) = صفر، ومنها (س^{٢} − ١)(س + ٢) = ٠

ومنها (س − ١) (س + ١) (س + ٢) = ٠

فينتج أن س = ١ أو س = −١ أو س = −٢

من إشارة قَ(س) في الشكل المجاور يكون:



منحنى ق(س) متناقصاً في]−∞ ، −٢] ، [−١ ، ١] ، ومتزايداً في [−٢ ، −١] ، [١، ∞[.

مثال ٣ : عيّن فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = س^{٤} + ٤س + ٥، س ∈ ح

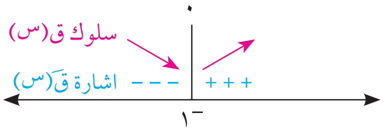
الحل : ق(س) متصل في ح لأنه كثير حدود.

قَ(س) = ٤س^{٣} + ٤ نجعل قَ(س) = ٠ ومنها س^{٣} + ١ = ٠ فتكون س = ⁻١ (لماذا؟)

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور:

يكون منحنى ق(س) متزايداً في الفترة [⁻١ ، ∞[

ومتناقصاً في الفترة]⁻∞ ، ⁻١].



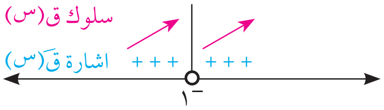
مثال ٤ : عيّن فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}$ ، س ≠ ⁻١

الحل : ق(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}$ ، س ≠ ⁻١ متصل في ح - {⁻١}

قَ(س) = $\frac{٢}{(\text{س} + ١)^{٢}}$

قَ(س) ≠ ٠ ∀ س ∈ ح - {⁻١}

والشكل المجاور يبيّن إشارة قَ(س)



ومنه يكون منحنى الاقتران ق(س) متزايداً في الفترتين]⁻∞ ، ⁻١[،]⁻١، ∞[

فكّر وناقش

في المثال السابق هل يمكن القول أن ق(س) متزايد في ح - {⁻١}؟

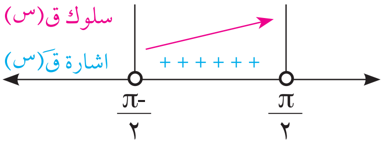
مثال ٥ : أثبت أن منحنى الاقتران ق(س) = ٢س + ظاس متزايد في الفترة] $\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

الحل : ق(س) متصل وقابل للاشتقاق في الفترة] $\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ [(لماذا؟)

قَ(س) = (٢ + قا^{٢}س) ≠ ٠

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور

يكون منحنى ق(س) متزايداً في الفترة] $\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ [



مثال ٦ : عيّن فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) = |س^{٢} − ٤| ، س ∈ [−٣ ، ٢]

الحل : نكتب ق(س) دون استخدام رمز القيمة المطلقة. *

$$\text{ق(س)} = |\text{س}^{٢} - ٤| = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٤ & ، \ -٣ \le \text{س} < -٢ \\ ٤ - \text{س}^{٢} & ، \ -٢ \le \text{س} \le ٢ \end{cases}$$

ق(س) متصل في الفترة [−٣ ، ٢] لأنه اقتران قيمة مطلقة لاقتران متصل

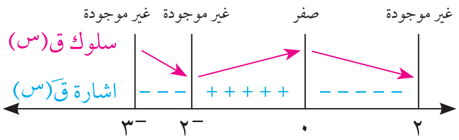
$$\text{قَ(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} & ، \ -٣ < \text{س} < -٢ \\ -٢\text{س} & ، \ -٢ < \text{س} < ٢ \end{cases}$$

قَ(س) غير موجودة عندما س = −٣ ، −٢ ، ٢ (لماذا؟)

نجعل قَ(س) = ٠ ، ومنها س = ٠

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور يكون منحنى ق(س) متزايداً في [−٢، ٠]

ومتناقصاً في [−٣ ، −٢] ، [٠، ٢]



---

* سنقتصر دراستنا على الاقترانات متعددة القاعدة والمتصلة.

تمارين ٢ - ١

١ حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية:

أ ق(س) = ٣س^{٢} − س^{٣} ، س ∈ [−٢ ، ٥]

ب ق(س) = س + جا^{٢}س ، س ∈ [٠ ، π]

٢ إذا كان ق(س) = ٢س − لوهـ(س + ١) ، س > −١ ، فأثبت أن منحنى ق(س) متزايد في ح$^{+}$.

٣ جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣} & ، \ ٠ \le \text{س} < ١ \\ ٢\text{س}^{٢} - ١ & ، \ ١ \le \text{س} \le ٢ \end{cases}$ ، في الفترة [٠، ٢]

٤ إذا كان ق(س) ، هـ(س) قابلين للاشتقاق على ح، وكان ك(س) = ق^{٢}(س) + هـ^{٢}(س) + س^{٢}، فحدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ك(س)، علماً بأن قَ(س) = هـ(س)، هـَ(س) = −ق(س).

٢ - ٢ القيم القصوى (Extreme Values)

للعلمي فقط

تعريف القيم الصغرى والعظمى المحلية:

ليكن ق(س) اقتراناً معرفاً على المجال ع، ولتكن جـ ∈ع، عندها يكون للاقتران ق(س):

١ قيمة عظمى محلية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي جـ، بحيث أن ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع قيم س ∈ (ف ∩ع)

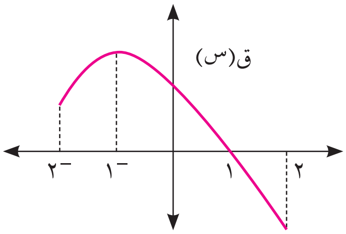
٢ قيمة صغرى محلية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي جـ، بحيث أن ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع قيم س ∈ (ف ∩ع)

٣ قيمة عظمى مطلقة عند س = جـ هي ق(جـ) إذا كانت ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع قيم س ∈ع

٤ قيمة صغرى مطلقة عند س = جـ هي ق(جـ) إذا كانت ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع قيم س ∈ع

ملاحظة: تسمى كل من القيم العظمى والقيم الصغرى قيماً قصوى، سواء أكانت محلية أم مطلقة.

مثال ١ : يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [⁻٢ ، ٢]، اعتمد عليه في إيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت). ثم جد قيمة المشتقة الأولى عند كل قيمة منها (إن وجدت).



الحل : يوجد للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عندما س = ⁻٢ هي ق(⁻٢)

لأنه يوجد فترة مفتوحة مثل ف =]⁻٣ ، ⁻١[تحوي العدد ⁻٢

بحيث أن ق(⁻٢) ≥ ق(س) ∀ س ∈ ف ∩ [⁻٢ ، ٢] = [⁻٢ ، ⁻١[

قَ(⁻٢) غير موجودة (لماذا؟)

وأيضاً ق(⁻١) قيمة عظمى محلية وهي مطلقة لأن ق(⁻١) ≤ ق(س) ∀ س ∈ [⁻٢ ، ٢]

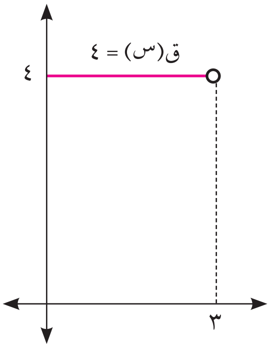
قَ(⁻١) = ٠ (لماذا؟)

ق(٢) قيمة صغرى محلية وهي مطلقة لأن ق(٢) ≥ ق(س) ∀ س ∈ [⁻٢ ، ٢]

قَ(٢) غير موجودة (لماذا؟)

مثال ٢ : إذا كان ق(س) = ٤ ، س ∈]٠ ، ٣[

جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س).



الحل : ق(س) متصل في]٠ ، ٣[

قَ(س) = ٠ ∀ س ∈]٠ ، ٣[

وحسب التعريف ∀ س ∈]٠ ، ٣[يوجد قيمة صغرى محلية هي ٤

لأن ق(س) ≥ ٤ ∀ س في تلك الفترة

كما أنه حسب التعريف ∀ س ∈]٠ ، ٣[يوجد قيمة عظمى محلية هي ٤

لأن ق(س) ≤ ٤ ∀ س في تلك الفترة

فكّر وناقش:

ما صحة القول أن القيمة العظمى المحلية للاقتران دائماً أكبر من القيمة الصغرى المحلية له؟

تعريف:

تسمى النقطة (أ ، ق(أ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س) إذا كانت:

١ أ ∈ مجال ق(س)

٢ قَ(أ) = ٠ أو قَ(أ) غير موجودة.

مثال ٣ : عيّن جميع النقط الحرجة للاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٣ \quad ، & -١ < س \le ٢ \\ ٣ - س \quad ، & ٢ < س \le ٣ \end{cases}$$

، في [−١ ، ٣]

الحل : ق(س) متصل عند س = ٢ ،

$$قَ(س) = \begin{cases} ٢س \quad ، & -١ < س < ٢ \\ -١ \quad ، & ٢ < س < ٣ \end{cases}$$

قَ(٢) غير موجودة ، قَ(٣) غير موجودة، ..... (لماذا؟)

نجعل قَ(س) = ٠ ومنها س = ٠ ∈]−١ ، ٢[

لا يوجد قيم لـــ س ∈]٢ ، ٣[بحيث قَ(س) = ٠ (لماذا؟)

لا يوجد نقطة حرجة عند س = −١ لأنها لا تنتمي إلى مجال ق(س)

ومنها النقط الحرجة هي (٠ ، −٣) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٠)

اختبار المشتقة الأولى لتعيين القيم القصوى

إذا كان ق(س)اقتراناً متصلاً في الفترة [أ ، ب] وكانت (جـ ، ق(جـ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س)، جـ ∈]أ ، ب[فإنه:

① إذا كان قَ(س) < ٠ عندما أ < س < جـ ،

وكان قَ(س) > ٠ عندما جـ < س < ب

فإن ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

② إذا كان قَ(س) > ٠ عندما أ < س < جـ ،

وكان قَ(س) < ٠ عندما جـ < س < ب

فإن ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)

مثال ٤ : جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = س^{٣} + س^{٢} − ٥س − ٥

الحل : ق(س) اقتران متصل على ح لأنه كثير حدود

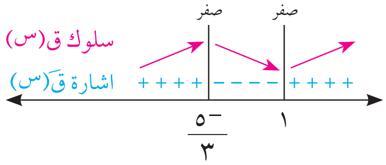
قَ(س) = ٣س^{٢} + ٢س − ٥ ، ∀ س ∈ح ، نجعل قَ(س) = ٠

ومنها ٣س^{٢} + ٢س − ٥ = ٠ أي أن (٣س + ٥)(س − ١) = ٠ ، إذن س = $\frac{-٥}{٣}$ أو س = ١

ومن إشارة قَ(س) في الشكل المجاور تكون

ق($\frac{-٥}{٣}$) = $\frac{٤٠}{٢٧}$ قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

ق(١) = −٨ قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)



فكّر وناقش:

هل يأخذ الاقتران ق(س) في المثال السابق قيماً قصوى مطلقة؟ حددها (إن وجدت).

مثال ٥ : جد القيم القصوى المحلية للاقتران $ق(س) = (٨ - س)\sqrt[٣]{س}$

الحل : $ق(س)$ متصل في ح

$قَ(س) = \sqrt[٣]{س}\ (^{-}١) + (٨ - س) \times \frac{١}{٣} س^{\frac{^{-}٢}{٣}}$

$قَ(س) = -\sqrt[٣]{س} + \frac{(٨ - س)}{٣\sqrt[٣]{س^٢}}$ ، س ∋ ح − {٠} (لماذا؟)

إذن $قَ(س) = \frac{(٨ - ٤س)}{٣\sqrt[٣]{س^٢}}$

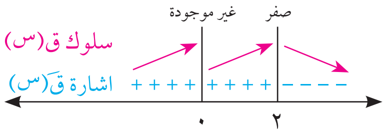
نجعل $قَ(س) = ٠$ ومنها $٨ - ٤س = ٠$ ومنها $س = ٢$

$قَ(س)$ غير موجودة عند $س = ٠$ (لماذا؟)

ومن إشارة $قَ(س)$ في الشكل المجاور،

يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س) عند $س = ٢$

قيمتها $ق(٢) = ٦\sqrt[٣]{٢}$



فكّر وناقش:

هل يوجد قيم قصوى للاقتران عندما س = ٠ في المثال السابق (لماذا؟)

مثال ٦ : جد القيم القصوى المحلية للاقتران $ق(س) = \frac{س^٢ + ٣}{س - ١}$ ، $س \neq ١$

الحل : $ق(س)$ متصل في ح − {١}

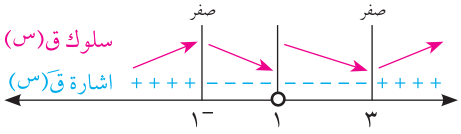
$قَ(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ٣}{(س - ١)^٢}$ ، $س \neq ١$

وبوضع $قَ(س) = ٠$ ينتج أن $س = ٣$ أو $س = {}^{-}١$

ومن إشارة $قَ(س)$ في الشكل المجاور تكون

$ق(^{-}١) = {}^{-}٢$ قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)

$ق(٣) = ٦$ قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)



اختبار أطراف الفترة:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب] وقابلاً للاشتقاق في]أ، ب[فإن:

١ ق(أ) قيمة صغرى محلية، إذا كانت ق̄(س) > ٠ عندما س > أ (بداية تزايد)

٢ ق(أ) قيمة عظمى محلية، إذا كانت ق̄(س) < ٠ عندما س > أ (بداية تناقص)

٣ ق(ب) قيمة عظمى محلية، إذا كانت ق̄(س) > ٠ عندما س < ب (نهاية تزايد)

٤ ق(ب) قيمة صغرى محلية، إذا كانت ق̄(س) < ٠ عندما س < ب (نهاية تناقص)

مثال ٧ : إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} & ،\ ^{-}١ \le \text{س} \le ٢ \\ ٤ & ،\ ٢ < \text{س} < ٣ \end{cases}$$

١ جد مجموعة قيم س للنقط الحرجة للاقتران ق(س).

٢ حدّد الاحداثيات السينية للقيم القصوى المحلية للاقتران ق(س).

الحل :

١ ق(س) اقتران متصل في [⁻١ ، ٣[

$$\text{ق̄(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} & ،\ ^{-}١ < \text{س} < ٢ \\ ٠ & ،\ ٢ < \text{س} < ٣ \end{cases}$$

أولاً: عندما س ∈]⁻١ ، ٢[نجعل ق̄(س) = ٠

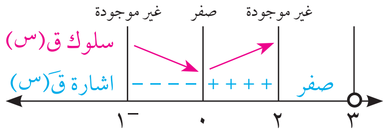
فيكون ٢س = ٠ ومنها عند س = ٠ يوجد نقطة حرجة

ثانياً: عندما ٢ < س < ٣ تكون ق̄(س) = ٠

وهذا يعني أنه عند كل س ∈]٢ ، ٣[يوجد نقطة حرجة

ق̄(٢) غير موجودة، ق̄(⁻١) غير موجودة

فتكون مجموعة قيم س للنقط الحرجة { ٠ ، ⁻١، [٢ ، ٣[}



٢ من إشارة ق̄(س) في الشكل المجاور يكون

عند س = ⁻١ يوجد قيمة عظمى محلية لأنها بداية تناقص

عند س = ٠ يوجد قيمة صغرى محلية

عند س = ٢ يوجد قيمة عظمى محلية

عند كل س ∈]٢ ، ٣[يوجد قيمة عظمى محلية وصغرى محلية في آن واحد.

نظرية القيم القصوى المطلقة:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب]

فإن ق(س) يتخذ قيمه القصوى المطلقة في الفترة [أ، ب].

مثال٨: جد أكبر قيمة وأصغر قيمة للاقتران $ق(س) = س\sqrt{٤ - س^{٢}}$

الحل : بحل المتباينة $٤ - س^{٢} \geq ٠$ ، نستنتج أن مجال ق(س) هو [−٢ ، ٢]

ق(س) متصل على [−٢ ، ٢] ، $قَ(س) = \frac{٤ - ٢س^{٢}}{\sqrt{٤ - س^{٢}}}$ ، س ∈]−٢ ، ٢[

وعندما قَ(س) = ٠ يكون $س = \sqrt{٢}$ ∈]−٢ ، ٢[

$س = -\sqrt{٢}$ ∈]−٢ ، ٢[

ويكون ق(−٢) = ٠ ، $ق(-\sqrt{٢}) = -٢$

$ق(\sqrt{٢}) = ٢$ ، ق(٢) = ٠

أصغر قيمة للاقتران هي $ق(-\sqrt{٢}) = -٢$

وأكبر قيمة للاقتران هي $ق(\sqrt{٢}) = ٢$

أي أن القيمة العظمى المطلقة هي $ق(\sqrt{٢}) = ٢$

والصغرى المطلقة هي $ق(-\sqrt{٢}) = -٢$

أتعلم:

إذا كان ق(س) متصلاً على فترة في مجاله، وكان له نقطة قيمة قصوى وحيدة فهي مطلقة في تلك الفترة.

تمارين ٢ - ٢

① جد النقط الحرجة للاقترانات الآتية:

أ $ق(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} - س^{٢} + \frac{١}{٣}$ ، س $\in [-٢ ، ٣]$

ب $ق(س) = س^{\frac{٢}{٣}}$ ، س $\in [-٨ ، ٨]$

② في التمارين من (أ - و) جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) (إن وجدت)

أ $ق(س) = س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢٤س$ ، س $\in$ ح

ب $ق(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$

جـ $ق(س) = (س^{٢} - ٣)هـ^{س}$ ، س $\in$ ح

د $ق(س) = \frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$ ، س $\neq ١$

③ جد أكبر وأصغر قيمة (إن وجدت) لكل من الاقترانات الآتية:

أ $ق(س) = \begin{cases} س^{٣} & ، \quad ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^{٢} + ٤ & ، \quad ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، س $\in [٠ ، ٣]$

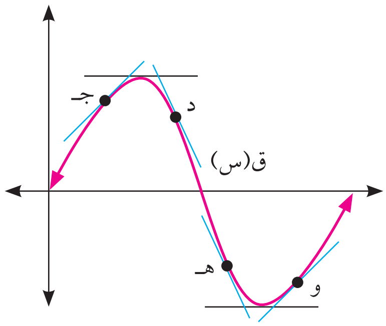
ب $ق(س) = هـ^{س} - هـ س$ ، س $\in [٠ ، ٣]$

جـ $ق(س) = جتاس - \frac{١}{٣}جتا^{٣}س$ ، س $\in \left[\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}\right]$

٢ - ٣ التقعّر و نقط الانعطاف (Concavity and Points of Inflection)

للعلمي فقط

نشاط: الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س)



① ما إشارة ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند كل من جـ ، د؟ (لاحظ أن مماسي الاقتران ق(س) عند جـ ، د يقعان فوق منحناه)

② ما إشارة ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند هـ ، و؟ (لاحظ أن مماسي الاقتران عند هـ ، و يقعان تحت منحناه).

تعريف:

يقال لمنحنى الاقتران ق(س) أنه مقعّر للأعلى في الفترة]أ، ب[إذا كان واقعاً فوق جميع مماساته في الفترة] أ، ب[وأنه مقعّر للأسفل في الفترة]أ، ب[إذا كان واقعاً تحت جميع مماساته في الفترة] أ، ب[.

اختبار التقعّر باستخدام المشتقة الثانية*:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة]أ ، ب[، وكان قً (س) معرفاً في الفترة]أ ،ب[فإن منحنى ق(س) يكون:

① مقعّراً للأعلى في الفترة]أ ، ب[إذا كانت قً(س) > ٠ لجميع قيم س ∈] أ،ب[.

② مقعّراً للأسفل في الفترة]أ ، ب[إذا كانت قً(س) < ٠ لجميع قيم س ∈] أ،ب[.

③ غير مقعّر للأعلى أو للأسفل في الفترة]أ ، ب[إذا كانت قً(س) = ٠ لجميع قيم س ∈] أ، ب[.

مثال ١ : جد مجالات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣س^{٢} – س^{٣} ، س ∈]–٢ ، ٥[

الحل : ق(س) متصل في]–٢ ، ٥[لأنه كثير حدود

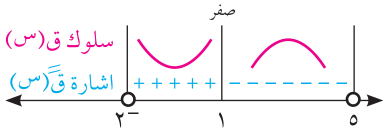
قَ(س) = ٦س – ٣س^{٢} ، قً(س) = ٦ – ٦س

بوضع قً(س) = ٠ تكون ٦ – ٦س = ٠ ، أي س = ١

---

* سيتم التعامل مع الفترات المفتوحة.

ومن إشارة قً(س) في الشكل المجاور
يكون منحنى ق(س) مقعّراً للأعلى
في الفترة]–٢، ١[، ومقعّراً للأسفل في الفترة]١ ، ٥[



مثال ٢ : جد مجالات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران $ق(س) = \frac{س^{٢} + ١}{س}$ ، $س \neq ٠$

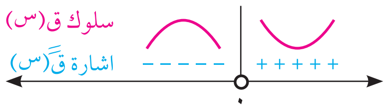
الحل :

ق(س) متصل على مجاله

$ق(س) = س + \frac{١}{س}$ ومنها $قَ(س) = ١ - \frac{١}{س^{٢}}$

$قً(س) = \frac{٢}{س^{٣}}$ ، $\neq ٠$ ،

ومن إشارة قً(س) في الشكل المجاور يكون:
منحنى ق(س) مقعّراً للأسفل في الفترة]$-\infty$ ، ٠[،
ومقعّراً للأعلى في الفترة]٠ ، ∞[..... (لماذا؟)



تعريف:

تسمى النقطة (جـ ،ق(جـ)) نقطة انعطاف للاقتران ق(س) إذا كان:

- ق(س) اقتراناً متصلاً عند س = جـ
- يغيِّر الاقتران اتجاه تقعّر منحناه عند س = جـ من الأعلى إلى الأسفل، أو العكس.

مثال ٣ : جد نقاط الانعطاف (إن وجدت) للاقتران ق(س) = ٣جاس جتاس ، س ∈]٠ ، π[

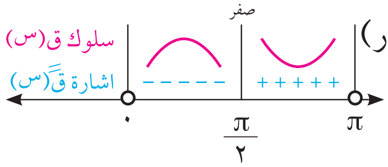
الحل :

$قَ(س) = {}^{-}٣جا^{٢}س + ٣جتا^{٢}س = ٣جتا٢س$ ، س ∈]٠ ، π[

$قً(س) = {}^{-}٦جا٢س$

نجعل قً(س) = ٠ فيكون ⁻٦جا٢س = ٠ ومنها $س = \frac{\pi}{٢}$

وبما أن ق(س) متصل عند $س = \frac{\pi}{٢}$ ، ويغيّر من
اتجاه تقعّره عندها (كما تشير إشارة قً(س) في الشكل المجاور)
فإن النقطة $(\frac{\pi}{٢} ، ق(\frac{\pi}{٢})) = (\frac{\pi}{٢} ، ٠)$ نقطة انعطاف



مثال ٤ : بيّن أنه لا يوجد للاقتران ق(س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ نقطة انعطاف في الفترة]−٣ ، ٣[

الحل : ق(س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ متصل في الفترة]−٣ ، ٣[

قَ(س) = $\dfrac{-س}{\sqrt{٩ - س^{٢}}}$ ، س ∈]−٣ ، ٣[(لماذا؟)

قً(س) = $\dfrac{-٩}{\sqrt{(٩ - س^{٢})^{٣}}}$ ≠ ٠ ، ∀ س ∈]−٣ ، ٣[

ولكن قً(س) > صفر دائماً (لماذا؟)

ومنها يكون منحنى ق(س) مقعّراً للأسفل في]−٣ ، ٣[
وبما أن ق(س) لا يغير من اتجاه تقعره، فلا يوجد نقاط انعطاف للاقتران ق(س) في]−٣ ، ٣[

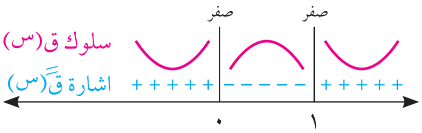
مثال ٥ : إذا كان ق(س) = س^{٤} − ٢س^{٣} ، س ∈ ح ، فجد فترات التقعّر للأعلى وللأسفل للاقتران ق(س)، ثم جد نقط الانعطاف (إن وجدت).

الحل : ق(س) متصل لأنه كثير حدود.

قَ(س) = ٤س^{٣} − ٦س^{٢} ، قً(س) = ١٢س^{٢} − ١٢س

بوضع قً(س) = ٠ ينتج أن س = ١ ، س = ٠

ومن إشارة قً(س) في الشكل المجاور يكون:



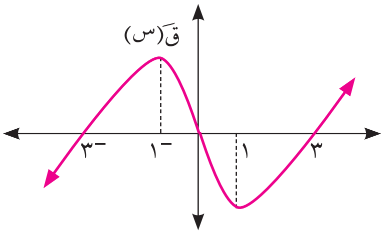
ق(س) مقعراً للأعلى في الفترة]−∞ ، ٠[،

وكذلك في الفترة]١ ، ∞[

ويكون مقعراً للأسفل في الفترة]٠ ، ١[

النقطتان (٠ ، ٠) ، (١ ، −١) هما نقطتا انعطاف ..... (لماذا؟)

مثال ٦ : الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران قَ(س) معتمداً عليه، جد كلاً مما يأتي:



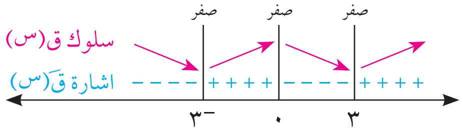
① فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

② القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

③ مجالات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س).

④ قيم س التي يكون عندها نقاط الانعطاف (إن وجدت) .

الحل : نمثل إشارة قَ(س) كما في الشكل المجاور:



① يكون منحنى ق(س)

متزايداً في [−٣ ، ٠] وفي [٣ ، ∞[

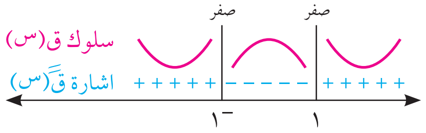
ومتناقصاً في]−∞ ، −٣] وفي [٠ ، ٣]

② ق(−٣) قيمة صغرى محلية

ق(٠) قيمة عظمى محلية

ق(٣) قيمة صغرى محلية.

ونمثل إشارة قً(س) كما في الشكل المجاور:



③ يكون منحنى ق(س) مقعّراً للأعلى

في]−∞ ، −١[وكذلك في]١ ، ∞[ومقعّراً للأسفل في]−١ ، ١[

④ نقاط الانعطاف تكون عند س = −١ ، س = ١ ..... (لماذا؟)

ملاحظة:

إذا كان ق(س) كثير حدود وكانت (س$_{١}$ ، ق(س$_{١}$)) نقطة انعطاف للاقتران ق(س)، فإن قً(س$_{١}$) = صفر.

اختبار المشتقة الثانية في تعيين القيم القصوى Second Derivative Test

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق في فترة مفتوحة تحوي جـ وكان قَ(جـ) = ٠ فإن:

① ق(جـ) قيمة عظمى محلية، إذا كانت قً(جـ) < ٠

② ق(جـ) قيمة صغرى محلية، إذا كانت قً(جـ) > ٠

③ يفشل تطبيق الاختبار إذا كانت قً(جـ) = ٠ ، أو قً(جـ) غير موجودة.

مثال ٧ : جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) = ٣س^{٤} − ٨س^{٣} + ٦س^{٢}، باستخدام اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن).

الحل : ق(س) متصل وقابل للاشتقاق في ح لأنه كثير حدود

قَ(س) = ١٢س^{٣} − ٢٤س^{٢} + ١٢س

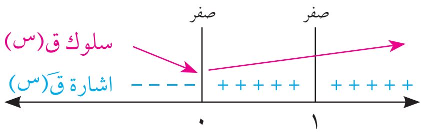
قَ(س) = ٠ ومنها ١٢س^{٣} − ٢٤س^{٢} + ١٢س = ٠

١٢س(س^{٢} − ٢س + ١) = ١٢س(س − ١)^{٢} = ٠ ، ومنها إمّا س = ٠ أو س = ١

قً(س) = ٣٦س^{٢} − ٤٨س + ١٢

قً(٠) = ١٢ > ٠ إذن ق(٠) = ٠ قيمة صغرى محلية.

بما أن قً(١) = ٠ فلا نستطيع تحديد نوع القيمة القصوى ق(١) باستخدام اختبار المشتقة الثانية لذا نلجأ إلى اختبار المشتقة الأولى.



من الشكل المجاور لا يوجد قيمة قصوى محلية عند س = ١ ..... (لماذا؟)

تمارين ٢ - ٣

① عيّن فترات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية:

أ ق′′(س) = ($س^{٢}$ − ٣س − ٤)(س + ٢) ، س ∈ ح

ب ق′(س) = جاس − س ، س ∈]$\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[

ج ق(س) = ٤$س^{٣}$ − $س^{٤}$ + س ، س ∈]٠ ، ٤[

د ق(س) = $(س - ٣)^{\frac{٣}{٢}}$ ، س $>$ ٣

هـ ق(س) = جا $\frac{س}{٢}$ ، س ∈]٠ ، π[

② حدد نقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية (إن وجدت):

أ ق(س) = $س^{٣}$ + س

ب ق(س) = جتاس ، س ∈]٠ ، ٢π[

ج ق(س) = $\sqrt[٣]{٥ - س}$

③ جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = $س^{٣}$ + ٦$س^{٢}$، وحدد نوعها باستخدام اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن تطبيقها)، وفي حالة عدم إمكانية تطبيقها استخدم اختبار المشتقة الأولى:

④ إذا كان للاقتران ق(س) = أ $س^{٢}$ + $س^{٣}$ نقطة انعطاف عند س = ⁻١ ، فجد قيمة/ قيم الثابت أ.

⑤ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [⁻٣ ، ٢] ويحقق الشروط الآتية:

ق(٠) = ٠ ، ق′(١) = ٠ ، ق′(⁻٢) = ٠ ، ق′′(س) $>$ ٠ عندما س $<$ ٠ ، ق′′(س) $<$ ٠ عندما س $>$ ٠

اعتمد على هذه المعلومات للإجابة عن الأسئلة الآتية:

أ حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س).

ب ما قيمة/ قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها قيم قصوى؟ وما نوع كل منها؟

ج ما قيمة/ قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها نقط انعطاف؟

٢ - ٤ تطبيقات عملية على القيم القصوى (Applications of Extrema)

للعلمي فقط

مثال ١ : عددان موجبان مجموعهما ٦٠، جد العددين إذا كان حاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

الحل : نفرض أن العددين هما س ، ص وأن حاصل ضربهما هو م فيكون

$م = س \times ص$

لكن $س + ص = ٦٠$ ومنه $ص = ٦٠ - س$

$م = س \times ص = س \times (٦٠ - س) = ٦٠س - س^٢$

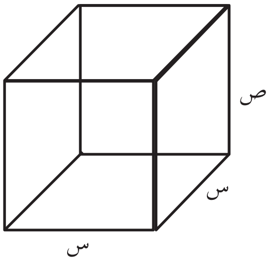
$م' = ٦٠ - ٢س$

نجعل $م' = ٠$ ومنها $٦٠ - ٢س = ٠$ أي $س = ٣٠$

للتحقق $م'' = -٢$ ومنها $م''\Big|_{س = ٣٠} = -٢ < ٠$

(عند س = ٣٠ يكون حاصل الضرب أكبر ما يمكن).

فيكون العددان هما ٣٠ ، ٣٠



مثال ٢ : يراد صنع صندوق هدايا قاعدته مربعة الشكل من الكرتون المقوى حجمه ٨ $دسم^٣$، جد أبعاده بحيث تكون تكلفة تصنيعه أقل ما يمكن. (سعر المتر المربع ثابت)

الحل : نفرض طول ضلع قاعدة الصندوق (س دسم) وارتفاعه(ص دسم)

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

$ح = س^٢ص$ ومنها $س^٢ص = ٨$

المساحة الكلية للصندوق = مساحة الجوانب الأربعة + مساحة القاعدتين

$ت = ٤س \times ص + ٢س^٢$ ، لكن $ص = \frac{٨}{س^٢}$

ومنها $ت = ٤س \times \frac{٨}{س^٢} + ٢س^٢ = \frac{٣٢}{س} + ٢س^٢$

وبالاشتقاق ينتج أن: $ت' = \frac{-٣٢}{س^٢} + ٤س$ وبوضع $ت' = ٠$

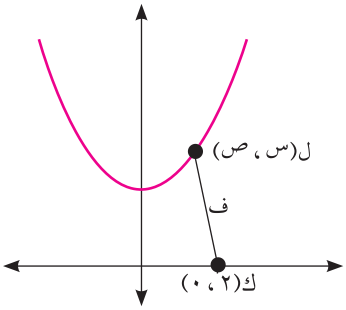
$\frac{٣٢}{س^٢} = ٤س$ ، أي أن $س^٣ = ٨$ ، ومنها $س = ٢$دسم

$تً = \frac{٦٤}{س^٣} + ٤$

ومنها $تً \Big|_{س = ٢} = \frac{٦٤}{٨} + ٤ = ١٢ > ٠$ (صغرى محلية وحيدة فهي صغرى مطلقة)

التكلفة تكون أقل ما يمكن عندما تكون قاعدة الصندوق مربعةً طول ضلعها ٢دسم، وارتفاع الصندوق ٢ دسم.

مثال ٣ : جد أقصر مسافة بين النقطة ك (٢ ، ٠) ومنحنى العلاقة $ص^٢ - س^٢ = ٨$



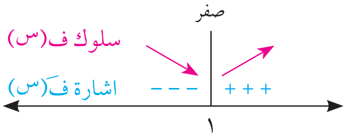
الحل : نفرض النقطة ل(س ، ص) على منحنى العلاقة

ونفرض ف = المسافة بين ك ، ل

حسب قانون المسافة بين نقطتين $ف = \sqrt{(س - ٢)^٢ + ص^٢}$

لكن $ص^٢ = س^٢ + ٨$ ، فتكون $ف = \sqrt{٢س^٢ - ٤س + ١٢}$

$فَ = \frac{٤س - ٤}{٢\sqrt{٢س^٢ - ٤س + ١٢}}$



بوضع فَ = ٠ ينتج أن س = ١ ..... (لماذا؟)

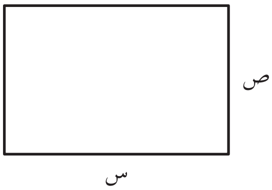
ومن إشارة فَ في الشكل المجاور

تكون المسافة أقصر ما يمكن عندما س = ١ ، ص = ±٣

ولأن للاقتران قيمة قصوى وحيدة فهي صغرى مطلقة

وتكون أقصر مسافة هي $ف = \sqrt{١٠}$ وحدة.

مثال ٤ : أوجد أقل محيط ممكن لمستطيل مساحته ١٦ سم^٢



الحل : نفرض طول المستطيل (س سم) وعرضه (ص سم)

مساحة المستطيل م = س ص = ١٦ ومنها $ص = \frac{١٦}{س}$

محيط المستطيل $\text{ح} = \text{٢س} + \text{٢ص}$ ومنها يكون $\text{ح} = \text{٢س} + \frac{\text{٣٢}}{\text{س}}$

$\text{حَ} = \text{٢} - \frac{\text{٣٢}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ وعندما $\text{حَ} = \text{٠}$ يكون $\text{٢} - \frac{\text{٣٢}}{\text{س}^{\text{٢}}} = \text{٠}$ ومنها $\text{س} = \text{٤}$

$\text{حً} = \frac{\text{٦٤}}{\text{س}^{\text{٣}}}$ ومنها $\text{حً(٤)} = \text{١}$ (موجب) ⟵ المحيط أقل ما يمكن

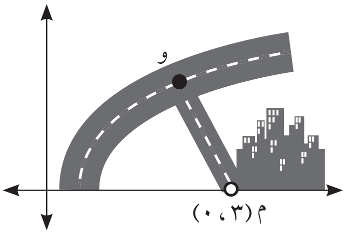
فيكون أقل محيط للمستطيل هو ١٦ سم

تمارين ٢ - ٤

١ يريد رجل عمل حديقة مستطيلة الشكل في أرضه، وذلك بإحاطتها بسياج، فإذا كان لديه ٨٠ متراً من الأسلاك، فما مساحة أكبر حديقة يمكن للرجل إحاطتها؟

٢ مقلمة على شكل أسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى سعتها ١٩٢ π سم$^{\text{٣}}$ فإذا علمت أن سعر كل ١ سم$^{\text{٢}}$ من البلاستيك المستخدم لصنع القاعدة، يعادل ثلاثة أمثال سعر ١ سم$^{\text{٢}}$ من البلاستيك المستخدم في صنع الجوانب، جد أبعاد المقلمة ذات الأقل تكلفة.

٣ طريق منحنٍ معادلته في المستوى الديكارتي هي $\text{ص} = \text{ق(س)} = \sqrt{\text{٢س} - \text{١}}$ ، النقطة م(٣ ، ٠) تمثل موقع مستشفى، يراد شق شارع فرعي مستقيم من النقطة (و) إلى موقع المستشفى(م)، عيّن إحداثيات النقطة (و) ليكون طول الشارع (و م) أقل ما يمكن . (انظر الشكل المجاور).



٤ جسم يسير في خط مستقيم بحيث إن بعده ف بالأمتار بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة
$\text{ف} = \text{أ جتا} \frac{\pi}{\text{٤}}\text{ن} + \text{ب جا} \frac{\pi}{\text{٤}}\text{ن}$ فإذا كانت السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [٠ ، ٢] هي ١٠ م/ ث، وكانت سرعة الجسم أقل ما يمكن عند ن = ١ ث. احسب الثابتين أ ، ب.

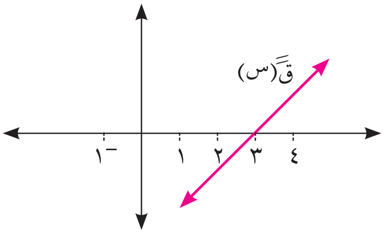
٥ جد حجم أكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢ سم، ونصف قطر قاعدته ٤ سم.

ورقة عمل (١)

١ إذا كان ق(س) ، هـ(س) كثيري حدود معرفين في الفترة [٠، ٤]، بحيث إن منحنى ق(س) متناقص في مجاله، ويقع في الربع الرابع، ومنحنى هـ(س) متزايد في مجاله، ويقع في الربع الأول، أثبت أن منحنى الاقتران ق(س) × هـ(س) متناقص في الفترة [٠، ٤].

٢ إذا كان ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + ٩س + ١ ، أ ،ب ∈ ح اقتران له قيمة عظمى محلية عند س = ١، وقيمة صغرى محلية عند س = ٣ ما قيمة كل من الثابتين أ ، ب؟

٣ الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق''(س)



إذا علمت أن ق'(٠) = ق'(٦) = ٠ ، جد كلاً مما يأتي:

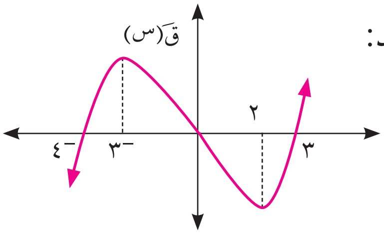
أ فترات التقعّر، ونقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س)

ب القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

جـ فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س)

٤ أ ب جـ د مستطيل عرضه أب = ٨ سم وطوله ب جـ = ١٠ سم، م نقطة على الضلع أ ب بحيث أ م = س سم ، ن نقطة على الضلع ب جـ بحيث ن جـ = $\frac{٣}{٢}$ س سم، جد قيمة س بحيث تكون مساحة المثلث م ن جـ أكبر ما يمكن.

٥ معتمداً على الشكل المجاور، الذي يمثل منحنى الاقتران ق'(س) جد:



أ فترات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س).

ب الإحداثيات السينية لنقط الانعطاف.

٦ سلك طوله ١٨ سم، صنع منه مثلثان كل منهما متساوي الأضلاع، ما طول ضلع كل من المثلثين ليكون مجموع مساحتيهما أصغر ما يمكن؟

٢ - ٥ المصفوفة (Matrix)*

تعريف:

المصفوفة هي تنظيم مستطيل الشكل لمجموعة من الأعداد، على هيئة صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين [ ] ويرمز لها بأحد الأحرف أ ، ب ، .... وتسمى الأعداد داخل المصفوفة مدخلات.

تتحدد رتبة المصفوفة بعدد الصفوف وعدد الأعمدة فيها، على النحو م × ن حيث م يمثل عدد صفوفها، ن يمثل عدد أعمدتها (وتقرأ م في ن).

عدد مدخلات المصفوفة = عدد صفوفها × عدد أعمدتها.

الصورة العامة للمصفوفةمن الرتبة م × ن تكون على النحو:

$$\text{أ}_{\text{م×ن}} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{\text{١١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & ..(\text{أ}_{\text{١هـ}}).. & \text{أ}_{\text{١ن}} \\ \text{أ}_{\text{١٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & .... & \text{أ}_{\text{٢ن}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\text{أ}_{\text{ي١}}) & (\text{أ}_{\text{ي٢}}) & ..(\text{أ}_{\text{ي هـ}}).. & \text{أ}_{\text{ي ن}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{أ}_{\text{م١}} & \text{أ}_{\text{م٢}} & .... & \text{أ}_{\text{م ن}} \end{bmatrix}$$

وتتحدد أي مدخلة فيها بحسب الصف والعمود الواقعة فيهما، فالمدخلة التي تقع في تقاطع الصف ي مع العمود هـ هي المدخلة $\text{أ}_{\text{ي هـ}}$.

مثال ١ : إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ^-٢ \\ ٥ & ١ \\ ٧ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ^-٥ & ٦ \\ ١ & ٤ & ٨ \end{bmatrix}$

① جد رتبة كل من المصفوفتين أ ، ب ② جد $\text{أ}_{\text{٢١}}$ ، $\text{ب}_{\text{١٢}}$

الحل :

① المصفوفة أ تتكون من ٣ صفوف وعمودين فهي من الرتبة ٣ × ٢

والمصفوفة ب من الرتبة ٢ × ٣

② قيمة المدخلة $\text{أ}_{\text{٢١}} = {}^-٢$ ، $\text{ب}_{\text{١٢}} = ١$

---

* أول من قدم المصفوفات بصورتها الحالية هو العالم الرياضي A .A. Cayley عام ١٨٥٧م.

أنواع خاصة من المصفوفات:

١ المصفوفة المربعة: هي المصفوفة التي يكون عدد صفوفها = عدد أعمدتها = ن، وتسمى عندئذ مصفوفة مربعة من الرتبة ن.

٢ مصفوفة الوحدة: ويرمز لها بالرمز (م) وهي مصفوفة مربعة، وتكون مدخلاتها على النحو الآتي:

$$م_{ي هـ} = \begin{cases} ١ ، & ي = هـ \\ ٠ ، & ي \neq هـ \end{cases}$$

فمثلاً $م_{٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $م_{٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ وهكذا ...

٣ المصفوفة الصفرية (و): هي المصفوفة التي جميع مدخلاتها أصفار، مثل $و_{٢ \times ٣} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٤ مصفوفة الصف: هي المصفوفة المكونة من صف واحد مثل $ص = \begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٤ \end{bmatrix}$

٥ مصفوفة العمود: هي المصفوفة المكونة من عمود واحد مثل $جـ = \begin{bmatrix} ٨ \\ ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$

مثال ٢ : لديك المصفوفات $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ & -٨ \\ ١ & ٥ & ٩ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٨ \\ ٢ \\ ٥ \end{bmatrix}$

١ ما نوع المصفوفة جـ؟

٢ هل ب مصفوفة وحدة؟

٣ ما مجموع مدخلات العمود الثاني من المصفوفة أ ؟

الحل :

١ المصفوفة جـ هي مصفوفة عمود.

٢ المصفوفة ب ليست مصفوفة وحدة. (لماذا؟)

٣ مجموع مدخلات العمود الثاني من المصفوفة أ يساوي ٢

نشاط ٢: كوّنت ياسمين المصفوفة ك من الرتبة ٣ × ٣ حسب الشروط الآتية

$$ك_{يهـ} = \begin{cases} ي + هـ &، \quad ي < هـ \\ ي - هـ &، \quad ي > هـ \\ \dfrac{ي}{ي + هـ} &، \quad ي = هـ \end{cases}$$

فكانت قيمة المدخلة $ك_{١٢}$ = ١، قيمة المدخلة $ك_{٢١}$ = ... ، $\sum\limits_{ي=١}^{٣} ك_{ي٣}$ = ...

مدخلات القطر الرئيسي هي ....

تساوي مصفوفتين

تعريف:

تتساوى المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية.

وبالرموز نقول أن أ = ب إذا وفقط إذا كان $أ_{يهـ} = ب_{يهـ}$ لجميع قيم ي ، هـ .

مثال ٣ : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٣ & س \\ \sqrt{ع} & ص^{٢} \end{bmatrix}$

① هل أ = ب؟ ولماذا؟

② جد قيم س، ص، ع التي تجعل أ = جـ

الحل :

① أ ≠ ب لأن $أ_{١١} \neq ب_{١١}$

② بما أن أ = جـ ، فتكون مدخلاتهما المتناظرة متساوية، ومنها س = ٢ ، $ص^{٢}$ = ٤

أي أن ص = ±٢ وكذلك $\sqrt{ع}$ = ٥ ومنها ع = ٢٥.

تمارين ٢ - ٥

① إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ & -٤ \\ ٦ & ٢ & \text{س} \\ ١ & -\text{س} & ٧ \\ ٣ & ٢٠ & ٧ \end{bmatrix}$ فجد:

أ رتبة المصفوفة أ

ب قيمة $(\text{أ}_{٣١} + \text{أ}_{١٢})$

جـ قيمة س بحيث إن: $(\text{أ}_{٢٣})^{٣} = ٢٧$

② إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢ & \text{س}^{٢} + ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١٠ \\ ٥ & \text{س} - ١ \end{bmatrix}$، فجد قيمة / قيم س.

٢ - ٦ العمليات على المصفوفات (Operations on Matrices)

أولاً: جمع المصفوفات:

تعريف:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين من الرتبة م × ن، فإن جـ = أ + ب هي مصفوفة من الرتبة م × ن مدخلاتها ناتجة من جمع المدخلات المتناظرة في كل من أ ، ب أي أن: جـ$_{\text{ي هـ}}$ = أ$_{\text{ي هـ}}$ + ب$_{\text{ي هـ}}$

مثال ١ : إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} -٧ & ٥ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ع = $\begin{bmatrix} -٣ & ٧ & ٥ \\ ٢ & ١ & ٦ \end{bmatrix}$

جد ناتج ما يأتي (إن أمكن) ① س + ص ② ص + س ③ ص + ع

الحل :

① س + ص = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٧ & ٥ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ + -٧ & ٢ + ٥ \\ ٤ + -٤ & ٥ + ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & ٧ \\ ٠ & ٨ \end{bmatrix}$

② ص + س = $\begin{bmatrix} -٧ & ٥ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & ٧ \\ ٠ & ٨ \end{bmatrix}$ (ماذا تلاحظ؟)

③ ص + ع غير معرفة؛ لأن رتبة ص ≠ رتبة ع.

• • •

ثانيًا: ضرب المصفوفة بعددٍ حقيقيٍ

تعريف:

إذا كانت أ مصفوفةً من الرتبة م × ن ، وكان ك عدداً حقيقياً، فإن ك أ = جـ ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م × ن، وتكون مدخلاتها على النحو: جـ$_{\text{ي هـ}}$ = ك أ$_{\text{ي هـ}}$ لجميع قيم ي ، هـ.

مثال ٢ : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -٣ & ٤ & ١ \\ -٢ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فجد ① ٢أ ② ‎-أ ③ أ + (‎-أ)

الحل :

① ٢أ = $\begin{bmatrix} ٢ \times -٣ & ٢ \times ٤ & ٢ \times ١ \\ ٢ \times -٢ & ٢ \times ٠ & ٢ \times ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & ٨ & ٢ \\ -٤ & ٠ & ١٠ \end{bmatrix}$

② $-\text{أ} = (-١)\text{أ} = -١ \begin{bmatrix} -٣ & ٤ & ١ \\ -٢ & ٠ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٤ & -١ \\ ٢ & ٠ & -٥ \end{bmatrix}$

③ $\text{أ} + (-\text{أ}) = \begin{bmatrix} -٣ & ٤ & ١ \\ -٢ & ٠ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & -٤ & -١ \\ ٢ & ٠ & -٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ (فسّر الإجابة).

• • •

مثال ٣ : إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} -٤ & ٣ \\ ٣ & ٧ \end{bmatrix}$ فجد ٣أ + ٢ب

الحل : $٣\text{أ} + ٢\text{ب} = ٣ \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} + ٢ \begin{bmatrix} -٤ & ٣ \\ ٣ & ٧ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٦ & -٣ \\ ١٥ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٨ & ٦ \\ ٦ & ١٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٢١ & ١٧ \end{bmatrix}$

• • •

ثالثاً: طرح المصفوفات

تعريف:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين من نفس الرتبة م × ن ، فإن أ – ب = أ + (– ب)

مثال ٤ : إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ فجد المصفوفة ب – أ

الحل : $\text{ب} - \text{أ} = \text{ب} + (-\text{أ}) = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$

أو : $\text{ب} - \text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ - ٣ & ٣ - -٢ \\ ٠ - ١ & ٥ - ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$

لاحظ أن مدخلات ب – أ تنتج من طرح مدخلات المصفوفة أ من المدخلات المناظرة لها في المصفوفة ب

خصائص جمع المصفوفات وضربها بعددٍ حقيقيٍّ:

إذا كانت (أ ، ب ، جـ ، و) مصفوفات من نفس الرتبة، ك ∋ ح فإن:

١ أ + ب = ب + أ .... (الخاصيّة التبديلية)

٢ (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) .... (الخاصيّة التجميعية)

٣ أ + و = و + أ = أ .... (المصفوفة الصّفّرية المحايدة لعملية جمع المصفوفات)

٤ أ + (−أ) = (−أ) + أ = و .... (النظير الجمعي)

٥ ك (أ + ب) = ك أ + ك ب .... (توزيع الضرب بعدد حقيقي على جمع المصفوفات)

مثال ٥ : حل المعادلة المصفوفية س + $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & -٣ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$

الحل : بإضافة النظير الجمعي للمصفوفة $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ إلى طرفي المعادلة تصبح:

$$\left(س + \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & -٣ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$$

ومنها س + $\left(\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ٦ & -٣ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$

أي أن س + و = $\begin{bmatrix} ٨ & -٦ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ومنها س = $\begin{bmatrix} ٨ & -٦ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$

تدريبات:

١ أ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ٥ \\ ١ & ٦ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٤ & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٨ \end{bmatrix}$ ، فجد ب + ٢أ ، ٣أ − ٢ب

ب إذا كانت جـ = $\begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، د = $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$ فبيّن أن: جـ + د = ٩ $م_٢$

٢ حل المعادلة المصفوفية: ٢ $\begin{bmatrix} ١ & -٥ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ − ٣س = س + $م_٢$

٣ إذا كانت جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ فجد المصفوفة أ بحيث: ٢أ + جـ = و

رابعًا: ضرب المصفوفات (Matrix Multiplication)

تعريف:

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م × ن، ب مصفوفة من الرتبة ن × ل، فإن حاصل الضرب أ . ب = جـ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م × ل ، وتكون مدخلات المصفوفة جـ على النحو

$$جـ_{يهـ} = أ_{ي١} \times ب_{١هـ} + أ_{ي٢} \times ب_{٢هـ} + \ldots + أ_{ين} \times ب_{نهـ}$$

مثال ٦ : لتكن أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١^- & ٣ \\ ٠ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٦ & ٣^- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

فأي العمليات الآتية تكون معرفة: ① أ . جـ ② أ . ب ③ ب . جـ

الحل :

① أ من الرتبة ٢ × ٣ ، جـ من الرتبة ٢ × ٢، فإن أ . جـ غير معرفة. (لماذا؟)

② أ . ب معرفة لأن عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب.

③ ب . جـ معرفة أيضاً. (لماذا؟)

مثال ٧ : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣^- \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٢^- & ٩ & ٥^- \end{bmatrix}$ فجد (إن أمكن):

① أ . جـ ② جـ . أ

الحل :

① بما أن رتبة أ هي ٢×٢ ، رتبة جـ هي ٢×٣

فإنه يمكن إيجاد ناتج الضرب على النحو أ . جـ =

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٢^- & ٩ & ٥^- \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٥ & ٣^- \\ ٦ & ١ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٢^-\times٥ + ٢\times٣^- & ٩\times٥ + ١\times٣^- & ٥^-\times٥ + ٤\times٣^- \\ ٢^-\times٦ + ٢\times١ & ٩\times٦ + ١\times١ & ٥^-\times٦ + ٤\times١ \end{bmatrix} =$$

$$ل = \begin{bmatrix} ١٦^- & ٤٢ & ٣٧^- \\ ١٠^- & ٥٥ & ٢٦^- \end{bmatrix} =$$

لاحظ أن المدخلة $ل_{٢١}$ = ٤٢ ، ناتجة من ضرب مدخلات الصف الأول من أ مع ما يناظرها من مدخلات العمود الثاني من جـ.

② لا يمكن إيجاد حاصل الضرب جـ . أ (لماذا؟)

نشاط: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ، فجد(إن أمكن) كلاً من: أ . ب ، ب . أ

① أ . ب = $\begin{bmatrix} ٢٩ & ٤١ \\ ٤- & ٦- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix}$

② ب . أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$ = ... ماذا تستنتج؟

مثال ٨ : لتكن أ مصفوفةً من الرتبة ٢ × ن، ب مصفوفةً من الرتبة ٥ × ك

فما قيم كل من ن، ك التي تجعل أ . ب ، ب . أ معرفتين؟

الحل : حتى يكون أ . ب معرفاً فإن قيمة ن = ٥، وليكون ب . أ معرفاً فإن قيمة ك = ٢(لماذا؟)

مثال٩: جد ناتج $\begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} . \left(\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١- & ٣ & ٢ \end{bmatrix} \right)$

الحل : $\begin{bmatrix} ٤٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١٣ & ١١ \end{bmatrix}$ ، ما رتبة المصفوفة الناتجة؟

خصائصُ عملية الضّرب على المصفوفات:

إذا كانت أ ، ب، جـ مصفوفات حيثُ أن عمليتي الضرب والجمع معرفتان، م المصفوفة المحايدة، ك ∈ ح فإنّ:

① (أ . ب) . جـ = أ . (ب . جـ) .... الخاصيّة التجميعيّة.

② أ . (ب + جـ) = (أ . ب) + (أ . جـ) .... توزيع الضّرب على الجمع من اليمين .

③ (أ + ب) . جـ = (أ . جـ) + (ب . جـ) .... توزيع الضّرب على الجمع من اليسار.

④ أ . م = م . أ = أ .... (العنصر المحايد لعملية ضرب المصفوفات).

⑤ ك (أ . ب) = (ك أ) . ب = أ . (ك ب)

تمارين ٢ - ٦

① إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث أن أ . ب =جـ فما رتبة ب في كل ممايلي:

أ) أ$_{٢\times٥}$ ، جـ$_{٢\times٤}$

ب) أ$_{٣\times٣}$ ، جـ$_{٣\times٥}$

② إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & -٢ \\ ٤ & ٠ & ٧ \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٣ & ٥ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ فجد ما يأتي:

أ) أ . ب

ب) جـ . ب

جـ) أ^{٢}

③ جد قيم س ، ص بحيث $\begin{bmatrix} ٣ & س & ٥ \\ -١ & ٤ & -٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٤ & ص \\ ٥ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠ & ٦٤ \\ ٥ & -٣٤ \end{bmatrix}$

④ إذا كانت س $= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ص $= \begin{bmatrix} ٧ & ٨ \end{bmatrix}$ فبيّن أن: س = ٥ص

⑤ إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، فهل يمكن إيجاد قيمة/ قيم س بحيث إن: أ^{٢} = ب؟

٢ – ٧ المحدّدات (Determinants)

للمحددات كثير من التطبيقات والاستخدامات في مجالات عدة، في الجبر والهندسة ، فالمحدد يمثل اقتراناً يربط كل مصفوفةٍ مربعةٍ بعددٍ حقيقي، ويفاد منه في حل أنظمة المعادلات، وفي إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة، وسوف تقتصر دراستنا في هذا الدرس على إيجاد محدد المصفوفات المربعة من الرتبة الأولى، والثانية، والثالثة فقط.

تعريف:

إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً فإننا نرمز لمحددها بالرمز | أ | :

① إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} \end{bmatrix}$ فإن $|\text{أ}| = \text{أ}_{١١}$

② إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{bmatrix}$ فإن $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix} = \text{أ}_{١١} \times \text{أ}_{٢٢} - \text{أ}_{٢١} \times \text{أ}_{١٢}$

③ إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{bmatrix}$

فإن $|\text{أ}| = \text{أ}_{١١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} - \text{أ}_{٢١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} + \text{أ}_{٣١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} \end{vmatrix}$

مثال ١ : إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} {}^{-}١ & {}^{-}٢ \\ {}^{-}٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فجد: ❶ |أ| ، |ب| ❷ |أ + ب|

الحل :

① $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} = ٢ \times ١ - ٥ \times ٣ = {}^{-}١٣$

$|\text{ب}| = \begin{vmatrix} {}^{-}١ & {}^{-}٢ \\ {}^{-}٤ & ٣ \end{vmatrix} = {}^{-}١ \times ٣ - ({}^{-}٤) \times ({}^{-}٢) = {}^{-}١١$

② $\text{أ} + \text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $|\text{أ} + \text{ب}| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = ٤ - ١ = ٣$ (ماذا تلاحظ؟)

نظرية:

إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً من الرتبة الثالثة، فإنه يمكن إيجاد | أ | بدلالة مدخلات أي صف، أو أي عمود وذلك بضربها بالمحدد الناتج من تصور شطب الصف ي والعمود هـ، وإعطاء إشارة لحاصل الضرب وَفْق القاعدة $(-١)^{ي+هـ}$

مثال ٢ : جد $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ & ١ \\ ٤ & -٥ & ٢ \\ ١ & ٦ & ٧ \end{vmatrix}$ باستخدام التعريف

الحل : بالتعريف يكون $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ & ١ \\ ٤ & -٥ & ٢ \\ ١ & ٦ & ٧ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} -٥ & ٢ \\ ٦ & ٧ \end{vmatrix} - -٣ \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ١ & ٧ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ٤ & -٥ \\ ١ & ٦ \end{vmatrix} = ١٣$

مثال ٣: جد قيمة س بحيث $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & س & ١ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{vmatrix} = ٢٠$

الحل : نجد قيمة المحدد بدلالة مدخلات الصف الثالث، حيث يحوي أصفاراً.

أي أن $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & س & ١ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{vmatrix} = ٥(-١)^{٣+٣} \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & س \end{vmatrix} = ٢٠$

ومنها ٥(س − ٤) = ٢٠ أي س = ٨

فكّر وناقش:

ما قيمة محدد المصفوفة المربعة التي تحتوي على صفٍ، أو عمودٍ، كل مدخلاته أصفار؟

نشاط: إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ فإن:

① قيمة $|أ|$ = ...

② $|٢أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٦ & ٨ \end{vmatrix} = ٢ \times ٨ - ٦ \times ٤ = -٨ = ٤ |أ| = (٢)^٢ |أ|$

③ $|-٣أ|$ = ...

④ $|ك أ|$ = ...

قاعدة (١):

إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً من الرتبة ن ، فإن $|ك أ| = ك^{ن} |أ|$، حيث ك ∈ ح

مثال ٤ : إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً، وكان $|أ| = ٥$، $|٢أ| = ٤٠$، فما رتبة المصفوفة أ؟

الحل : نفرض أن أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن، وبما أن $|٢أ| = ٤٠$ فإن $٢^{ن} |أ| = ٤٠$

ومنها $٢^{ن} \times ٥ = ٤٠$ أي أن $٢^{ن} = ٨$ ومنها ينتج أن: ن = ٣

أي أن أ مصفوفة مربعة من الرتبة ٣

قاعدة (٢):

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة ن فإن $|أ . ب| = |أ| \times |ب|$

مثال ٥ : إذا كان أ = $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & -٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$، فجد $|أ . ب|$

الحل : $|أ| = \begin{vmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & -٥ \end{vmatrix} = ١٠ - ١٢ = -٢$

وكذلك $|ب| = \begin{vmatrix} ١ & -٤ \\ -٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ - ١٢ = -١٠$

ومنه $|أ . ب| = |أ| \times |ب| = -٢ \times -١٠ = ٢٠$

هل يمكنك إيجادها بطريقة أخرى؟

تمارين ٢ – ٧

① جد قيمة كل من المحددات الآتية :

أ $\begin{vmatrix} -٤ & ٣ & ٢ \\ ٦ & ٥ & ١ \\ -٤ & ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ ب $\begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ ٤ & ٨ \end{vmatrix}$ جـ $|٥م_٣|$

② حل المعادلة الآتية: $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٤ & س & ٥ \\ ١ & ٦ & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & -١ \\ ١ & س \end{vmatrix}$

③ إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية بحيث إن: $|٣أ| = ٥٤$ ، $|أ\,.\,ب| = -١٢$

فما قيمة $|٢أ| + |٥ب|$ ؟

٢ - ٨ النظير الضربي للمصفوفة المربعة (Inverse of a Square Matrix)

عرضنا في درس سابق المصفوفة المحايدة (م) في عملية ضرب المصفوفات، وتعرّفنا إلى خاصية مهمة من خصائص ضرب المصفوفات، وهي أ . م = م . أ = أ حيث أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن.

تعريف:

تسمى المصفوفة المربعة أ مصفوفةً غير منفردةٍ إذا وجدت مصفوفة مربعة ب من نفس الرتبة بحيث أ . ب = ب . أ = م، وتسمى المصفوفة ب نظيراً ضربياً للمصفوفة أ، ونرمز لها بالرمز $أ^{-١}$ ونكتب ($ب = أ^{-١}$) ويكون $أ . أ^{-١} = أ^{-١} . أ = م$

مثال ١ : إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ فبيّن فيما إذا كانت $ب = أ^{-١}$

الحل :

$$أ . ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = م_٢$$

$$ب . أ = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = م_٢$$

ومنها $ب = أ^{-١}$ (لماذا؟)

● ● ●

تعريف:

المصفوفة المنفردة هي المصفوفة المربعة التي لا يوجد لها نظير ضربي.

نظرية:

المصفوفة أ منفردة إذا وفقط إذا كان | أ | = ٠

مثال ٢ : أي المصفوفات الآتية منفردة وأيها غير منفردة؟ $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ ٤ & ٨ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ٦ & ٢ & ٤ \\ ٥ & ٣ & -١ \end{bmatrix}$

الحل :

$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ ٤ & ٨ \end{vmatrix} = ٣٢ \neq$ صفر ، ومنها تكون المصفوفة أ غير منفردة.

$|ب| = \begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ٦ & ٢ & ٤ \\ ٥ & ٣ & -١ \end{vmatrix} = ٠$ أي أن المصفوفة ب منفردة.

● ● ●

مثال ٣ : جد قيمة س التي تجعل المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} \text{٨} & \text{٢} \\ \text{(س+١)} & \text{٣} \end{bmatrix}$ منفردة.

الحل : $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{٨} & \text{٢} \\ \text{(س+١)} & \text{٣} \end{vmatrix}$ = ٢(س + ١) − ٢٤

وبما أن أ مصفوفة منفردة فيكون |أ| = ٠

٢(س + ١) − ٢٤ = ٠

٢س + ٢ − ٢٤ = ٠   ومنها س = ١١

خصائص النظير الضربي:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين، وغير منفردتين، ومن نفس الرتبة ، وكان ك عدداً حقيقياً ≠ ٠، فإن:

① $(\text{أ}^{-١})^{-١} = \text{أ}$
② $(\text{ك أ})^{-١} = \frac{\text{١}}{\text{ك}} (\text{أ}^{-١})$
③ $(\text{أ . ب})^{-١} = \text{ب}^{-١} . \text{أ}^{-١}$

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة:

سوف نتعرف على طرق إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة، وستقتصر دراستنا على النظير الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية فقط.

مثال ٤ : جد النظير الضربي للمصفوفة أ = $\begin{bmatrix} \text{٣} & \text{٥} \\ \text{٤} & \text{٦} \end{bmatrix}$ (إن وجد).

الحل : نفرض أن: $\text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{bmatrix}$

$\text{أ . أ}^{-١} = \text{م}_{٢}$ أي $\begin{bmatrix} \text{٠} & \text{١} \\ \text{١} & \text{٠} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{٣} & \text{٥} \\ \text{٤} & \text{٦} \end{bmatrix}$

ومنها $\begin{bmatrix} \text{٠} & \text{١} \\ \text{١} & \text{٠} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٥ص+٣ل} & \text{٥س+٣ع} \\ \text{٦ص+٤ل} & \text{٦س+٤ع} \end{bmatrix}$

كما أن $أ^{-١} . أ = م_{٢}$ أي $\begin{bmatrix} ص & س \\ ل & ع \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ٣س+٤ص & ٥س+٦ص \\ ٣ع+٤ل & ٥ع+٦ل \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

وبحل المعادلات الناتجة من تساوي المصفوفتين في الحالتين السابقتين:

ينتج أن: س = ٢ ، ع = ⁻٣ ، ص = $\frac{⁻٣}{٢}$ ، ل = $\frac{٥}{٢}$

أي أن: $أ^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{⁻٣}{٢} & ٢ \\ \frac{٥}{٢} & ⁻٣ \end{bmatrix}$ (تحقق من ذلك)

تعميم:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{bmatrix}$ مصفوفةً غير منفردةٍ فإن $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|}\begin{bmatrix} -أ_{٢١} & أ_{٢٢} \\ أ_{١١} & -أ_{١٢} \end{bmatrix}$

أي أن: $أ^{-١}$ تنتج من ضرب المصفوفة أ بمقلوب محددها بعد تبديل أماكن مدخلات القطر الرئيسي وتغيير إشارة مدخلات القطر الآخر من المصفوفة أ .

مثال ٥ : إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ⁻١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فجد $س^{-١}$ (إن أمكن).

الحل : $|س| = ⁻٢ - ٦ = ⁻٨ \neq ٠$

المصفوفة س لها نظير ضربي، وتكون $س^{-١} = \frac{١}{⁻٨}\begin{bmatrix} ⁻٢ & ⁻١ \\ ٢ & ⁻٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٤} & \frac{١}{٨} \\ \frac{⁻١}{٤} & \frac{٣}{٨} \end{bmatrix}$

تمارين ٢ – ٨

① بيّن أي من المصفوفات الآتية لها نظير ضربي.

أ = $\begin{bmatrix} ٤ & -٨ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٦ & -٣ & ٩ \\ ٢ & ٨ & -١ \end{bmatrix}$

② ما قيم ك التي تجعل كلاً من المصفوفات الآتية منفردةً ؟ أ = $\begin{bmatrix} ك & ك \\ ٤ & ٢ك \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ك & ٤ \\ ١ & ك \end{bmatrix}$

③ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فجد: أ $أ^{-١}$ (إن أمكن) ب $(أ^{-١})^{-١}$

④ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} س & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، وكان $|أ^{-١}| = \frac{١}{٥}$ ، فما قيمة س؟

⑤ إذا علمت أن أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، وكان أ . جـ = ب ، فجد $جـ^{-١}$

٢ - ٩ حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات
(Solving Systems of Linear Equations)

للعلمي فقط

تعرفنا في صفوف سابقة على حل أنظمة المعادلات الخطّيّة (عدد المعادلات = عدد المتغيرات، ولها حل وحيد) بطريقتي الحذف والتعويض، وفي هذا الدرس سنبرز أهمية المصفوفات والمحددات في حل هذه الأنظمة، وسنتناول طريقتين، هما:

① طريقة النظير الضربي*

② طريقة كريمر*

أولاً: طريقة النظير الضربي

يمكننا تمثيل نظام من المعادلات الخطّيّة على شكل معادلة مصفوفية، باستخدام ثلاث مصفوفات، هي: مصفوفة المعاملات أ، ومصفوفة المتغيرات ك، ومصفوفة الثوابت جـ .

إذا كان لدينا نظام المعادلات الخطّيّة الآتي:

٢س + ٣ص = ١٠ ، -٣س +٥ص = ٤ ، فإن مصفوفة المعاملات هي: أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix}$

ومصفوفة المتغيرات هي: ك = $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$، ومصفوفة الثوابت هي: جـ = $\begin{bmatrix} ١٠ \\ ٤ \end{bmatrix}$

ويمثل النظام السابق من المعادلات الخطّيّة بمعادلةٍ مصفوفيةٍ كما يأتي:

$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ \\ ٤ \end{bmatrix}$ وهي على الصورة أ . ك = جـ وبالتالي:

تكون ك = $أ^{-١}$. جـ بشرط أن أ مصفوفة غير منفردة (لماذا؟)

---

* يكتفى بحل نظام مكون من معادلتين خطيتين فقط عند الحل بطريقتي النظير الضربي وكريمر.

مثال ١ : حل النظام : ٢س + ص = -١ ، ٤س + ص = ١، باستخدام طريقة النظير الضربي.

الحل : نكتب المعادلة المصفوفية على النحو: $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ١ \end{bmatrix}$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = ٢ - ٤ = -٢ \quad \text{ومنها} \quad أ^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -١ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \\ -٢ + -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ -٣ \end{bmatrix}$$

أي أن: س = ١ ، ص = -٣

فكّر وناقش:

ماذا يحدث للإجابة إذا تم تغيير ترتيب المعادلتين هكذا:

٤س + ص = ١ ، ٢س + ص = -١

ثانياً: طريقة كريمر

سبق وأن مثلنا أي نظام من المعادلات الخطّيّة بمعادلةٍ مصفوفيةٍ على النحو أ . ك = جـ

حيث إن مصفوفة المعاملات أ غير منفردةٍ، ك مصفوفة المتغيرات، جـ مصفوفة الثوابت، فإذا كان النظام

يتضمن المتغيرين س ، ص ، فإننا نجدهما على النحو: $س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|}$ ، $ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|}$

حيث إن: $أ_{س}$ المصفوفة الناتجة من استبدال عمود معاملات س بعمود الثوابت.

$أ_{ص}$ المصفوفة الناتجة من استبدال عمود معاملات ص بعمود الثوابت.

مثال ٢ : باستخدام طريقة كريمر حل النظام الآتي: $٣س + ٥ص = ١$، $٢س + ٣ص = ٠$

الحل : نكون المصفوفات: $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$، $أ_{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$، $أ_{ص} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ فيكون:

$|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٩ - ١٠ = -١$، $|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ٣ - ٠ = ٣$، $|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{vmatrix} = -٢$

$\therefore$ $س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٣}{-١} = -٣$ ، $ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{-٢}{-١} = ٢$

نشاط: قامت حنين بحل نظام مكون من معادلتين خطّيتين بالمتغيرين س ، ص، فوجدت أن المصفوفة

$أ_{س} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$، والمصفوفة $أ_{ص} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ فإن:

مصفوفة المعاملات للنظام الذي حلّته حنين هي: ....

س = ... ، ص = ...

تمارين ٢ - ٩

① حل كلاً من الأنظمة الآتية باستخدام طريقة النظير الضربي:

أ) $س - ص = ٣$

$٢س + ص = ٦$

ب) $س + ص = ٢$

$١٠س + ص = ١١$

② حل أنظمة المعادلات الآتية باستخدام طريقة كريمر:

أ) $س - ص = ٥$

$س + ٢ص = ٢$

ب) $س + ص = -٣$

$٢ص + س = -٢$

③ عند حل نظام مكون من معادلتين خطّيتين بالمتغيرين س ، ص بطريقة كريمر، وجد أن:

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $أ_{س} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$، فجد قيمة س ، ص

ورقة عمل (٢)

١ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} س & ٢ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ ، وكان $|أ^{٣}|$ = ١٢٥، فما قيمة/ قيم س؟

٢ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ \\ -٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \sqrt{٣} & -١ \end{bmatrix}$

جد المصفوفة د بحيث أن: أ + د = ب . د

٣ جد قيم س ، ص الحقيقية التي تحقق المعادلة: س $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٣ \end{bmatrix}$ + ص $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ \\ ٥ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٩ \\ -٣ \end{bmatrix}$

٤ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -٢ & ٥ & ١ \\ ٦ & -٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فجد المصفوفة ب من الرتبة ٣×٢

بحيث إن $أ_{ي هـ}$ = $ب_{هـ ي}$ لجميع قيم ي ، هـ

٥ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} س & -٣ \\ ١ & ص \end{bmatrix}$ ، وكان $|أ^{-١}|$ = | أ | فما قيمة/ قيم المقدار (س ص)؟

٦ حل المعادلات المصفوفية الآتية:

أ $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$ (باستخدام النظير الضربي)

ب $\begin{bmatrix} س & ص \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ & ١١ \end{bmatrix}$

٧ عند حل المعادلتين ن س − ص = ٥ ، ك س + ص = ٣ ، ن ، ك عددان حقيقيان لا يساويان صفراً.

باستخدام طريقة كريمر، إذا كانت $\begin{vmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ تمثل محدد $أ_{ص}$

جد قيمة: أ ن ، ك ب س ، ص

اختبار الوحدة

① اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - س ، & ٠ \le س \le ١ \\ س - ١ ، & ١ < س \le ٣ \end{cases}$ ، فما مجموعة قيم س التي يكون عندها للاقتران ق(س) نقطة حرجة في الفترة $[٠ ، ٣]$؟

أ) $\{٠ ، ١ ، ٣\}$　ب) $\{٠ ، ٣\}$　ج) $\{٠ ، \frac{١}{٢} ، ٣\}$　د) $\{٠ ، \frac{١}{٢} ، ١ ، ٣\}$

٢ إذا كان $قَ(س) = (س^{٢} - ١)^{٣} (س - ٢)^{٤}$ فما الفترة التي يكون فيها ق(س) متناقصاً؟

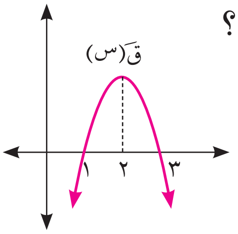
أ) $]-\infty ، -١]$　ب) $[-١ ، ١]$　ج) $[١ ، ٢]$　د) $[٢ ، \infty[$

٣ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على $[١ ، ٣]$ وكان $قً(س) < ٠$ لجميع قيم $س \in]١ ، ٣[$ ، ق(س) له ثلاث نقاط حرجة فقط في $[١ ، ٣]$ وكان $قَ(٢) = ٠$، فما العبارة الصحيحة مما يأتي؟

أ) $ق(\frac{٥}{٢}) > ٠$　ب) $ق(\frac{٥}{٢}) > ق(٢)$

ج) $ق(\frac{٥}{٢}) = ق(٢)$　د) $ق(\frac{٥}{٢}) < ق(٢)$

٤ الشكل المجاور يمثل منحنى قَ(س)، ما مجموعة حل المتباينة $قً(س) > ٠$ ؟



أ) $]١ ، ٣[$　ب) $]٢ ، \infty[$

ج) $]-\infty ، ٢[$　د) $]-\infty ، ١[\cup]٣ ، \infty[$

٥ إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة معرفاً على $[أ ، ب]$ ، ما أكبر عدد ممكن من النقط الحرجة يمكن أن نحصل عليها للاقتران ق(س)؟

أ) ١　ب) ٢　ج) ٣　د) ٤

٦ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٤ & -١ & ٥ \\ ٦ & -٣ & ٩ \\ ٢ & ٧ & -١ \end{bmatrix}$ فما قيمة $أ_{١٢} - أ_{٣١}$ ؟

أ) ٤　ب) -١　جـ) ١　د) -٣

٧ إذا كانت $\begin{bmatrix} س & ٣ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & س^{٢} + س \end{bmatrix}$ فما مجموعة قيم س ؟

أ) {٣ ، −٢}　　ب) {−٣}　　جـ) {٢}　　د) {−٣ ، ٢}

٨ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} −٥ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & −٣ \\ −٦ & ١ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة المصفوفة ٢أ − ٥(أ + ٢ب) + ٢٧ب؟

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ −٢ & ٣ \end{bmatrix}$　　ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ١٧ & ١٧ \end{bmatrix}$　　جـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ −٣٤ & ٥١ \end{bmatrix}$　　د) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٣٤ & ٥١ \end{bmatrix}$

٩ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فما المصفوفة التي تساوي أ$^{-١}$ + أ ، حيث أ$^{-١}$ هي النظير الضربي للمصفوفة أ؟

أ) و　　ب) $\begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ ١٠ & ٦ \end{bmatrix}$　　جـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١٠ & ٠ \end{bmatrix}$　　د) ٧ م$_{٢}$

١٠ إذا علمت أن أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ −١ & ٣ \end{bmatrix}$، فما قيمة أ^{٢} − أ ؟

أ) ١٠ م$_{٢}$　　ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ١٠ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix}$　　جـ) $\begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ١ & ٩ \end{bmatrix}$　　د) ٨ م$_{٢}$

١١ استخدم أحمد طريقة كريمر لحل نظام مكون من معادلتين خطّيتين في المتغيرين س ، ص فوجد أن: |أ$_{س}$| = ٢ |أ| = $-\frac{١}{٢}$ |أ$_{ص}$| ، فما قيم س، ص على الترتيب؟

أ) ٢ ، −٤　　ب) −٤ ، ٢　　جـ) ١ ، −٢　　د) ٢ ، $\frac{-١}{٢}$

٢ إذا كان $\begin{vmatrix} ١ & س \\ ٢ & ص \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ص & −١ \\ س & −٤ \end{vmatrix} = ٧$ ، فما قيم س ، ص؟

٣ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & −٣ \\ ٤ & −٢ \end{bmatrix}$ فجد : (أ) |أ| أ$^{-١}$　　(ب) |٣أ|　　(جـ) (−٢أ)$^{-١}$

④ جد قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} ١ & س & ٢ \\ س & ٣ & س \\ ٤ & س & ٥ \end{vmatrix} = {}^{-}٩$

⑤ استخدم طريقة كريمر لحل نظام المعادلات: ٣س + ٢ ص = ⁻٤ ، ٥ ص + س = ٣

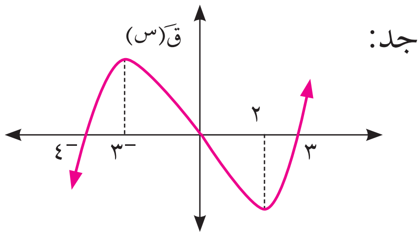
⑥ إذا كان ق(س) = جاس + جتاس ، س ∈ $\left[٠ ، \frac{\pi}{٤}\right]$ أثبت أن ق(س) متزايد على مجاله.

⑦ إذا كان ق(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٩س + ٥ معرفاً في الفترة]⁻٢ ، ٦[جد:

- أ القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س).
- ب فترات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س).
- جـ نقط الانعطاف، لمنحنى الاقتران ق(س).

⑧ معتمداً على الشكل المجاور، الذي يمثل منحنى الاقتران قَ(س) جد:

- أ فترات التقعّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س).
- ب الإحداثيات السينية لنقط الانعطاف.



⑨ إذا كان الاقتران ق(س) كثير حدود معرفاً على [٢ ، ٦] ويقع منحناه في الربع الأول، ومتناقصاً على مجاله، وكان الاقتران هـ(س) = ٨ − س بيّن أن الاقتران ك(س) = (ق × هـ)(س) متناقص في [٢ ، ٦].

⑩ ما أبعاد مخروط دائري قائم ذات أكبر حجم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها ١٠ سم؟

⑪ سلك طوله ١٨ سم، صنع منه مثلثان كل منهما متساوي الأضلاع، ما طول ضلع كل من المثلثين ليكون مجموع مساحتيهما أصغر ما يمكن؟

الوحدة

٣

٣ - ١ التكامل غير المحدود (Indefinite Integral)

نشاط ١: من خلال ما تعلمته في التفاضل، أكمل الجدولين الآتيين، ثم أجب عن الأسئلة التي تليهما:

الجدول (أ)	
ق(س)	قَ(س)
س	
س + ٥	
جاس	
س^{٢} + ٤	٢س
هـ^{س}	

الجدول (ب)	
قَ(س)	ق(س)
٧	
٢س	
٣س^{٢}	س^{٣} + ٣
قا^{٢}س	
$\frac{١}{س}$	

① تسمى العملية في الجدول (أ) عملية اشتقاق.

② اقترح اسمًا للعملية في الجدول (ب)........

③ ما العلاقة بين العمليتين؟..

④ هل الاقتران ق(س) يكون وحيدًا لكل حالة في الجدول (ب)؟ أعط أمثلة.

تعريف: معكوس المشتقة Antiderivative

إذا كان الاقتران ق(س) متصلاً في الفترة [أ ، ب] فإن م(س) يسمى معكوس المشتقة (اقتران أصلي) للاقتران ق(س) إذا كان: مَ(س) = ق(س) ، ∀ س ∈]أ ، ب[

مثال ١ : تحقق من أن الاقتران م(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} اقتران أصلي للاقتران ق(س) = س^{٣}

الحل : الاقتران م(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} هو اقتران أصلي للاقتران ق(س) لأن $\frac{د}{د س}$($\frac{١}{٤}$ س^{٤}) = س^{٣}
(لاحظ أن ق(س) متصل لأنه كثير حدود).

نشاط ٢: جد اقتراناً أصلياً للاقتران ق(س) = ٢س

حسب التعريف يكون أحد الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) هو م(س) = س^{٢}

لأن $\frac{د}{د س}$ (س^{٢}) = ٢س

① هل م$_{١}$(س) = س^{٢} − ٢ ، م$_{٢}$(س) = س^{٢} + ٥ اقترانان أصليان آخران للاقتران ق(س)؟

② هل يوجد عدد محدد من الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س). ما العلاقة بينها؟

قاعدة:

إذا كان م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران ق(س) فإن م(س) + جـ هي الصورة العامة لأي اقتران أصلي للاقتران ق(س) حيث جـ ثابت.

أتعلم:

الفرق بين أي اقترانين أصليين لاقتران معين يساوي اقتراناً ثابتاً دائماً.

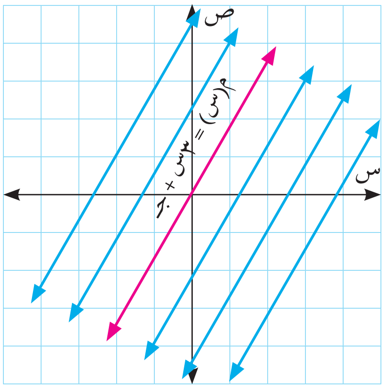
مثال ٢ : إذا كان الاقترانان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران المتصل ق(س)، وكان ل(س) = م(س) − هـ(س)، فجد لَ(٣).

الحل : الاقترانان م(س) ، هـ(س) اقترانان أصليان للاقتران المتصل ق(س)

إذن م(س) − هـ(س) = جـ (ثابت)، ومنه ل(س) = جـ

لَ(س) = ٠ ومنها لَ(٣) = ٠

مثال ٣ : بيّن أن مجموعة الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) = ٣ هي مجموعة من الاقترانات التي منحنياتها مستقيمات متوازية.



الحل : جميع الاقترانات الأصلية تكون على الصورة:

م(س) = ٣س + جـ ، حيث جـ ∈ ح، وهي عبارة عن مجموعة من الاقترانات التي منحنياتها مستقيمات متوازية،

فمثلاً إذا كان جـ = ٥ فإن م$_{١}$(س) = ٣س + ٥

وإذا كانت جـ = ⁻٣ فإن م$_{٢}$(س) = ٣س − ٣ وهكذا ...

مثال ٤ : بيّن فيما إذا كان الاقتران $م(س) = \frac{س^{٣} - ١}{س^{٢}}$ اقترانًا أصليًا للاقتران

$ق(س) = ١ + \frac{٢}{س^{٣}}$ ، $س \neq ٠$

الحل : $م(س) = \frac{س^{٣} - ١}{س^{٢}} = س - \frac{١}{س^{٢}} = س - س^{-٢}$

ومنها $مَ(س) = ١ - (-٢)س^{-٢-١} = ١ + \frac{٢}{س^{٣}} = ق(س)$

$\therefore$ م(س) اقتران أصلي للاقتران ق(س).

تعريف:

① تسمى مجموعة كل الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) بالتكامل غير المحدود للاقتران ق(س) بالنسبة لـ س ويرمز له بالرمز $\int ق(س)\, دس$ ويقرأ تكامل ق(س) دال س.

② إذا كان $مَ(س) = ق(س)$ فإن $\int ق(س)\, دس = م(س) + جـ$ حيث جـ ثابت. (ثابت التكامل).

③ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً فإن $\frac{د}{د س}\left(\int ق(س)\, دس\right) = ق(س)$.

نشاط ٣: لاحظ أن $\int س^{٣} دس = \frac{س^{٤}}{٤} + جـ$ وذلك لأن $\frac{د}{د س}\left(\frac{س^{٤}}{٤} + جـ\right) = س^{٣}$

وكذلك $\int ص^{-٢} دص = \frac{-١}{ص} + جـ$ وذلك لأن ....

وبالمثل $\int جتاس\, دس = جاس + جـ$ وذلك لأن ....

مثال ٥ : إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً وكان $\int ق(س)\, دس = س^{٣} - ٣س + ٥$

جد ق(٢) ، قَ(٢).

الحل : بما أن ق(س) اقتران متصل

إذن $\frac{د}{د س}\left(\int ق(س)\, دس\right) = ق(س) = ٣س^{٢} - ٣$

ومنها $ق(٢) = ٣(٢)^{٢} - ٣ = ٩$

$قَ(س) = ٦س$ ومنها $قَ(٢) = ١٢$

مثال ٦ : إذا كان $ق(س) = \int هـ^{س}\, دس$ ، وكان $ق(٠) = ٣$ ، فجد $ق(١)$.

الحل : $ق(س) = \int هـ^{س}\, دس = هـ^{س} + جـ$

لكن $ق(٠) = ٣$ ، ومنها يكون $هـ^{٠} + جـ = ٣$

أي أن $١ + جـ = ٣$ ومنها $جـ = ٢$

$ق(س) = هـ^{س} + ٢$ ومنها $ق(١) = هـ^{١} + ٢ = هـ + ٢$

تمارين ٣ - ١

① بيّن فيما إذا كان م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران ق(س) في كل مما يأتي:

أ $م(س) = \frac{١}{٣}(٢ + س^{٢})^{\frac{٣}{٢}}$ ، $ق(س) = س\sqrt{٢ + س^{٢}}$

ب $م(س) = قا^{٣}س$ ، $ق(س) = ٣\, قا^{٢}س\, ظاس$

جـ $م(س) = لو_{هـ}(س^{٣} + هـ^{٢س})$ ، $ق(س) = \frac{٣س^{٢} + ٢هـ^{٢س}}{س^{٣} + هـ^{٢س}}$

② إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران ق(س)، وكان $م(س) = س^{٢} - ٤س + ٦$ ، $هـ(٣) = ٤$، فجد هـ(١).

③ إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران المتصل ق(س)، وكان $ق(٤) = ٧$ ، $قَ(٤) = ١٠$، فما قيمة $(٣م - هـ)َ(٤)$؟

④ إذا كان $م(س) = ٢ظاس - ٢قاس$ أحد الاقترانات الأصلية للاقتران $ق(س) = \frac{أ}{١ + جاس}$ ، $س \in [٠ ، \frac{\pi}{٤}]$. احسب قيمة الثابت أ.

٣ - ٢ قواعد التكامل غير المحدود (Rules of Indefinite Integrals)

يتطلب إيجاد الاقتران الأصلي من خلال عمليات الاشتقاق كثيراً من الوقت والجهد، لذلك سنستخدم قواعد سيتم التعرف على بعض منها من خلال النشاط الآتي.

نشاط ١: أكمل الجدول الآتي حيث أ ∈ ح ، ثم أجب عن الأسئلة التي تليه:

ق(س)	قَ(س)	$\int$ قَ(س) دس
٥		جـ
أ س		أ س + جـ
$\text{س}^{٣}$		
$\text{س}^{\text{ن}}$	$\text{ن س}^{\text{ن}-١}$	
$\text{لـو}_{\text{هـ}}$ س ، س > ٠		

لاحظ أن المقدارين ق(س) ، $\int$ قَ(س) دس ، في كل حالة يختلفان بمقدار ثابت.

① ما العلاقة بين نواتج العمود الثاني، ونواتج العمود الثالث؟

② بالاعتماد على النتائج التي توصلت إليها، وأن التكامل عملية عكسية للتفاضل، يمكنك التحقق من صحة القواعد الآتية:

قواعد التكامل غير المحدود:

① $\int$ أ دس = أ س + جـ ، أ ∈ ح

② $\int \text{س}^{\text{ن}}$ دس = $\dfrac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن} + ١}$ + جـ ، ن ≠ -١

③ $\int \dfrac{١}{\text{س}}$ دس = $\text{لـو}_{\text{هـ}}$ |س| + جـ

④ $\int \text{هـ}^{\text{س}}$ دس = $\text{هـ}^{\text{س}}$ + جـ

⑤ $\int$ جاس دس = $-$جتاس + جـ

⑥ $\int$ جتاس دس = جاس + جـ

⑦ $\int \text{قا}^{٢}\text{س}$ دس = ظاس + جـ

⑧ $\int \text{قتا}^{٢}\text{س}$ دس = $-$ظتاس + جـ

⑨ $\int$ قاس ظاس دس = قاس + جـ

⑩ $\int$ قتاس ظتاس دس = $-$قتاس + جـ

خواص التكامل غير المحدود:

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل فإن:

١ $\int أ\,ق(س)\,دس = أ\int ق(س)\,دس$ ، $أ \neq ٠$

٢ $\int (ق(س) \pm هـ(س))\,دس = \int ق(س)\,دس \pm \int هـ(س)\,دس$ ويمكن تعميمها على أكثر من اقترانين.

مثال ١ : جد كلاً من التكاملات الآتية:

① $\int (\frac{١}{س} + ٣)\,دس$ ② $\int قاس\,(قاس + ظاس)\,دس$

③ $\int (س^{٢} + هـ^{س})\,دس$ ④ $\int (٢ - ظا^{٢}س)\,دس$

الحل :

١ $\int (\frac{١}{س} + ٣)\,دس = \int \frac{١}{س}\,دس + \int ٣\,دس = لو_{هـ}|س| + ٣س + جـ$

٢ $\int قاس\,(قاس + ظاس)\,دس = \int (قا^{٢}س + قاس\,ظاس)\,دس$

$= \int قا^{٢}س\,دس + \int قاس\,ظاس\,دس$

$= ظاس + قاس + جـ$

٣ $\int (س^{٢} + هـ^{س})\,دس = \int س^{٢}\,دس + \int هـ^{س}\,دس = \frac{س^{٣}}{٣} + هـ^{س} + جـ$

٤ $\int (٢ - ظا^{٢}س)\,دس = \int (٢ - (قا^{٢}س - ١))\,دس = \int (٣ - قا^{٢}س)\,دس$

$= ٣س - ظاس + جـ$

مثال ٢ : جد $\int \frac{(س^{٢} + ١)^{٢}}{س^{٢}}\,دس$

الحل : $\int \frac{(س^{٢} + ١)^{٢}}{س^{٢}}\,دس = \int \left(\frac{س^{٢} + ١}{س}\right)^{٢}\,دس = \int (س + س^{-١})^{٢}\,دس$

$= \int (س^{٢} + ٢ + س^{-٢})\,دس = \frac{س^{٣}}{٣} + ٢س - \frac{١}{س} + جـ$

فكّر وناقش:

هل يمكنك إيجاد ناتج التكامل بطريقة أخرى؟

نشاط ٢: إذا كان قَ(س) = (٥س^{٤} − ١)، وكان ق(١) = ٥، فلإيجاد ق(٢) لاحظ أن:

ق(س) = $\int$ قَ(س) دس = $\int$(٥س^{٤} − ١) دس = س^{٥} − س + جـ

لكن ق(١) = ... = ٥ ومنها جـ = ...

فيكون ق(س) = ...

ق(٢) = ...

فكّر وناقش:

ما الفرق بين: $\frac{\text{د}}{\text{د س}}\int$ ق(س) دس ، $\int$ قَ(س) دس، علماً بأن ق(س) اقتران متصل؟

تمارين ٣ - ٢

① جد التكاملات الآتية:

أ) $\int$ ٨ دس

ب) $\int$ (س + ٣) $\sqrt{\text{س}}$ دس

جـ) $\int$ (٥س + قاس ظاس) دس

د) $\int \frac{\text{٢س}^{٣} + \text{٥س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢}}$ دس

هـ) $\int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ دس

و) $\int$ (٥هـ$^{\text{س}}$ + $\frac{٢}{\text{س}}$) دس

② إذا كان قَ(س) + هـ$^{\text{س}}$ = جتاس ، جد ق(س) حيث ق(٠) = $^{-}$١

٣ - ٣ تطبيقات التكامل غير المحدود (Applications of Indefinite Integrals)

أولاً: تطبيقات هندسية: Geometric Applications

نشاط ١: يسير رجل على طريق منحنٍ بحيث يكون ميل المماس عند أي نقطة أ (س ، ص) على الطريق يساوي (٢س + ١). (لاحظ أن ميل المماس هو $ص' = ٢س + ١$)

١ الاقتران الذي يمثل معادلة الطريق هو اقتران تربيعي قاعدته ص = ...

٢ إذا كانت النقطة (٠ ، ٢) تقع على الطريق، فإن قاعدة الاقتران ص = ...

مثال ١ : إذا كان المستقيم ص = س + ٢ يمس منحنى الاقتران ق(س) عند س = ٠ وكان $ق''(س) = ٦س$ ، جد قاعدة الاقتران ق(س).

الحل : $ق'(س) = \int ق''(س)\, دس$

$= \int ٦س\, دس = ٣س^{٢} + جـ_{١}$

لكن $ق'(٠) = ١$ (لماذا؟)

ومنها $جـ_{١} = ١$ ، $ق'(س) = ٣س^{٢} + ١$

وأيضاً $ق(س) = \int ق'(س)\, دس$

$= \int (٣س^{٢} + ١) دس = س^{٣} + س + جـ_{٢}$

وبما أن النقطة (٠ ، ٢) هي نقطة تماس

فإن ق(٠) = ٢ ومنها $جـ_{٢} = ٢$

$ق(س) = س^{٣} + س + ٢$

مثال ٢ : إذا كان $ق''(س) = ١٢س$ فجد معادلة منحنى الاقتران ق(س) علماً بأنه يمر بالنقطتين (١ ، ٣) ، (−١ ، ١).

الحل : بما أن $ق'(س) = \int ق''(س)\, دس$

فإن $ق'(س) = \int ١٢س\, دس = ٦س^{٢} + جـ_{١}$

كما أن $ق(س) = \int (٦س^{٢} + جـ_{١})\, دس = ٢س^{٣} + جـ_{١}س + جـ_{٢}$ (لماذا؟) .... (١)

لكن ق(١) = ٣ ، ق(⁻١) = ١

وبالتعويض في المعادلة (١) نحصل على:

$جـ_{١} + جـ_{٢} = ١$ ، $^{-}جـ_{١} + جـ_{٢} = ٣$

وبحل المعادلتين معاً نحصل على قيمة: $جـ_{١} = {}^{-}١$ ، $جـ_{٢} = ٢$

معادلة المنحنى المطلوبة هي: $ق(س) = ٢س^{٣} - س + ٢$

ثانياً: تطبيقات فيزيائية Physical Applications

تأمل المخطط الآتي، ولاحظ العلاقة بين البعد ف(ن) والسرعة ع(ن) والتسارع ت(ن) في التفاضل والتكامل.

$$\begin{tikzcd}
ت(ن) \arrow[r, shift left, "\text{بالتكامل}"] & ع(ن) \arrow[l, shift left, "\text{بالاشتقاق}"] \arrow[r, shift left, "\text{بالتكامل}"] & ف(ن) \arrow[l, shift left, "\text{بالاشتقاق}"]
\end{tikzcd}$$

مثال ٣ : بدأ جسم التحرك في خط مستقيم من نقطة الأصل ومبتعداً عنها، فإذا كانت سرعته في أي لحظة تعطى بالعلاقة $ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٢ن$ ، فما بعد الجسم عن نقطة الأصل بعد ثانيتين من بدء الحركة؟

الحل : $ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٢ن$

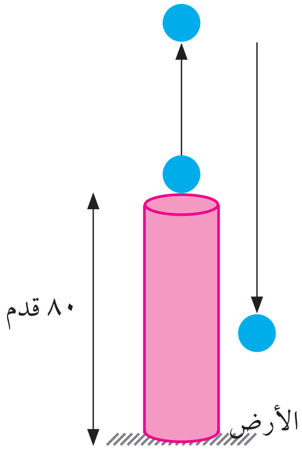
$ف(ن) = \int ع(ن)\, دن = \int (٣ن^{٢} + ٢ن)\, دن = ن^{٣} + ن^{٢} + جـ$

وبما أن ف(٠) = ٠ فإن جـ = ٠

أي أن ف(ن) = ن^{٣} + ن^{٢}

بعد الجسم عن نقطة الأصل بعد ثانيتين = ف(٢) = ١٢ متراً

مثال ٤ : قذفت كرة للأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٦٤ قدم/ ث من قمة برج ارتفاعه ٨٠ قدماً. جد أقصى ارتفاع عن سطح الأرض تصله الكرة، علماً بأن تسارعها يساوي −٣٢ قدم/ ث^{٢}.



الحل : ع(ن) = $\int$ ت(ن) دن = $\int$ −٣٢ دن = −٣٢ن + جـ$_{١}$

لكن ع(٠) = ٦٤ ومنها جـ$_{١}$ = ٦٤

ع(ن) = −٣٢ن + ٦٤

تصل الكرة لأقصى ارتفاع بعد ثانيتين ..... (لماذا؟)

ف(ن) = $\int$(−٣٢ن + ٦٤) دن = −١٦ن^{٢} + ٦٤ن + جـ$_{٢}$

لكن ف(٠) = ٨٠ ومنها جـ$_{٢}$ = ٨٠

ف(ن) = −١٦ن^{٢} + ٦٤ن + ٨٠

أقصى ارتفاع عن سطح الأرض= ف(٢) = ١٤٤ قدماً.

تمارين ٣ - ٣

① إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يساوي س(٣س − ٢) فجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن ق(٢) = ٥

② إذا كان قَ(س) = أس − ٣س^{٢} ، فجد قاعدة منحنى الاقتران ق(س) علماً بأن المستقيم س + ص = ٤ مماس للمنحنى عند النقطة (١ ، ق(١)).

③ إذا كان قً(س) = جتاس وكان قَ(π) = ٢ ، ق(π) = ١ ، فجد قاعدة الاقتران ق(س).

④ تحرك جسم في خط مستقيم من النقطة (و) مبتعداً عنها، بسرعة ابتدائية مقدارها ٣ م/ ث، فإذا كان تسارعه في أي لحظة يساوي (ن) م/ ث^{٢}، فما سرعته بعد ٥ ثوان من بدء الحركة، وما المسافة التي قطعها خلال هذه الثواني؟

٣ - ٤ طرق التكامل (Methods of Integration)

يصادفنا في كثير من الأحيان تكاملات لا يمكن إيجادها باستخدام قواعد التكامل غير المحدود، وسنتعرف في هذا الدرس على طريقتين لإيجاد التكامل غير المحدود، وهي:

١ التكامل بالتعويض.

٢ التكامل بالأجزاء.

أولاً: التكامل بالتعويض Integration by Substitution

نشاط ١: إذا كان $ق(س) = ٢س\,(٢ + س^{٢})^{٢}$

١ تحقق أن: $م(س) = \frac{١}{٣}(٢ + س^{٢})^{٣}$ اقتران أصلي للاقتران ق(س).

٢ $\int ٢س\,(٢ + س^{٢})^{٢}\, دس = ...$

٣ ليكن $هـ(س) = ٢ + س^{٢}$ فإن $هـَ(س) = ...$

٤ العلاقة بين ٢س ، $٢ + س^{٢}$ هي ....

فكّر وناقش:

هل $\int س\sqrt{س}\, دس = \int س\, دس \,.\, \int \sqrt{س}\, دس$ ؟ ماذا تلاحظ؟

تعلمت في الفصل الأول بأن $\frac{د}{د\,س}(ق(س))^{ن} = ن(ق(س))^{ن-١}\, قَ(س)$

أي أن $(ق(س))^{ن}$ هو اقتران أصلي للاقتران $ن(ق(س))^{ن-١}\, قَ(س)$

وبذلك يكون: $\int (ق(س))^{ن-١}\, قَ(س)\, دس = \frac{١}{ن}(ق(س))^{ن} + جـ$

وبشكل عام:

إذا كان $هـ(س) = ع$ فإن: $\int ق(هـ(س))\, هـَ(س)\, دس = \int ق(ع)\, دع$

علماً بأن ق(س) ، هـ(س) اقترانان متصلان.

مثال ١ : جد $\int ٢س\sqrt{س^٢ + ٤}\ دس$

الحل : نفرض أن: $ع = س^٢ + ٤ \Leftarrow دع = ٢س\ دس$ ومنها $دس = \frac{دع}{٢س}$

وبالتعويض، ينتج أن:

$$\int ٢س\sqrt{س^٢ + ٤}\ دس = \int ٢س\sqrt{ع}\ \frac{دع}{٢س} = \int \sqrt{ع}\ دع = \frac{٢ع^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ$$

$$= \frac{٢(س^٢ + ٤)^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ$$

● ● ●

مثال ٢ : جد $\int (٢س + ١)^٥\ دس$

الحل : نفرض أن: $ع = ٢س + ١$ ومنها يكون $دع = ٢دس$ ، أي أن $دس = \frac{دع}{٢}$

$$\int (٢س + ١)^٥\ دس = \int ع^٥\ \frac{دع}{٢} = \frac{ع^٦}{١٢} + جـ$$

$$= \frac{١}{١٢}(٢س + ١)^٦ + جـ$$

● ● ●

نشاط ٢: لإيجاد $\int قا^٢(٣س + ٢)\ دس$

نفرض $ع = ٣س + ٢$ ، فيكون $دع = ٣\ دس$ ومنها $دس =$ ....

فيصبح $\int قا^٢(٣س + ٢)\ دس = \frac{١}{٣}\int قا^٢ع\ دع =$ ....

$$= \frac{١}{٣}ظا(٣س + ٢) + جـ$$

أتعلم:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل فإن $\int ق'(أس + ب)\ دس = \frac{١}{أ}ق(أس + ب) + جـ$

حيث أ ، ب ، جـ أعداداً حقيقية ، $أ \neq ٠$

مثال ٣ : جد $\int س\,هـ^{س^{٢}+١}\,دس$

الحل : نفرض أن: $ع = س^{٢} + ١ \Leftarrow دس = \frac{دع}{٢س}$ وبالتعويض والاختصار، ينتج أن:

$$\int س\,هـ^{س^{٢}+١}\,دس = \frac{١}{٢}\int هـ^{ع}\,دع$$

$$= \frac{هـ^{ع}}{٢} + جـ$$

$$= \frac{هـ^{س^{٢}+١}}{٢} + جـ$$

مثال ٤ : جد $\int جا^{٣}س\,دس$

الحل : $\int جا^{٣}س\,دس = \int جا^{٢}س\,جاس\,دس = \int (١ - جتا^{٢}س)\,جاس\,دس$

إذن $\int جا^{٣}س\,دس = \int جاس\,دس - \int جتا^{٢}س\,جاس\,دس$

$$= -جتاس + \frac{جتا^{٣}س}{٣} + جـ$$ (لماذا؟)

مثال ٥ : جد $\int س^{٥}(س^{٣} + ١)^{٣}\,دس$

الحل : نفرض أن: $ع = س^{٣} + ١ \Leftarrow دس = \frac{دع}{٣س^{٢}}$

$$\int س^{٥}(س^{٣} + ١)^{٣}\,دس = \int س^{٥}ع^{٣}\frac{دع}{٣س^{٢}} = \frac{١}{٣}\int س^{٣}ع^{٣}\,دع$$ (ماذا تلاحظ؟)

$$= \frac{١}{٣}\int (ع - ١)ع^{٣}\,دع = \frac{١}{٣}\int (ع^{٤} - ع^{٣})\,دع$$

$$= \frac{١}{٣}\left(\frac{ع^{٥}}{٥} - \frac{ع^{٤}}{٤}\right) + جـ$$

عوّض قيمة ع واكتب الناتج بدلالة س

قاعدة:

$$\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\,\text{دس} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{ق}(\text{س})\right| + \text{جـ} \text{ ، } \text{ق}(\text{س}) \ne ٠$$

مثال ٧ : جد $\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{(١ + \text{ظاس})}\,\text{دس}$

الحل : لاحظ أن البسط يساوي مشتقة المقام

وباستخدام القاعدة السابقة يكون $\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{(١ + \text{ظاس})}\,\text{دس} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left|(١ + \text{ظاس})\right| + \text{جـ}$

تمارين (٣-٤ أ)

① جد التكاملات الآتية:

أ $\int \frac{٤}{(\text{س} + ٢)^{٥}}\,\text{دس}$

ب $\int (١ - \text{س})\,\text{جا}(\text{س}^{٢} - ٢\text{س})\,\text{دس}$

جـ $\int \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}\,\text{دس}$

د $\int (\text{س} + ٢)^{٢}(\text{س} - ١)^{٦}\,\text{دس}$

هـ $\int \frac{\text{هـ}^{٢\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{٢\text{س}}}\,\text{دس}$

و $\int \frac{١}{\text{س}^{٢}}\,\text{جا}\,\frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}$

ثانياً: التكامل بالأجزاء: Integration by Parts

للعلمي فقط

فكّر وناقش:

هل يمكن إيجاد $\int$ س جتاس دس بطرق التكامل التي تعلمتها؟

أتعلم:

$\frac{د}{د س}$ (ق × ع) = ق × $\frac{دع}{د س}$ + ع × $\frac{د ق}{د س}$ حيث ق ، ع اقترانات قابلة للاشتقاق.

وبتكامل الطرفين بالنسبة إلى س ينتج أن:

ق × ع = $\int$ ق دع + $\int$ ع دق ..... (لماذا؟)

ومنها $\int$ ق دع = ق × ع − $\int$ ع دق

تسمى هذه النتيجة قاعدة التكامل بالأجزاء، وتستخدم لإيجاد تكامل بعض الاقترانات التي تكون على صورة حاصل ضرب اقترانين ليس أحدهما مشتقةً للآخر.

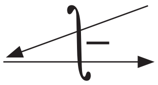
قاعدة:

قاعدة التكامل بالأجزاء: $\int$ ق دع = ق × ع − $\int$ ع دق

مثال ١ : جد $\int$ س جتاس دس

الحل : نفرض أن: ق = س

دق = دس



دع = جتاس دس

ع = جاس

وحسب القاعدة $\int$ ق دع = ق × ع - $\int$ ع دق

يكون $\int$ س جتاس دس = س جاس − $\int$ جاس دس = س جاس + جتاس + جـ

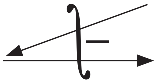
فكّر وناقش:

إضافة ثابت التكامل عند إيجاد ع لا يغير من النتيجة.

مثال ٢ : جد $\int (س - ١) هـ^{س} \, دس$

الحل : نفرض أن: $ق = س - ١$ $\qquad دع = هـ^{س} \, دس$

$\therefore \; دق = دس$ $\qquad ع = هـ^{س}$



إذن $\int (س - ١) هـ^{س} \, دس = (س - ١) هـ^{س} - \int هـ^{س} \, دس$

$= (س - ١) هـ^{س} - هـ^{س} + جـ$

نشاط: جد $\int هـ^{\sqrt{س}} \, دس$

نبدأ بالتكامل بالتعويض

بفرض $\sqrt{س} = ص$ فيكون $دص = \frac{١}{٢\sqrt{س}} \, دس$

ومنها $٢ص \, دص = دس$

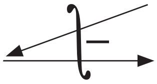
إذن $\int هـ^{\sqrt{س}} \, دس = ٢ \int ص \, هـ^{ص} \, دص$

= .... (أكمل مستخدماً التكامل بالأجزاء)

مثال ٣ : جد $\int \frac{س}{\sqrt{س + ٢}} \, دس$

الحل : نفرض أن: $ق = س$ $\qquad دع = \frac{١}{\sqrt{س + ٢}} \, دس$

$\therefore \; دق = دس$ $\qquad ع = ٢\sqrt{س + ٢}$



$\int \frac{س}{\sqrt{س + ٢}} \, دس = ٢س\sqrt{س + ٢} - \int ٢\sqrt{(س + ٢)} \, دس$

$= ٢س\sqrt{س + ٢} - \frac{٤}{٣}\sqrt{(س + ٢)^{٣}} + جـ$ (لماذا؟)

فكّر وناقش:

أوجد $\int \frac{س}{\sqrt{س + ٢}}\, دس$ من المثال السابق باستخدام التكامل بالتعويض.

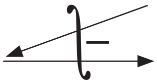
مثال ٤ : جد $\int هـ^{س}\, جاس\, دس$

الحل : نفرض أن: $ق = جاس$

$دع = هـ^{س}\, دس$

$\therefore$ $دق = جتاس\, دس$

$ع = هـ^{س}$



$$\int هـ^{س}\, جاس\, دس = هـ^{س}\, جاس - \int هـ^{س}\, جتاس\, دس$$

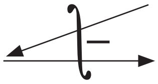
لاحظ أن: $\int هـ^{س}\, جتاس\, دس$ على نمط التكامل المطلوب نفسه.

نفرض أن: $ق = جتاس$

$دع = هـ^{س}\, دس$

$\therefore$ $دق = {}^{-}جاس\, دس$

$ع = هـ^{س}$



$$\int هـ^{س}\, جتاس\, دس = هـ^{س}\, جتاس + \int هـ^{س}\, جاس\, دس$$ (ماذا تلاحظ)؟

بالتعويض عن $\int هـ^{س}\, جتاس\, دس$ في التكامل الأصلي، فيصبح:

$$\int هـ^{س}\, جاس\, دس = هـ^{س}\, جاس - هـ^{س}\, جتاس - \int هـ^{س}\, جاس\, دس + جـ$$

ومنها $\int هـ^{س}\, جاس\, دس = \frac{١}{٢}(هـ^{س}\, جاس - هـ^{س}\, جتاس) + جـ$ ..... (لماذا؟)

تمارين ٣ – ٤ ب

جد كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int س\, لـو_{هـ} س\, دس$

ب) $\int س\, قا^{٢} س\, دس$

جـ) $\int س\, جا٢س\, دس$

د) $\int هـ^{س}\, جاس\, جتاس\, دس$

ورقة عمل (١)

① إذا كان $\int \text{ق(س) دس} = \text{أ س}^{٣} + \text{جـ س}$ ، حيث ق(س) اقتران متصل،
وكان ق(⁻١) = ٤ ، $\text{ق}'(٢) = ٢٤$، فجد قيمة كلٍ من أ ، جـ .

② إذا كان $\int (\text{ق}'(\text{س}) + \text{س}^{٢})\ \text{دس} = ٢\text{س}^{٣} + \text{جـس}^{٢} + ٢$، وكان $\text{ق}'(١) = ٤$، ق(٢) = ٦، فجد ق(⁻١)

③ قذفت كرة رأسياً إلى أعلى من قمة برج ارتفاعه ٤٥ متراً عن سطح الأرض، وكانت السرعة في اللحظة ن تساوي (⁻١٠ن + ٤٠)م/ ث، جد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى سطح الأرض.

④ جد التكاملات الآتية:

أ $\int \sqrt{\dfrac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٥}}}\ \text{دس}$

ب $\int (\text{جاس} + \text{قتاس})^{٢}\ \text{دس}$

جـ $\int \text{س}^{٢}(\text{س}^{٧} + \text{س}^{٣})^{\frac{١}{٣}}\ \text{دس}$

د $\int \text{لــو}_{\text{هـ}}\ (\text{س} + ٢)^{٣}\ \text{دس}$

و $\int \text{هـ}^{\text{س}}\ (\text{قتاس} - \text{قتاس ظتاس})\ \text{دس}$

٣ - ٥ التجزئة ومجموع ريمان (Partition and Riemann Sum)

تعريف:

إذا كانت [أ ، ب] فترة مغلقة، وكانت:

$\sigma_{\text{ن}} = \{\text{أ} = \text{س}_{٠} ، \text{س}_{١} ، \text{س}_{٢} ، \text{س}_{٣} ، \dots ، \text{س}_{\text{ن}} = \text{ب}\}$ حيث:

$\text{س}_{٠} < \text{س}_{١} < \text{س}_{٢} < \text{س}_{٣} < \dots < \text{س}_{\text{ن}}$ فإننا نسمي $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة نونية للفترة [أ ، ب]

وتسمى الفترة $[\text{س}_{\text{ر}-١} ، \text{س}_{\text{ر}}]$ الفترة الجزئية الرائية، وطولها $\Delta \text{س}_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}-١}$

طول الفترة الكلية = مجموع أطوال جميع الفترات الجزئية

وبالرموز $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}-١}) = \text{ب} - \text{أ}$

نلاحظ من التعريف، أنه لكتابة أي تجزئة $\sigma_{\text{ن}}$ لفترة ما يجب أن تكون:

① الفترة مغلقة.

② تبدأ التجزئة من بداية الفترة، وتنتهي بنهايتها.

③ عناصر التجزئة مرتبة ترتيباً تصاعدياً.

مثال ١ : أي من الآتية يعتبر تجزئة للفترة $[-١ ، ٣]$.

① $\sigma_{٤} = \{-١ ، ١ ، \frac{٣}{٢} ، ٢ ، ٣\}$

② $\sigma_{٤} = \{٠ ، ١ ، \frac{٣}{٢} ، ٢ ، ٣\}$

③ $\sigma_{٤} = \{-١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤\}$

④ $\sigma_{٤} = \{-١ ، ١ ، ٠ ، ٢ ، ٣\}$

الحل :

① $\sigma_{٤}$ تعتبر تجزئة للفترة، لأن $\text{س}_{٠} = -١$ ، $\text{س}_{٤} = ٣$ وعناصرها مرتبة تصاعدياً

② $\sigma_{٤}$ ليست تجزئة، لأن $\text{س}_{٠} \neq -١$

③ $\sigma_{٤}$ ليست تجزئة، لأن $٤ \notin [-١ ، ٣]$

④ $\sigma_{٤}$ ليست تجزئة للفترة $[-١ ، ٣]$ لأن عناصرها ليست مرتبة ترتيباً تصاعدياً

مثال ٢ : اكتب ٣ تجزئات خماسية للفترة [٢ ، ٧]

الحل : $\sigma_{٥} = \{٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧\}$

$\sigma_{٥} = \{٢ ، \frac{٥}{٢} ، ٤ ، \frac{٩}{٢} ، ٦ ، ٧\}$

$\sigma_{٥} = \{٢ ، \frac{٧}{٣} ، ٣ ، \frac{١١}{٢} ، ٦ ، ٧\}$

فكّر وناقش:

كم تجزئة خماسية للفترة [٢ ، ٧] يمكن تكوينها؟

مثال ٣ : إذا كانت $\sigma_{٣} = \{^{-}١ ، ٣ ، ٤ ، ٦\}$ تجزئة ثلاثية للفترة $[^{-}١ ، ٦]$

اكتب جميع الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٣}$ ، ثم احسب طول كل منها.

الحل : الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٣}$ هي: $[^{-}١ ، ٣]$ ، [٣ ، ٤] ، [٤ ، ٦]

وأطوالها على الترتيب ٤ ، ١ ، ٢

تلاحظ من المثال السابق أن:

عدد عناصر التجزئة $\sigma_{٣}$ = ٤ ، عدد الفترات الجزئية = ٣

مجموع أطوال الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٣}$ = ٤ + ١ + ٢ = ٧ = طول الفترة الكلية.

نشاط: إذا كانت $\sigma_{٤} = \{٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠\}$ تجزئة رباعية للفترة [٢ ، ١٠]

① الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٤}$ هي [٢ ، ٤] ، [٤ ، ٦] ، [٦ ، ٨] ، [٨ ، ١٠]

② العلاقة بين أطوال الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٤}$ هي: ....

③ عدد الفترات الجزئية = ...

④ عدد عناصر التجزئة = ...   (ماذا تلاحظ؟)

تعريف:

تسمى التجزئة $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [أ ، ب]، إذا كانت أطوال جميع الفترات الجزئية الناتجة عنها متساوية، ويكون طول الفترة الجزئية = $\frac{\text{طول الفترة الكلية}}{\text{عدد الفترات الجزئية}} = \frac{ب - أ}{ن}$

مثال ٤ : اكتب تجزئة خماسية منتظمة للفترة [$^{-}$٢ ، ١٣]

الحل : طول الفترة الجزئية = $\frac{ب - أ}{ن} = \frac{١٣ - {}^{-}٢}{٥} = ٣$

ومنها تكون $\sigma_{٥}$ = {$^{-}$٢ ، ١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣}

فكّر وناقش:

هل هناك تجزئات خماسية منتظمة أخرى للفترة [$^{-}$٢ ، ١٣]؟

مثال ٥ : إذا كانت $\sigma_{٦}$ تجزئة منتظمة للفترة [٥ ، ب] وكان طول الفترة الجزئية = $\frac{١}{٣}$، جد قيمة ب

الحل : طول الفترة الجزئية = $\frac{ب - أ}{ن} = \frac{١}{٣}$

ومنها $\frac{ب - ٥}{٦} = \frac{١}{٣}$ فيكون ٣ب − ١٥ = ٦ وينتج أن ب = ٧

لإيجاد قيمة أي عنصر في التجزئة المنتظمة $\sigma_{ن}$

يكون العنصر الأول $س_{٠}$ = أ

العنصر الثاني $س_{١} = أ + \frac{ب - أ}{ن}$

والعنصر الثالث $س_{٢} = س_{١} + \frac{ب - أ}{ن} = أ + ٢(\frac{ب - أ}{ن})$ ..... (لماذا؟)

⋮

العنصر الرائي $س_{ر-١} = أ + (ر - ١)\frac{ب - أ}{ن}$

وبشكل عام، فإن: $س_{ر} = أ + \frac{ب - أ}{ن} \times ر$ حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ن

وتكون الفترة الجزئية الرائية هي $[س_{ر-١} ، س_{ر}]$

مثال ٦ : لتكن $\sigma_{١٢}$ تجزئةً منتظمةً للفترة $[{}^-١ ، ١٩]$، فجد كلاً من:

① $س_٢$ ، $س_٩$ ② العنصر الثامن ③ الفترة الجزئية الخامسة

الحل :

① $س_ر = أ + \frac{ب - أ}{ن} \times ر$ ومنها $س_٢ = {}^-١ + \frac{١٩ + ١}{١٢} \times ٢ = \frac{٧}{٣}$

$س_٩ = {}^-١ + \frac{١٩ + ١}{١٢} \times ٩ = ١٤$

② العنصر الثامن $س_٧ = {}^-١ + \frac{١٩ + ١}{١٢} \times ٧ = \frac{٣٢}{٣}$

③ الفترة الجزئية الخامسة $= [س_٤ ، س_٥] = \left[\frac{١٧}{٣} ، \frac{٢٢}{٣}\right]$ (تحقق من ذلك)

تعريف:

إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً في الفترة [أ ، ب]، وكانت $\sigma_ن$ تجزئةً نونيةً للفترة [أ ، ب]،

فإن المقدار $\sum_{ر=١}^{ن} ق(س_ر^*)\,(س_ر - س_{ر-١})$ حيث $س_ر^* \in [س_{ر-١} ، س_ر]$

يسمى مجموع ريمان، ويرمز له بالرمز $م(\sigma_ن ، ق)$

وإذا كانت التجزئة نونية منتظمة فإن $م(\sigma_ن ، ق) = \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ق(س_ر^*)$

مثال ٧ : إذا كان ق(س) = س − ٢ ، وكانت $\sigma_٣ = \{٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦\}$ تجزئةً ثلاثية للفترة [٣ ، ٦]، فاحسب $م(\sigma_٣ ، ق)$ معتبراً $س_ر^* = س_{ر-١}$

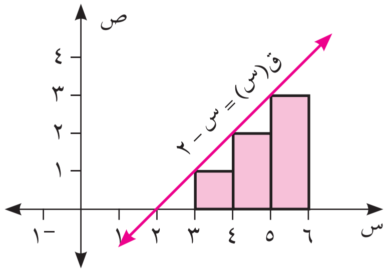
الحل : نكوّن الجدول الآتي:

الفترات الجزئية	$س_ر - س_{ر-١}$	$س_ر^*$	$ق(س_ر^*)$	$ق(س_ر^*) \times (س_ر - س_{ر-١})$
[٣ ، ٤]	١	٣	١	١
[٤ ، ٥]	١	٤	٢	٢
[٥ ، ٦]	١	٥	٣	٣
المجموع				٦

أي أن $م(\sigma_{٣} ، ق) = \sum_{ر=١}^{٣} ق(س_{ر}^{*})\,(س_{ر} - س_{ر-١}) = ٦$

لاحظ من الشكل المجاور أن مجموع مساحات المستطيلات

تساوي $م(\sigma_{٣} ، ق) = ٦$



مثال ٨ : إذا كان $ق(س) = س^{٢} - ٢س$ ، وكانت $\sigma_{٤}$ تجزئةً رباعيةً منتظمةً للفترة [⁻٣ ، ٥]، فاحسب $م(\sigma_{٤} ، ق)$ حيث $س_{ر}^{*} = س_{ر-١}$

الحل : بما أن التجزئة منتظمة فإن: طول الفترة الجزئية $= \frac{٨}{٤} = ٢$ ،

وتصبح $\sigma_{٤} = \{⁻٣ ، ⁻١ ، ١ ، ٣ ، ٥\}$

الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٤}$ هي:

[⁻٣ ، ⁻١]، [⁻١ ، ١]، [١ ، ٣]، [٣ ، ٥]

$س_{ر}^{*}$ المناظرة = ⁻٣ ، ⁻١ ، ١ ، ٣ (لماذا؟)

$$م(\sigma_{ن} ، ق) = \sum_{ر=١}^{ن} ق(س_{ر}^{*})\,(س_{ر} - س_{ر-١}) = \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ق(س_{ر}^{*}) \quad (لماذا؟)$$

$$م(\sigma_{٤} ، ق) = ٢ \sum_{ر=١}^{٤} ق(س_{ر}^{*}) = ٢(ق(⁻٣) + ق(⁻١) + ق(١) + ق(٣))$$

$$= ٢(١٥ + ٣ + ⁻١ + ٣) = ٤٠$$

تمارين ٣ - ٥

① إذا كانت $\sigma_{٦}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [⁻١ ، ٢]، فجد:

أ العنصر الثالث في التجزئة   ب الفترة الجزئية الرابعة

② إذا كان العنصر الخامس في التجزئة المنتظمة $\sigma_{١٠}$ للفترة [جـ ، ٧] يساوي ٤، جد قيمة جـ.

③ إذا كان $ق(س) = ٦ - س^{٢}$ معرفاً في الفترة [١ ، ٥] ، وكانت $\sigma_{٤}$ تجزئةً منتظمةً للفترة نفسها، فجد $م(\sigma_{٤} ، ق)$ معتبرًا $س_{ر}^{*} = س_{ر}$

④ إذا كان $ق(س) = \frac{أ س}{س + ٢}$ معرفاً على [⁻١ ، ٨]، وكانت $\sigma_{٥} = \{⁻١ ، ٠ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨\}$ تجزئة للفترة [⁻١ ، ٨] ، فاحسب قيمة أ علماً بأن $م(\sigma_{٥} ، ق) = ٦,٥$ ، اعتبر $س_{ر}^{*} = س_{ر-١}$

٦ - ٣ التكامل المحدود (The Definite Integral)

للعلمي فقط

مثال ١ : *إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} + ٣$ معرفاً في الفترة $[٢ ، ٦]$،

ولتكن $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئةً نونيةً منتظمةً للفترة نفسها

فاحسب $\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق})$ معتبرًا $\text{س}^{*}_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}}$

الحل :

$$\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}^{*}_{\text{ر}}) = \frac{٤}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}^{*}_{\text{ر}})$$

$$\text{لكن } \text{س}^{*}_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}} = \text{أ} + \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \text{ر}$$

$$\text{فيكون } \text{س}_{\text{ر}} = ٢ + \frac{٤}{\text{ن}} \text{ر}$$

$$\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \frac{٤}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ق}(٢ + \frac{٤}{\text{ن}} \text{ر})$$

$$= \frac{٤}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (٧ + \frac{٨}{\text{ن}} \text{ر}) = \frac{٤}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} ٧ + \frac{٤}{\text{ن}} \times \frac{٨}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}$$

$$= \frac{٤}{\text{ن}} \times ٧\text{ن} + \frac{٣٢}{\text{ن}^{٢}} \times \frac{\text{ن}(\text{ن} + ١)}{٢} \quad \text{وبعد التبسيط}$$

$$\text{يكون } \text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = ٤٤ + \frac{١٦}{\text{ن}}$$

أتذكر

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ك}_{\text{ر}} \pm \text{ع}_{\text{ر}}) = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ك}_{\text{ر}}) \pm \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ع}_{\text{ر}})$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{أ}(\text{ك}_{\text{ر}}) = \text{أ} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ك}_{\text{ر}})$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{أ} = \text{ن أ}$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر} = \frac{\text{ن}(\text{ن} + ١)}{٢}$$

تعريف التكامل المحدود:

إذا كان الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ معرفاً ومحدوداً* في الفترة $[\text{أ} ، \text{ب}]$،

وكانت $\lim\limits_{\text{ن} \to \infty} \text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \text{ل}$ لجميع قيم $\text{س}^{*}_{\text{ر}} \in [\text{س}_{\text{ر}-١} ، \text{س}_{\text{ر}}]$ فإن الاقتران $\text{ق}(\text{س})$

يكون قابلاً للتكامل في الفترة $[\text{أ} ، \text{ب}]$، ويكون $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س}) \, \text{دس} = \text{ل}$

(نسمي أ ، ب حدود التكامل)

---

* سوف نقتصر دراستنا في إيجاد $\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق})$ (ن غير محددة) على اقترانات كثيرة حدود من الدرجة الأولى على الأكثر.

مثال ٢ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{٥} - \text{٤س}$ حيث $\text{س} \in [\text{٠} ، \text{٣}]$، معتبراً $\text{س}_{\text{ر}}^{*} = \text{س}_{\text{ر}}$ ، احسب $\int_{\text{٠}}^{\text{٣}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ باستخدام تعريف التكامل المحدود .

الحل :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}_{\text{ر}}^{*})$$

$$\text{إذن} \int_{\text{٠}}^{\text{٣}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{٣} - \text{٠}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}_{\text{ر}})$$

$$= \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{٣}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{ن}} \left(\text{٥} - \text{٤}\left(\frac{\text{٣}}{\text{ن}}\text{ر}\right)\right) \quad \text{(لماذا؟)}$$

$$= \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{٣}}{\text{ن}} \left(\sum_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{٥} - \frac{\text{١٢}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{ر}\right) \quad \text{(لماذا؟)}$$

$$= \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{٣}}{\text{ن}} \left(\text{٥ن} - \frac{\text{١٢}}{\text{ن}} \times \frac{\text{ن}(\text{ن} + \text{١})}{\text{٢}}\right)$$

$$= \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{٣}}{\text{ن}} (-\text{ن} - \text{٦})$$

$$= \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(-\text{٣} - \frac{\text{١٨}}{\text{ن}}\right) = -\text{٣}$$

أتذكر:

إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ اقتراناً نسبياً، فإن $\underset{\text{س}\to\pm\infty}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) =$

- عدداً حقيقياً $\neq$ ٠ ، إذا كانت درجة البسط = درجة المقام، وتكون قيمة النهاية = معامل $\text{س}^{\text{ن}}$ في البسط ÷ معامل $\text{س}^{\text{ن}}$ في المقام حيث ن أعلى أس في البسط والمقام.
- صفراً إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام.
- إما ∞ ، أو $-\infty$ ، إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام.

مثال ٣ : إذا علمت أن $\int_{\text{١}^{-}}^{\text{٤}} \text{ق(س) دس} = \text{٩}$ ، وكان $\text{م}(\sigma_{\text{ن}} \text{ ، ق}) = \frac{\text{(ن + ١) (٢أن + ١)}}{\text{ن}^{\text{٢}}}$

حيث $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [١⁻ ، ٤] ، فجد قيمة الثابت أ .

الحل : $\int_{\text{١}^{-}}^{\text{٤}} \text{ق(س) دس} = \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \text{م}(\sigma_{\text{ن}} \text{ ، ق})$

إذن $\int_{\text{١}^{-}}^{\text{٤}} \text{ق(س) دس} = \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{(ن + ١) (٢أن + ١)}}{\text{ن}^{\text{٢}}} = \text{٩}$

ومنها يكون ٢أ = ٩ ومنها أ = $\frac{\text{٩}}{\text{٢}}$ ..... (لماذا؟)

تمارين ٣ - ٦

① إذا كان ق(س) = ٢ − ٥س، وكانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئةً نونيةً منتظمةً للفترة [١⁻ ، ٣]، فاحسب $\text{م}(\sigma_{\text{ن}} \text{ ، ق})$ معتبرًا $\text{س}_{\text{ر}}^{*} = \text{س}_{\text{ر}}$

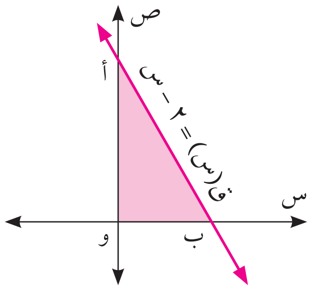
② استخدم تعريف التكامل المحدود في إيجاد قيمة كل من:

أ $\int_{\text{١}^{-}}^{\text{٤}} \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{ دس}$

ب $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{(٤ − ٦س) دس}$

٣ - ٧ العلاقة بين التفاضل والتكامل (Fundamental Theorem of Calculus)

نشاط ١ : الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) = ٢ − س، والمار بالنقطتين أ ، ب



① مساحة المثلث أ و ب = ...

② إذا كان م(س) هو الاقتران الأصلي للاقتران ق(س)

فإن م(س) = $\int$ (٢ − س) دس = ٢س − $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ + جـ

③ قيمة م(٢) − م(٠) = ... ماذا تلاحظ؟

تعريف:

إذا كان م(س) هو أحد الاقترانات الأصلية للاقتران المتصل ق(س) في الفترة [أ ، ب]، فإن المقدار م(ب) − م(أ) يساوي التكامل المحدود للاقتران ق(س) في الفترة [أ ، ب]

ونرمز له بالرمز $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

① إذا كان الاقتران ق(س) متصلاً في الفترة [أ ، ب]، وكان م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران ق(س) فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس = م(س) $\Big|_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ = م(ب) − م(أ)

② أ إذا كان الاقتران ق(س) قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب]،

فإن ت(س) = $\int_{\text{أ}}^{\text{س}}$ ق(ص) دص لجميع قيم س ∈ [أ ، ب]

ويسمى ت(س) الاقتران المكامل للاقتران ق(س).

ب إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً، فإن تَ(س) = ق(س) لكل س ∈ [أ ، ب]

مثال ١ : جد قيمة كل مما يأتي:

① $\int_{-٢}^{٣} (٤\text{س}^{٣} - ١)\,\text{دس}$

② $\int_{٤}^{٩} ٣\sqrt{\text{س}}\,\text{دس}$

③ $\int_{١}^{٢} \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

الحل :

① ق(س) = ٤س^{٣} − ١ متصل على ح ، م(س) = س^{٤} − س اقتران أصلي للاقتران ق(س)

إذن $\int_{-٢}^{٣} (٤\text{س}^{٣} - ١)\,\text{دس} = \text{م(س)}\Big|_{-٢}^{٣} = (\text{س}^{٤} - \text{س})\Big|_{-٢}^{٣}$

$= [(٣)^{٤} - (٣)] - [(^{-}٢)^{٤} - (^{-}٢)] = ٦٠$

② لاحظ أن أحد الاقترانات الأصلية للاقتران ٣$\sqrt{\text{س}}$ هو ٢س$^{\frac{٣}{٢}}$

$\int_{٤}^{٩} ٣\sqrt{\text{س}}\,\text{دس} = \int_{٤}^{٩} ٣\text{س}^{\frac{١}{٢}}\,\text{دس} = ٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}}\Big|_{٤}^{٩} =$ .... (أكمل)

③ $\int_{١}^{٢} \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}}\Big|_{١}^{٢} = \text{هـ}^{٢} - \text{هـ}$ (لماذا؟)

مثال ٢ : إذا كان م(س) اقتران أصلي للاقتران ق(س)

وكانت م($^{-}$٣) = ٤ ، م(٧) = ١٢، فجد $\int_{-٣}^{٧} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

الحل : $\int_{-٣}^{٧} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \text{م(س)}\Big|_{-٣}^{٧}$

$= \text{م(٧)} - \text{م}(^{-}٣) = ٨$

مثال ٣ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٤\text{س}^{٣}$ معرفاً في الفترة $[-٢ ، ٤]$، فجد $\text{ت}(\text{س})$، ثم احسب $\text{ت}(-٢)$ ، $\text{ت}(١)$

الحل :

$$\text{ت}(\text{س}) = \int_{\text{أ}}^{\text{س}} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$$

$$= \int_{-٢}^{\text{س}} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$$

$$= \int_{-٢}^{\text{س}} ٤\text{ص}^{٣}\,\text{دص} = \text{ص}^{٤}\Big|_{-٢}^{\text{س}}$$

$$= \text{س}^{٤} - ١٦$$

ومنها $\text{ت}(-٢) = ١٦ - ١٦ = ٠$ ، $\text{ت}(١) = ١ - ١٦ = -١٥$

فكّر وناقش:

كيف يمكنك إيجاد $\text{ت}(١)$ دون إيجاد $\text{ت}(\text{س})$؟

مثال ٤ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + \text{جا}٢\text{س}$ ، $\text{س} \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$ ، فجد:

① الاقتران المكامل $\text{ت}(\text{س})$

② $\text{ت}(٠)$

③ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

الحل :

① $\text{ت}(\text{س}) = \int_{٠}^{\text{س}} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = \int_{٠}^{\text{س}} (\text{ص}^{٢} + \text{جا}٢\text{ص})\,\text{دص}$

$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{٢} + \frac{١}{٢}$ (لماذا؟)

② $\text{ت}(٠) = \frac{(٠)^{٣}}{٣} - \frac{\text{جتا}٢(٠)}{٢} + \frac{١}{٢} = ٠$

③ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \text{ت}(\frac{\pi}{٤}) = \frac{\pi^{٣}}{١٩٢} + \frac{١}{٢}$ (لماذا؟)

سوف نقدم الاقتران المكامل لاقتران متعدد القاعدة في الدرس التالي:

نظرية:

إذا كان ت(س) هو الاقتران المكامل للاقتران ق(س) المعرف في الفترة [أ ، ب] فإن:

① ت(س) اقتران متصل دائماً في الفترة [أ ، ب].

② ت(أ) = ٠

تمارين ٣ - ٧

① جد قيم التكاملات المحدودة الآتية:

أ) $\int_{٠}^{٤} (٣ + \sqrt{\text{س}})^{٢} \, \text{دس}$

ب) $\int_{١}^{٢} \text{س}(\text{س}^{٢} - ٣)^{٣} \, \text{دس}$

جـ) $\int_{١}^{\text{هـ}} \text{لـو}_{\text{هـ}} \, \text{س} \, \text{دس}$

د) $\int_{٠}^{٢} ١٢٠\text{س}^{٢}(\text{س} - ١)^{٣} \, \text{دس}$

② إذا كان ق(س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} + ١}$ ، س ∈ [٠ ، ٤] ، أوجد ت(س)

③ إذا كان ت(س) = $\begin{cases} ٢\text{س}^{٢} + \text{أ} &، \quad -٢ \le \text{س} \le ٣ \\ \text{ب س} + ١ &، \quad ٣ < \text{س} \le ٥ \end{cases}$ ، هو الاقتران المكامل للاقتران ق(س)

في الفترة [−٢ ، ٥] ، فجد قيم الثابتين أ ، ب .

④ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً، وكان $\int_{\frac{١}{٢}}^{\text{س}} \text{ق}(\text{ص}) \, \text{دص} = \text{س} + \text{جا} \, \pi \, \text{س} + \text{جـ}$

فجد قيمة الثابت جـ ، ثم ق(٢) حيث س $\ge \frac{١}{٢}$

٣ - ٨ خصائص التكامل المحدود (Properties of Definite Integral)

للتكامل المحدود خصائص مهمة تسهل حساب قيمته، ومنها:

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب] فإن:

١ $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = -\int_{ب}^{أ} ق(س)\,دس$

٢ $\int_{أ}^{أ} ق(س)\,دس = ٠$

٣ $\int_{أ}^{ب} ك\,دس = ك\,(ب - أ)$ حيث $ك \in ح$

٤ $\int_{أ}^{ب} ك\,ق(س)\,دس = ك\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس$ حيث $ك \in ح$

٥ $\int_{أ}^{ب} (ق(س) \pm هـ(س))\,دس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س)\,دس$ (يمكن تعميمها على أكثر من اقترانين)

مثال ١ : جد قيمة ما يأتي:

١ $\int_{-٤}^{٦} دس$ ٢ $\int_{-\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٣}} -٣\,جاس\,دس$ ٣ $\int_{١}^{٢} \frac{٣س^{٤} - ٧س^{٢} + ٥}{س^{٢}}\,دس$

الحل :

١ $\int_{-٤}^{٦} دس = (٦ - (-٤)) = ١٠$

٢ $\int_{-\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٣}} -٣\,جاس\,دس = ٠$ (لماذا؟)

٣ $\int_{١}^{٢} \frac{٣س^{٤} - ٧س^{٢} + ٥}{س^{٢}}\,دس = \int_{١}^{٢} \left(\frac{٣س^{٤}}{س^{٢}} - \frac{٧س^{٢}}{س^{٢}} + \frac{٥}{س^{٢}}\right)دس$

$\int_{١}^{٢} (٣س^{٢} - ٧ + ٥س^{-٢})\,دس = \left(س^{٣} - ٧س - \frac{٥}{س}\right)\Big|_{١}^{٢} =$ .... (أكمل)

مثال ٢ : إذا كان $\int_{\text{٣أ+١}}^{\text{٢+٥أ}} \text{٤ دس} = \text{٣٦}$ ، فما قيمة/ قيم الثابت أ ؟

الحل : حسب الخاصية (٣) يكون $\int_{\text{٣أ+١}}^{\text{٢+٥أ}} \text{٤ دس} = \text{٤((٢ + ٥أ) − (٣أ + ١)) = ٣٦}$

أي أن ٨أ + ٤ = ٣٦ ومنها أ = ٤

مثال ٣ : إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، وكان $\int_{\text{٣}}^{\text{٦}} \text{ق(س) دس} = \text{١٠}$ ، فجد:

① $\int_{\text{٣}}^{\text{٣}} \text{ق(س) دس}$ ② $\int_{\text{٦}}^{\text{٣}} \text{ق(س) دس}$

الحل :

① $\int_{\text{٣}}^{\text{٣}} \text{ق(س) دس} = \text{٠}$

② $\int_{\text{٦}}^{\text{٣}} \text{ق(س) دس} = - \int_{\text{٣}}^{\text{٦}} \text{ق(س) دس} = {}^{-}\text{١٠}$

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب] ، وكان ق(س) ≥ ٠ لكل س ∈[أ ، ب] فإن: $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} \geq \text{٠}$

مثال ٤ : بدون حساب التكامل بيّن أن: $\int_{\text{٠}}^{\text{٥}} \frac{\text{٣س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤}} \text{ دس} \geq \text{٠}$

الحل : نبحث في إشارة المقدار $\frac{\text{٣س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤}}$ في الفترة [٠ ، ٥]، وبما أن ٣س ≥ ٠ ، ∀ س ∈[٠ ، ٥]

وكذلك $\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤} > \text{٠}$ ، ∀ س ∈[٠ ، ٥]

إذن $\frac{\text{٣س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤}} \geq \text{٠}$ ∀ س ∈[٠ ، ٥] ومنها $\int_{\text{٠}}^{\text{٥}} \frac{\text{٣س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤}} \text{ دس} \geq \text{٠}$

خاصية المقارنة:

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل في الفترة [أ ، ب]،

وكان ق(س) $\leq$ هـ(س) لكل س $\in$[أ ، ب]، فإن $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس \leq \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, دس$

مثال ٥ : بدون إجراء عملية التكامل بيّن أن: $\int_{١}^{٢} (س^{٢} - ١)\, دس \leq \int_{١}^{٢} (٢س + ٢)\, دس$

الحل : نفرض أن ق(س) = (س^{٢} − ١) − (٢س + ٢) = س^{٢} − ٢س − ٣

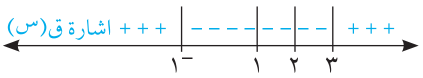
نبحث في إشارة الاقتران ق(س) = س^{٢} − ٢س − ٣

فنلاحظ أن ق(س) $\leq$ ٠ في الفترة [١ ، ٢]،

أي أن س^{٢} − ٢س − ٣ $\leq$ ٠ (انظر الشكل المجاور)

وبالتالي يكون (س^{٢} − ١) $\leq$ (٢س + ٢) في الفترة [١ ، ٢]

أي أن $\int_{١}^{٢} (س^{٢} - ١)\, دس \leq \int_{١}^{٢} (٢س + ٢)\, دس$



مثال ٦ : إذا كان ق(س) $\leq$ ٤ لجميع قيم س $\in$[١ ، ٣]، فما أكبر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٣} ٥ق(س)\, دس$؟

الحل : بما أن ق(س) $\leq$ ٤ لجميع قيم س $\in$[١ ، ٣]،

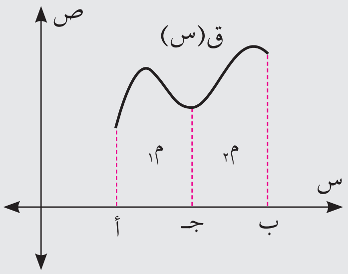
فإن $\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس \leq \int_{١}^{٣} ٤\, دس$

أي أن: $\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس \leq ٨$

إذن المقدار $\int_{١}^{٣} ٥ق(س)\, دس = ٥ \int_{١}^{٣} ق(س)\, دس \leq ٥ \times ٨$

أكبر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٣} ٥ق(س)\, دس$ هي ٤٠.

خاصية الإضافة:



إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة ف ⊆ ح وكان أ ، ب ، جـ أي ثلاثة أعداد تنتمي للفترة ف فإن:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س) دس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس}$$

مثال ٧ : عبّر بتكامل واحد عما يأتي: $\int_{-١}^{٤} \text{ق(س) دس} + \int_{٤}^{٩} \text{ق(س) دس}$

الحل : $\int_{-١}^{٤} \text{ق(س) دس} + \int_{٤}^{٩} \text{ق(س) دس} = \int_{-١}^{٩} \text{ق(س) دس}$

مثال ٨ : إذا كان $\int_{٢}^{٦} \text{ق(س) دس} = ٣$ ، وكان $\int_{٨}^{٦} \text{ق(س) دس} = -٥$ ، فجد $\int_{٢}^{٨} ٢\text{ق(س) دس}$

الحل :

$$\int_{٢}^{٨} \text{ق(س) دس} = \int_{٢}^{٦} \text{ق(س) دس} + \int_{٦}^{٨} \text{ق(س) دس}$$

$$= \int_{٢}^{٦} \text{ق(س) دس} - \int_{٨}^{٦} \text{ق(س) دس} = ٣ - (-٥) = ٨$$

أي أن $\int_{٢}^{٨} ٢\text{ق(س) دس} = ٢ \int_{٢}^{٨} \text{ق(س) دس} = ١٦$

مثال ٩ : إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} ٣\text{س}^{٢} ، & -١ \le \text{س} \le ٢ \\ ٤\text{س} + ٢ ، & ٢ < \text{س} \le ٤ \end{cases}$ ، فجد الاقتران المكامل ت(س)

الحل :

١ عندما $-١ \le \text{س} \le ٢$ فإن $\text{ت(س)} = \int_{-١}^{\text{س}} \text{ق(ص) دص} = \int_{-١}^{\text{س}} ٣\text{ص}^{٢} \text{ دص} = \text{س}^{٣} + ١$

٢ عندما $٢ < \text{س} \le ٤$ فإن:

$$\text{ت(س)} = \int_{-١}^{\text{س}} \text{ق(ص) دص} = \int_{-١}^{٢} \text{ق(س) دس} + \int_{٢}^{\text{س}} \text{ق(ص) دص}$$

$$= ٩ + \int_{٢}^{\text{س}} (٤\text{ص} + ٢) \text{ دص} = ٢\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣$$ (لماذا؟)

ومنها
$$\text{ت(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٣} + ١ & ، \quad -١ \le \text{س} \le ٢ \\ ٢\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣ & ، \quad ٢ < \text{س} \le ٤ \end{cases}$$

لاحظ أن ت(س) متصل ، ت($^-$١) = ٠

نشاط : إذا كان
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٣\text{س}^{٢} - ٧ & ، \quad \text{س} > ٢ \\ ٢\text{س} & ، \quad \text{س} \le ٢ \end{cases} ،$$

فإن
$$\int_{-٢}^{٣} \text{ق(س) دس} = \int_{-٢}^{٢} ٢\text{س دس} + \int_{٢}^{٣} (........) \text{ دس}$$

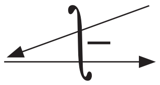
$$= \text{س}^{٢} \Big|_{-٢}^{٢} + \text{س}^{٣} - ٧\text{س} \Big|_{٢}^{٣} = \text{صفر} + ...$$

(لماذا؟)

مثال ١٠: إذا كان $\int_{٠}^{٢} \text{س ق(س) دس} = ٨$ ، ق(٢) = ٥ ، فجد $\int_{٠}^{٢} \text{س}^{٢}\text{ قَ(س) دس}$

الحل : نفرض أن: م = س^{٢} ، دع = قَ(س) دس

دم = ٢س دس ، ع = ق(س)



ومنها ينتج أن:
$$\int_{٠}^{٢} \text{س}^{٢}\text{ قَ(س) دس} = \text{س}^{٢}\text{ ق(س)} - \int_{٠}^{٢} ٢\text{س ق(س) دس}$$

$$\int_{٠}^{٢} \text{س}^{٢}\text{ قَ(س) دس} = \text{س}^{٢}\text{ ق(س)} \Big|_{٠}^{٢} - ٢ \int_{٠}^{٢} \text{س ق(س) دس}$$

$$= (٤ \times \text{ق(٢)} - ٠ \times \text{ق(٠)}) - ٢ \times ٨$$

$$= ٢٠ - ١٦ = ٤$$

تمارين ٣ - ٨

① جد قيمة التكاملات الآتية:

أ $\int_{٠}^{\pi} جا^{٢}س\, دس$

ب $\int_{٠}^{٢} (١ + هـ^{س})^{٢}\, دس$

جـ $\int_{-\sqrt{٣}}^{\sqrt{٣}} (س + ١)(س^{٢} + ٤)\, دس$

د $\int_{-٢}^{١} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} + ٣س + ٩}\, دس$

② أثبت بدون حساب قيمة التكامل فيما يأتي:

أ $\int_{١}^{٢} (س^{٢} + ٢)\, دس \geq \int_{١}^{٢} (٢س - ١)\, دس$

ب $\int_{٢}^{٣} (س^{٢} + ٢)\, دس \geq ٠$

③ عبّر عن كل مما يأتي بتكامل واحد:

أ $\int_{٥}^{٧} س^{٣}\, دس + \int_{١}^{٥} س^{٣}\, دس$

ب $\int_{١}^{٢} \sqrt{س + ٢}\, دس - \int_{٤}^{٢} \sqrt{س + ٢}\, دس$

جـ $\int_{١}^{٣} س^{٢}\, دس - \int_{٣}^{١} ٤\, دس + \int_{٣}^{٥} (س^{٢} + ٤)\, دس$

د $\int_{٢}^{٥} (س - ١)\, دس + \int_{٧}^{٥} \frac{١ - س^{٢}}{س + ١}\, دس$

⑤ إذا كان $\int_{١}^{٥} ق(س)\, دس = ٨$ فما قيمة؟

أ $\int_{١}^{٥} (٣ق(س) - ٢)\, دس$

ب $\int_{٣}^{٧} (٤ق(س - ٢) - ٢س)\, دس$

⑥ إذا كان $\int_{٢}^{٧} ٣ق(س)\, دس = ٩$ ، وكان $\int_{٢}^{٤} ٥ق(س)\, دس = ١٠$، فما قيمة $\int_{٤}^{٧} ٢ق(س)\, دس$ ؟

٣ - ٩ تطبيقات التكامل المحدود (Applications of Definite Integral)

المساحة (Area)

الحالة الأولى: مساحة منطقة محصورة بين منحنى اقتران ومحور السينات في الفترة [أ ، ب]

نظرية (١):

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل في [أ ، ب] فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات في [أ ، ب] تعطى بالعلاقة : $م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)|\, دس$

مثال ١ : احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س + ١ ومحور السينات والمستقيمين س = ٢ ، س = ٣

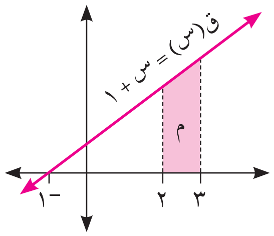
الحل : نجد نقاط تقاطع منحنى الاقتران ق(س) مع محور السينات

وذلك بوضع $س + ١ = ٠$ ومنها $س = {}^{-}١ \notin [٢ ، ٣]$

$س + ١ > ٠ ، \forall س \in [٢ ، ٣]$

$$م = \int_{٢}^{٣} |ق(س)|\, دس = \int_{٢}^{٣} |س + ١|\, دس = \left| \left[\frac{س^{٢}}{٢} + س \right]_{٢}^{٣} \right|$$

$$= \frac{٣^{٢} - ٢^{٢}}{٢} + ١(٣ - ٢) = \frac{٧}{٢}$$ وحدة مربعة.



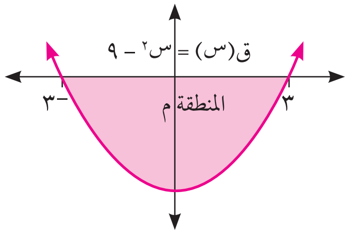
مثال ٢ : احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س² − ٩ ومحور السينات

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنى الاقتران ومحور السينات

بوضع $س^{٢} - ٩ = ٠$ ومنها $س = \pm ٣$

$$م = \int_{-٣}^{٣} |ق(س)|\, دس = \int_{-٣}^{٣} |(س^{٢} - ٩)|\, دس$$

$$= \left| \left(\frac{س^{٣}}{٣} - ٩س\right) \Big|_{-٣}^{٣} \right| = \left| \frac{{}^{-}١٠٨}{٣} \right| = \frac{١٠٨}{٣} = ٣٦$$ وحدة مربعة



الحالة الثانية: مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين، أو أكثر:

نظرية (٢):

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل في [أ ، ب] فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي ق(س) ، هـ(س) في [أ ، ب] تعطى بالعلاقة :

$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س) - هـ(س)|\ دس$$

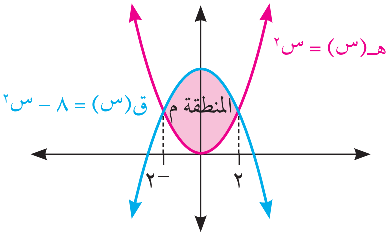
مثال ٣ : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $ق(س) = ٨ - س^{٢}$ ، $هـ(س) = س^{٢}$

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س)

بوضع ق(س) = هـ(س) فتكون ق(س) − هـ(س) = ٠

أي أن $٨ - ٢س^{٢} = ٠$ ومنها س = ±٢

$$م = \int_{-٢}^{٢} |ق(س) - هـ(س)|\ دس$$



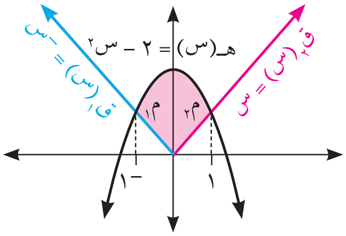
$$م = \int_{-٢}^{٢} |(٨ - ٢س^{٢})|\ دس$$

$$= \left|(٨س - \frac{٢}{٣}س^{٣})\right|_{-٢}^{٢} = \frac{٦٤}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

مثال ٤ : احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = |س| ، $هـ(س) = ٢ - س^{٢}$

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س) بوضع ق(س) = هـ(س)

$$لكن\ ق(س) = \begin{cases} -س &، س \leq ٠ \\ س &، س > ٠ \end{cases}$$



عندما $س \leq ٠$ ، $٢ - س^{٢} = -س$ ومنها س = −١ (لماذا؟!)

عندما $س > ٠$ ، $٢ - س^{٢} = س$ ومنها س = ١ (لماذا؟!)

$$\text{م} = \int_{-١}^{١} \left|\text{هـ(س)} - \text{ق(س)}\right| \text{دس} = \text{م}_{١} + \text{م}_{٢}$$

$$\text{م}_{١} = \int_{-١}^{٠} \left|(٢ - \text{س}^{٢}) - (^{-}\text{س})\right| \text{دس}$$

$$= \int_{-١}^{٠} \left|(٢ - \text{س}^{٢} + \text{س})\right| \text{دس} = \left|(٢\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}) \Big|_{-١}^{٠}\right| = \frac{٧}{٦} \text{ وحدة مربعة}$$

$$\text{م}_{٢} = \int_{٠}^{١} \left|(٢ - \text{س}^{٢} - \text{س})\right| \text{دس} = \left|(٢\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}) \Big|_{٠}^{١}\right| = \frac{٧}{٦} \text{ وحدة مربعة}$$

$$\text{م} = \text{م}_{١} + \text{م}_{٢} = \frac{٧}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

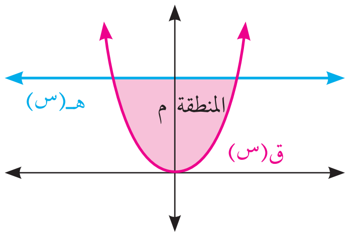
نلاحظ أن: $\text{م}_{١} = \text{م}_{٢}$ ، وبالتالي $\text{م} = ٢ \times \text{م}_{١} = ٢ \times \frac{٧}{٦} = \frac{٧}{٣}$

مثال ٥ : إذا علمت أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $\text{ق(س)} = \text{س}^{٢}$ ، $\text{هـ(س)} = \text{جـ}$ ، $\text{جـ} \in \text{ح}$ هي ٣٦ وحدة مربعة ، فجد قيمة/ قيم جـ .

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س)،

بوضع ق(س) = هـ(س)

ومنها $\text{س}^{٢} - \text{جـ} = ٠$ أي أن $\text{س} = \pm\sqrt{\text{جـ}}$



$$\text{م} = \int_{-\sqrt{\text{جـ}}}^{\sqrt{\text{جـ}}} \left|\text{ق(س)} - \text{هـ(س)}\right| \text{دس} \quad \text{أي أن:}$$

$$٣٦ = \int_{-\sqrt{\text{جـ}}}^{\sqrt{\text{جـ}}} (\text{هـ(س)} - \text{ق(س)}) \text{دس} \quad \text{ومنها} \quad ٣٦ = \int_{-\sqrt{\text{جـ}}}^{\sqrt{\text{جـ}}} (\text{جـ} - \text{س}^{٢}) \text{دس}$$

$$٣٦ = \text{جـ}(\sqrt{\text{جـ}} + \sqrt{\text{جـ}}) - \frac{(\sqrt{\text{جـ}})^{٣} - (^{-}\sqrt{\text{جـ}})^{٣}}{٣}$$

ينتج $٣٦ = \frac{٤\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}}}{٣}$ ومنها $\text{جـ} = ٩$

تمارين ٣ – ٩

① احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جتاس ومحوري السينات والصادات والواقعة في الربع الأول.

② جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٣ – $س^{٢}$ والمستقيم المار بالنقطتين أ(٠ ، ٠) ، ب(١ ، ٢) ومحور الصادات والواقعة في الربع الأول.

③ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ($س^{٢}$ – ٩) ($س^{٢}$ – ١) ومحور السينات الواقعة في الربع الثالث.

④ احسب المساحة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ق(س) = $س^{٢}$ ، هـ(س) = ٤ ، ك(س) = ٢س

ورقة عمل (٢)

① إذا كانت $\sigma_{٨}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [أ ، ب] والعنصر الثالث فيها يساوي ٢ ، وكانت $\sigma_{١٢}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [أ ، ب] والعنصر الخامس فيها يساوي ٤ ، جد قيم أ ، ب.

② إذا كان ق(س) = ٢س معرفاً في الفترة [١ ، ب]، وكان م($\sigma_{ن}$ ، ق) = ٣٥ + $\frac{٢٥}{ن}$ ، فما قيمة الثابت ب ؟

③ إذا كان ت(س) = $\int_{١}^{س}$ (أ + $هـ^{ص}$) دص وكان تَ(٢) = $^{-}١$ ، احسب قيمة أ .

④ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أس + ١ ، & ١ \le س \le ٢ \\ ٣س^{٢} ، & ٢ < س \le ٥ \end{cases}$ ،فجد قيمة الثابت أ علماً بأن $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس = ١٨

⑤ إذا كان ق(س) = |٢ – س| ، س ∈[٠ ، ٥] ، أوجد الاقتران المكامل ت(س).

⑥ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{١}{٤}$ $س^{٢}$ والمماس المرسوم له عند النقطة (٤ ، ٤) ومحور السينات.

⑦ إذا كان ك(٣) = ٣ك(١) = ٦ ، فما قيمة $\int_{١}^{٣}$ $\frac{س\,كَ(س) - ك(س)}{س^{٢}}$ دس ؟

اختبار الوحدة:

① اختر رمز الإجابة الصحيحة:

① إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين مختلفين للاقتران ق(س)، فماذا يمثل $\int$(م(س) − هـ(س)) دس ؟

أ) اقتراناً ثابتاً   ب) اقتراناً تربيعياً   ج) اقترانا خطّياً   د) صفراً

② إذا كان ق(س) = $\int$(٣س^{٢} − ٢) دس ، وكان ق(٢) = ٩، فما قيمة ق(−٢)؟

أ) −١   ب) −٩   ج) ٤   د) ١

③ ما قيمة $\int$ قتا^{٤}س ظتاس دس؟

أ) $\frac{-١}{٥}$ قتا^{٥}س + جـ   ب) $\frac{-١}{٤}$ قتا^{٤}س + جـ

ج) $\frac{-١}{٣}$ قتا^{٣}س + جـ   د) $\frac{١}{٣}$ قتا^{٣}س + جـ

④ إذا كانت $\sigma_{١٠}$ = {أ ، ١ ، ..... ، ١٧ ، ب} تجزئةً منتظمةً للفترة [أ ، ب]، فما قيمة أ ؟

أ) صفر   ب) −١   ج) −٢   د) −٣

⑤ إذا كان ق(س) = ٢س + ١ معرفاً في الفترة [١ ، ٢] وكانت $\sigma_{ن}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [١ ، ٢] فما قيمة $\underset{ن \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}$ م($\sigma_{ن}$ ، ق)؟

أ) ١   ب) ٢   ج) ٤   د) غير موجودة

⑥ إذا كان $\int_{٢}^{٣}$ ق(س) دس = ٦ ، $\int_{٢}^{٧}$ (٤ + ق(س)) دس = ٣٠ ، فما قيمة $\int_{٣}^{٧}$ ٢ق(س)) دس؟

أ) ٨   ب) ١٦   ج) ٦٠   د) ١٢

⑦ ما قيمة $\int_{١}^{٢} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}$ دس؟

أ) $\frac{١}{٦}$ ب) $\frac{١}{٣}$ ج) $\frac{١}{٢}$ د) ١

٨ إذا كان $ق(س)$ كثير حدود بحيث $ق'(س) = ٣س - ٢$، فما قيمة $ق(٣) - ق(-١)$؟

أ) ٠ ب) ٢ ج) ٤ د) ٨

٩ إذا كان $ق(س) = س \, لو_{هـ} س$ ، فما قيمة $\int_{\frac{١}{٢}}^{\frac{هـ}{٢}} ق''(س) \, دس$؟

أ) -١ ب) ٠ ج) ١ د) هـ

أجب عن الأسئلة الآتية :

٢ أثبت أن: الاقتران $م(س) = \sqrt{١ - س^{٢}}$ هو اقتران أصلي للاقتران $ق(س) = \frac{-س}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$

٣ إذا كانت $ق''(س) = س^{٢} + ٣جاس$ ، $ق'(٠) = ٣$ ، $ق(٠) = ٢$ ، فجد $ق(س)$.

٤ جد كلاً من التكاملات الآتية:

١ $\int س \sqrt{س^{٢} - ٣} \, دس$

٢ $\int \frac{١}{س^{١٠} + س} \, دس$

٤ $\int قا(٣س + ١) \, ظا(٣س + ١) \, دس$

٦ $\int لو_{هـ}(س^{٢} - ١) \, دس$

٧ $\int \frac{س^{٢} + ١}{س^{٣} + س} \, دس$

٩ $\int (جتا^{٤}س - جا^{٤}س) \, دس$

١٠ $\int (قتاس + ظتاس)^{٨} \, قتاس \, دس$

١١ $\int (س^{٨} - ٦س)^{٦} \, دس$

١٢ $\int_{١}^{٢} ٥٦(س - ٢)^{٢} (س - ١)^{٥} \, دس$

١٣ $\int_{هـ}^{هـ^{٢}} لو_{هـ}س \, دس$

١٤ $\int_{٠}^{٢} \sqrt{س^{٤} + س^{٢}} \, دس$

١٥ $\int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٢} \sqrt{س^{٢} + ١}} \, دس$

٥ إذا كانت $\sigma_{١٢}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [أ ، ب]، وكان العنصر السابع فيها يساوي ١٢، والعنصر الرابع فيها يساوي ٧، فما قيم الثابتين أ ، ب ؟

٦ إذا كان ق ، هـ اقترانين معرفين في الفترة [٢ ، ١٠] وكان هـ(س) = ٣ق(س) + س
بحيث م(σ$_{٤}$ ، ق) = ٦ ، جد م(σ$_{٤}$ ، هـ) معتبرًا س$_{ر}^{*}$ = س$_{ر}$ علماً بأن σ$_{٤}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [٢ ، ١٠]

٧ استخدم تعريف التكامل المحدود لإيجاد $\int_{١}^{٥}$ ٣س دس

٨ أثبت أن : ٠ ≤ $\int_{-٢}^{٢}$ $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ دس ≤ ٨

٩ إذا كان ق(س) متصلاً على مجاله وكان $\int_{٠}^{س}$ ق(ص) دص = س^{٢} − $\sqrt{س}$ ، فجد ق(٤) ، قَ(٤).

١٠ إذا كان ت(س) =
- ٢س^{٢} + ٢جـس ، ٢ ≤ س ≤ ٣
- أس − ب ، ٣ < س ≤ ٥

، هو الاقتران المكامل للاقتران المتصل ق(س) في الفترة [٢ ، ٥]. جد:

أ قيم أ ، ب ، جـ
ب $\int_{٢}^{٤}$ ق(س) دس

١١ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س) فيما يأتي :

أ ق(س) = س + ٢ ، هـ(س) =
- ٤ − س^{٢} ، س ≤ ٠
- ٤ − س ، س > ٠

ب ق(س) = ٢جاس ، هـ(س) = ١ في الفترة [٠ ، π]

١٢ إذا كان $\int_{١}^{٣}$ (جا^{٢}س + هـ^{س}) دس = أ ، $\int_{١}^{٣}$ (جتا^{٢}س) دس = ب ، فجد قيمة أ + ب.

المراجع

بسيوني، جابر أحمد (2014) : الإحصاء العام، دار الوفاء لدنيا الطباعة، الإسكندرية .

حمدان، فتحي خليل (2012) ، الرياضيات للعلوم الإدارية والمالية، دار وائل للنشر، عمان .

شاهر، ثائر فيصل (2009) : الرياضيات في العلوم المالية والإدارية والاقتصادية، دار الحامد للنشر والتوزيع عمان.

رمضان، زياد (2001) : مبادئ الإحصاء الوصفي والتطبيقي والحيوي، دار وائل للطباعة والنشر، عمان، 2001.

الجندي، حسن عوض (2014) :منهج الرياضيات المعاصر محتواه واساليب تدريسه، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة .

المومني، غازي فلاح، الرياضيات المالية المعاصرة ، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، 2014

الخطيب، روحي إبراهيم (2012) : التفاضل والتكامل ج1، دار المسيرة، عمان .

الخطيب، روحي إبراهيم (2012) : التفاضل والتكامل ج2، دار المسيرة، عمان .

عدنان عوض، أحمد علاونة ، مفيد عزام ،(1990) –دار الفكر – عمان –الأردن

فريدريك بل (1986): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الأول (ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية للنشر والتوزيع

فريدريك بل (1986): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الثاني(ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية للنشر والتوزيع

ابو أسعد ، صلاح عبد اللطيف (2010): أساليب تدريس الرياضيات، الطبعة الاولى. دار الشروق للنشر والتوزيع

الزغلول، عماد (2005): الإحصاء التربوي، الطبعة الاولى، دار الشروق للنشر والتوزيع.

حسين فرج، عبد اللطيف (2005): طرق التدريس في القرن الواحد والعشرين، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة/ عمان

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume1

Howard Anton, John Wiley (1999): Calculus, 6th Edition ,

Bell,E,T (1937):Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N.Y

Lanl B.Boyer(1989): History of Mathematics Wiley,N.Y

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume2

Edwards & Penny(1994): Calculus with Analytic Geometry, 4th Edition, Prentice hall

لجنة المناهج الوزارية:

د. صبري صيدم
د. بصري صالح
م. فواز مجاهد
أ. ثروت زيد
أ. عزام أبو بكر
أ. عبد الحكيم أبو جاموس
د. شهناز الفار
د. سمية النخالة
م. جهاد دريدي

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد
د. محمد صالح (منسقًا)
د. معين جبر
د. علي عبد المحسن
د. تحسين المغربي
د. عادل فوارعة
أ. وهيب جبر
د. عبد الكريم ناجي
د. عطا أبوهاني
د. سعيد عساف
د. محمد مطر
د. علا الخليلي
د. شهناز الفار
د. علي نصار
د. أيمن الأشقر
أ. ارواح كرم
أ. حنان أبو سكران
أ. كوثر عطية
د. وجيه ضاهر
أ. فتحي أبو عودة
د. سمية النخالة
أ. أحمد سياعرة
أ. قيس شبانة
أ. مبارك مبارك
أ. عبد الكريم صالح
أ. نادية جبر
أ. أحلام صلاح
أ. نشأت قاسم
أ. نسرين دويكات

المشاركون في ورشات عمل كتاب الرياضيات للثاني عشر العلمي والصناعي:

خليل محيسن
نادية عباسي
أحمد العملة
فداء أبو عرة
جوني مصلح
توفيق السعدة
رائد ملاك
أشجان جبر
علي زايد
ابتسام بعباع
جميل معالي
سميه سلامه
ايناس سباعنة
لبنى ابو باشا
يوسف الحروب
رهام مصلح
عريب الزبون
فهمي بشارات
خالد طقاطقة
صهيب عكر
ماهر أبو بدر
خوله الشاعر
فادي زيدان
عبدالرحمن عزام
خالد الدشت
هاشم عبيد
أروى مشارقة
آسيا العلامي
صفية النجار
سناء أبو حماد
محمد ابو سليم
سهيلة بدر
هيثم مسالمة
عبير لعسوس
محمد عليان
مطيعة صوافطه
سوزان عبدالحميد
محمد موسى
أيمن ابو زياد
محمد مسلم
محمد الفرا
فلاح الترك
رائد عبد العال
رفيق الصيفي
حسين عرفات
سميرة حنيف
مؤيد الحنجوري
سرين أبو عيشة
ابتسام اسليم
منال الصباغ
د.رحمة عودة
هانم النخالة
عزيزة عيطة
صلاح الترك
باسم المدهون
سمير عمران
مصطفى قنيص
نادر أبو عقيل
مريم الحوامدة
وهيب جبر
عبد الحافظ الخطيب
كفاية مضية
محمد دراوشة
عماد النابلسي
نجود ريحان

تم مناقشة الكتاب بورشات عمل على مستوى مديريات الوطن

تَمَّ بِحَمْدِ الله