١٢

بسم الله الرحمن الرحيم

دولــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الأدبي والشرعي

الرزمة التعليمية

٢٠٢٤

دولــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم
مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
+970-2-2983280 هاتف | +970-2-2983250 فاكس

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

المحتويات

يتوقع من الطلبة بعد دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيفها في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. إيجاد متوسط التغير للاقتران ق(س).
٢. التعرف على مفهوم المشتقة الأولى للاقتران ق(س).
٣. استخدام قواعد الاشتقاق في إيجاد المشتقة الأولى للاقتران ق(س).
٤. تحديد مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) في مجاله.
٥. تعيين القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) في مجاله وتحديد نوعها.
٦. التعرف على مفهوم التكامل.
٧. إيجاد التكامل غير المحدود.
٨. استخدام خصائص التكامل المحدود في ايجاد التكاملات المختلفة.
٩. التّعرف إلى المصفوفة وعناصرها.
١٠. إيجاد ناتج جمع مصفوفتيْن وطرحهما.
١١. إيجاد ناتج ضرب مصفوفتيْن.
٢١. حل معادلات مصفوفية.
١٣. إيجاد النظير الضربيّ للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.
١٤. حلّ نظام من المعادلات الخطيّة باستخدام قاعدة كريمر.
١٥. حلّ معادلات أسية.
١٦. حلّ معادلات لوغاريتماتية.
١٧. التّعرف إلى مفهوم المتسلسلة.
١٨. التّعرف إلى المتسلسلة الحسابية وإيجاد مجموعها.
١٩. التّعرف إلى المتسلسلة الهندسية وإيجاد مجموعها.
٢٠. التعرف إلى العلامة المعيارية.
٢١. التعرف إلى منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.
٢٢. توظيف خواص منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في حل مشكلات حياتية.

الوحدة الأولى: التّفاضل والتّكامل

Differentiation and Integration

Rate Of Change

(١ - ١)

متوسط التغير

تعريف

إذا كان ص= ق(س) اقتراناً، وتغيرت س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن:

التغير في قيمة س = $س_٢ - س_١$، ويرمز له بالرمز Δس

التغير في قيمة ص = $ص_٢ - ص_١$ = ق($س_٢$) − ق($س_١$) ويرمز له بالرمز Δص

مثـال (١)

إذا كان ص = ق(س) = ٥-٢$س^٢$، وكانت $س_١$ = ١، Δس =٢، فما قيمة التغير في قيمة ص؟

الحلّ:

Δس = $س_٢ - س_١$

٢ = $س_٢$−١

$س_٢$ = ٣

Δص = ق($س_٢$) − ق($س_١$) = ق(٣) − ق(١)

= (٥-٢$(٣)^٢$) − (٥-٢$(١)^٢$) (لماذا؟)

= -١٣ − ٣

= -١٦

أناقش: ما التغير في قيمة ص عندما يكون قيمة التغير في س يساوي ١؟ (في المثال ٢)

تعريف

إذا كان ق(س) اقتراناً، وتغيرت س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن:

متوسط التغير للاقتران ق(س) = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$ ، $س_١ \neq س_٢$

مثـال (٢)

أَحسبُ متوسط التغير في الاقتران ق(س) = س^{٢} + ٥، عندما تتغير س في [٣،٥] .

الحلّ: ق(٣) = (٣)^{٢} + ٥ = ١٤

ق(٥) = (٥)^{٢} + ٥ = ٣٠

متوسط التغير للاقتران = $\frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$ = $\frac{ق(٥) - ق(٣)}{٥ - ٣}$ = $\frac{٣٠ - ١٤}{٢}$ = ٨

مثـال (٣)

إذا كان هـ (س)= ٢ق(س) +٤، وكان متوسط تغير الاقتران ق(س) على [٣، ٧] يساوي ١٠، أجدُ متوسط التغير للاقتران هـ (س) على الفترة ذاتها.

الحلّ: متوسط التغير للاقتران ق(س) = $\frac{ق(٧) - ق(٣)}{٧ - ٣}$ = ١٠

متوسط التغير للاقتران هـ(س) = $\frac{هـ(٧) - هـ(٣)}{٧ - ٣}$ = $\frac{(٢ق(٧) + ٤) - (٢ق(٣) + ٤)}{٧ - ٣}$

= $\frac{٢ق(٧) - ٢ق(٣)}{٧ - ٣}$ = ٢ x $\frac{ق(٧) - ق(٣)}{٧ - ٣}$ = ٢x١٠ = ٢٠

تمارين ومسائل (١ - ١)

١ أَجدُ متوسط التغير في كل من الاقترانات الآتية عندما تتغير س من س$_{١}$ إلى س$_{٢}$.

أ) هـ(س) = س^{٢} + ٢ س$_{١}$=٢ ، س$_{٢}$= ٥.

ب) ل(س) = $\sqrt[٣]{س+٢}$ س$_{١}$= -١ ، س$_{٢}$= ٦.

٢ إذا كان ق(٣) =٨، وكان متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$= ٣ إلى س$_{٢}$= ٥ يساوي -٢، أَجد ق (٥).

٣ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) = أس^{٢} – ٥س في [١ ، ٣] يساوي -٩،أجد قيمة الثابت أ.

٤ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في [٢ ، ٤] يساوي ٥، أجد متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ٣ق(س) – ٢ في تلك الفترة.

المشتقة الأولى

تعريف*

إذا كان ص= ق(س) معرفاً عند س = أ، وكانت $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{أ}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{هـ}}$ موجودة، فإن ق(س) يكون قابلاً للاشتقاق عند س= أ وتسمى المشتقة الأُولى للاقتران ق(س) عند س= أ .

ويرمز لها بالرمز قَ(أ) أو $\left.\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{\text{س}=\text{أ}}$. أو $\text{صَ}\Big|_{\text{س}=\text{أ}}$

قاعدة (١): إذا كانت ص= ق(س)= أ ، حيث أ عدد حقيقي، فإن قَ(س)= $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = صفر.

قاعدة (٢): إذا كانت ص= أ س+ ب، حيث أ ، ب عددان حقيقيان، فإن $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = أ .

مثال (١)

أَجدُ مشتقة كل من الاقترانات الآتية: أ) ق(س) = ٩٨ ب) ص=٥س

الحلّ: أ) ق(س) = ٩٨ (اقتران ثابت) إذن: قَ (س) = صفر.

ب) ص = ٥س (اقتران خطي) إذن: $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٥

قاعدة (٣): إذا كان ق(س) = $\text{س}^{\text{ن}}$، فـإنّ قَ(س) = ن $\text{س}^{\text{ن}-١}$ ،حيث: ن عدد حقيقي، ن ≠ ٠، س ≠ ٠ .

مثال (٢)

أَجدُ مشتقة الاقتران ق(س) = $\text{س}^{٥}$ عند النقطة (-٢، -٣٢).

الحلّ: قَ(س) = ٥$\text{س}^{٥-١}$ = ٥$\text{س}^{٤}$ ومنها قَ(-٢) = ٥$(-٢)^{٤}$

= ٥ × ١٦ =٨٠

* تعريف المشتقة الأولى للعلم فقط.

نشاط (٢)

إذا كان ق(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ فلإيجاد قَ(-٨):

ق(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ = $\text{س}^{\frac{٢}{٣}}$ (لماذا)؟ ومنها قَ(س) = $\frac{٢}{٣}\,\text{س}^{\frac{٢}{٣}-١}$

= $\frac{٢}{٣}\,\frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}}}$ ومنها قَ(-٨) = ______________.

قاعدة (٤): إذا كان ق(س) اقترانا قابلاً للاشتقاق، وكان ﻫ عدداً حقيقياً، ﻫ ≠ ٠، فإن الاقتران هـ(س) = ﻫ.ق(س) هو اقتران قابل للإشتقاق، وتكون هـَ(س) = ﻫ.قَ(س)

مثـال (٣)

إذا كان هـ(س) = ٥ق(س)، وكان قَ(٦) = -١، فما قيمة هـَ(٦)؟

الحلّ: هـ(س) = ٥ق(س) إذن هـَ(س) = ٥قَ(س) ومنها هـَ(٦) = ٥ × قَ(٦) ومنها هـَ(٦) = ٥ × -١= -٥

تمارين ومسائل (١ - ٢)

١ أَجدُ مشتقة كل من الاقترانات الآتية عند قيمة س المقابلة لكل منها:

أ) ق(س) = -٢ $\sqrt{٥}$ عند س=١٠٠

ب) ق(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}^{٥}}$ عند س = ١

ج) ق(س) = $\text{س}^{٣}$ عند س = -١

٢ أجد قَ(س) لكل من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = $\frac{٦٤}{٥\,\text{س}^{٥}}$ ، س ≠ صفر ب) ق(س) = $(٠,٠٠٣)^{٥}$ جـ) ق(س) = ٥$\text{س}^{٤}$

٣ إذا كان ص = ٦ق(س)، وكان قَ(٥) = ٧، أَجدُ قيمة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند س = ٥

٤ إذا كان ق(س) = ﻫ$\text{س}^{٣}$، وكان قَ(٢) = ٦٠، فما قيمة الثابت ﻫ ؟

قواعد الاشتقاق

قاعدة (١)*: إذا كان ق(س) و هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان ك(س) = ق(س) ± هـ(س) فإن: الاقتران ك(س) يكون قابلاً للاشتقاق، ويكون كَ(س) = قَ(س) ± هـَ(س).

وبلغة أخرى: (ق + هـ)َ(س) = قَ(س) + هـَ(س)

مثال (١)

إذا كان ق(س) = ٥س^{٢}، وكان هـ(س) = ٤س^{٣}، أَجد:

أ) (ق + هـ)َ(س)　　　　ب) (ق − هـ)َ(١)

الحلّ: قَ(س) = ١٠س. كما أن: هـَ(س) = ١٢س^{٢}

أ) بحسب القاعدة: (ق + هـ)َ (س) = قَ(س) + هـَ(س)

ومنها: (ق + هـ)َ(س) = ١٠س + ١٢س^{٢} (لماذا)؟

ب) قَ(١) = ١٠(١) =١٠

هـَ(١) = ١٢(١)^{٢} = ١٢

وبما أن (ق − هـ)َ(س) = قَ(س) − هـَ(س)

فإن: (ق − هـ)َ(١) = قَ (١) − هـَ(١) = (١٠) − (١٢) = -٢

نشاط (١)

إذا كان ق(س) = ك(س) - ٢م(س) + ٧ حيث: ك(س) = ٣س^{٣} + ٢، م(س) = ٣س + ٢، فإن:

كَ(س) = ٩س^{٢}　　　　مَ(س) = ٣

قَ(س) = كَ(س) − ٢مَ(س)

= ________________　　ومنها: قَ(-٢) = ________________.

* يمكن تعميم القاعدة لأكثر من اقترانين.

قاعدة (٢): إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س = أ فإن:

(ق × هـ)َ(أ) = ق(أ) × هـَ(أ) + هـ(أ) × قَ(أ).

وبالكلمات: مشتقة حاصل ضرب اقترانين= الاقتران الأَول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأَول

مثـال (٢)

إذا كان ق(س) = (٣س^{٢} -٥س) (٧-٤س) فإن قَ(س) تساوي:

قَ(س) = الاقتران الأَول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأَول

قَ(س) = (٣س^{٢} − ٥س) (-٤) + (٧ − ٤س) (٦س − ٥)

ومنها قَ(٢) = (٣(٢)^{٢} − ٥(٢)) (-٤) + (٧ − ٤(٢)) (٦(٢) − ٥)

= (٢ × -٤) + (-١ × ٧) = -١٥

قاعدة (٣): إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان هـ (س) ≠ ٠ عند س = أ فإن:

$$\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(\text{أ}) = \frac{(\text{هـ}(\text{أ}) \times \text{قَ}(\text{أ})) - (\text{ق}(\text{أ}) \times \text{هـَ}(\text{أ}))}{(\text{هـ}(\text{أ}))^{٢}}$$

، وبالكلمات:

$$\text{مشتقة ناتج قسمة اقترانين} = \frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{\text{مربع المقام}}$$

مثـال (٣)

إذا كان ق(س) = $\frac{٣ - ٤\text{س}}{٢\text{س} - ٦}$ ، س ≠ ٣، أتحقق أن قَ(١) = $\frac{٩}{٨}$

الحلّ:

$$\text{قَ(س)} = \frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{\text{مربع المقام}}$$

$$\text{قَ(س)} = \frac{(٢\text{س} - ٦)\ (-٤) - (٣ - ٤\text{س})(٢)}{(٢\text{س} - ٦)^{٢}}$$

$$\text{قَ(١)} = \frac{(-٤)\ (-٤) - (-١)(٢)}{(-٤)^{٢}} = \frac{١٨}{١٦} = \frac{٩}{٨}$$

تمارين ومسائل (١ - ٣)

١ بالاعتماد على البيانات في الجدول المجاور أَحسبُ ما يأتي:

قَ(٥)	قَ َ(٥)	هـ(٥)	هـَ(٥)
٩	٢	٣	-١

أ) (ق +٢هـ)َ(٥)   ب) (٣ق −٤هـ)َ (٥)

جـ) $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$َ(٥)   د) (ق×هـ)َ (٥)

٢ إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٧، هـ (س) = ٢ − ٣س، أجد:

أ) (ق +هـ)َ(١)   ب) $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$َ (س)   جـ) $\frac{قَ (س)}{هـَ(س)}$

د) (ق×هـ)َ(٢)   هـ) قَ (٢) × هـ (٢)   و) (س^{٢}× ق(س))َ(-٢)

٣ إذا كان (ق × هـ)َ(٧) = ١٢، ق(٧) = ٣، قَ(٧) = ٦، هـَ(٧) = ٣ أجد هـ (٧)

٤ إذا كان (ق ÷ هـ)َ(٩) = ٣، ق(٩) = ٥، قَ(٩) = -١٢، هـ(٩) = -٣

أجد هـَ (٩)، علماً بأن هـ(س) ≠ صفر

٥ إذا كان ق(س) = ٲس^{٢} + ٦س-٥، وكان قَ(٣) =٠، فما قيمة الثابت ٲ؟

٦ إذا كان ق(س) = س^{٢} - ٢أس + ٣، هـ(س) = س^{٢} - ٢، وكان (ق × هـ)َ(١) = ٨، أجد قيمة الثابت أ.

٧ إذا كان ق(س) = $\frac{ٲس − ٥}{٦ − ٤س}$ ، وكان قَ(١)= - $\frac{١}{٢}$ ، فما قيمة الثابت ٲ؟

القيم القصوى للإقتران

تعريف

يكون الاقتران ق(س) متزايداً على الفترة [أ ، ب]،إذا كان: لكل $س_{٢} > س_{١}$ فإنَّ:
ق($س_{٢}$)> ق($س_{١}$) لأي عددين $س_{١}$، $س_{٢}$ ∋[أ، ب].
ويكون ق(س) متناقصاً على الفترة [أ ، ب]، إذا كان: لكل $س_{٢} > س_{١}$، فإنَّ ق($س_{٢}$)<ق($س_{١}$)
لأي عددين $س_{١}$، $س_{٢}$ ∋[أ، ب].

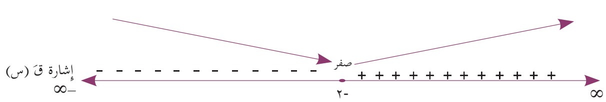
نظرية: إذا كان ق(س) معرفاًعلى الفترة [أ ، ب]، فإن ق(س) يكون:
١) متزايداً في الفترة [أ ، ب]، إذاكانت قَ(س)>صفر لكل س في الفترة]أ،ب[.
٢) متناقصاً في الفترة [أ ، ب]، إذاكانت قَ(س)<صفر لكل س في الفترة]أ،ب[.
٣) ثابتاً في الفترة [أ ، ب]، إذاكانت قَ(س) = صفر لكل س في الفترة]أ،ب[.

مثـال (١)

أحدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = $س^{٢}$ + ٤س − ٧ ، س ∋ ح

الحلّ: نجد قَ(س) فتكون: قَ(س) = ٢س+٤ نضع قَ(س)= صفر ومنها: ٢س+٤=٠ إذن س= -٢

أبحث في إشارة قَ (س) في جوار س= -٢



من إشارة قَ(س) في الشكل المجاور، يكون الاقتران ق(س) متزايداً على الفترة [-٢،∞[، ويكون متناقصاً في الفترة]-∞، -٢].

أتعلـــم

يكون للاقتران ق(س) المعرف على ح قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محلية عند س= أ، إذا كان:
١. قَ(أ) = صفراً. ٢. يغيّر ق(س) من سلوكه حول س= أ من التزايد إلى التناقص أو العكس.

مثـال (٢)

أُجد ُالقيم القصوى المحلية للاقتران هـ(س)= س^٣-٢٧س، س∈ح، إن وجدت، وأحدد نوعها.

الحلّ: هـَ (س) = ٣ س^٢– ٢٧ هـَ (س) = ٠ (لماذا ؟)

٣ (س^٢ – ٩) = ٠ ومنها (س – ٣) (س + ٣) = ٠ س= ٣ أو س= -٣ (لماذا ؟)

إشارة هـَ (س)

صفر صفر

–∞ + + + + + + + + + + + + – – – – – – – – – – – – – – + + + + + + + + + + + + + ∞

-٣ ٣

من إشارة هـَ (س) يتضح أَن الاقتران هـ(س) قد غيّر من سلوكه، حول س= -٣ من التزايد إلى التناقص.

إذن للاقتران هـ(س) قيمة عظمى محلية عند س= -٣، وقيمتـها هـ (-٣) =٥٤. كما أَن هـ(س) غيّر سلوكه من التناقص إلى التزايد حول س = ٣. إذن للاقتران هـ (س) قيمة صغرى محلية عند س= ٣ وقيمتها هـ (٣) = -٥٤.

تمارين ومسائل (١ - ٤)

١ إذا كان ق(س) = ٣س^٢+٦س-١، س∈ح، أجد:

أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على ح.

ب) القيم القصوى للاقتران ق(س)، وأحدد نوع كل منها.

٢ ما قيمة الثابت جـ في الاقتران ق(س) = ٥ – جـ س – س^٢، والتي تجعل ق(٢) قيمة عظمى محلية.

٣ ما فترات التزايد والتناقص للاقتران هـ(س) = (س + ٢) × (-٢س – ٤).

٤ أحددُ فترات التزايد والتناقص للاقتران ك(س) = $\frac{١}{٣}$ س^٣ + ٢س^٢ – ٥س – ٥، س∈ح، وما القيم القصوى (العظمى والصغرى) للاقتران ك(س)؟ وما نوع كل منها؟

٥ أَبين أَنه لا يوجد للاقتران ع(س) = ٢س^٣ + ٢ قيم قصوى في مجاله.

ورقة عمل

السؤال الأول: اختر رمز الاجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات التالية:

١ إذا كان ق(س) = ٥ $\sqrt{٩س^{٣}}$ ، فما قيمة قَ(١)؟

أ. -٤ ب. ٤ جـ. ٢ د. -٤,٥

٢ إذا كان متوسط متغير الاقتران ص = ق(س) على فترة ما يساوي $\frac{٣}{٤}$ وكانت Δص = ٩، فما قيمة Δص - Δس؟

أ. ٤ ب. -٤ جـ. ١٢ د. -٣

٣ إذا كان قَ(٤) = ٧، ق(٤) = ٢، هـَ(٤) = -٨ = ٢هـ (٤)، فما قيمة $\left(\frac{ق}{هـ}\right)'$(٤)؟

أ. $\frac{-٣}{٤}$ ب. $\frac{-٦}{٤}$ جـ. $\frac{-٣}{٨}$ د. $\frac{-٣}{١٦}$

٤ إذا كان قَ(٢) = صفر، ق(٢) = -٧، وكان للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية وحيدة على مجالهِ فما أصغر قيمة للاقتران ق(س)؟

أ. ٢ ب. -٢ جـ. ٧ د. -٧

السؤال الثاني: أجد قَ(س) فيما يأتي:

١. ق(س) = (٣س^{٣}-٢) (٧س^{٢} - ٣س + ١) عند س = ١

٢. ق(س) = $\sqrt[٣]{س^{٥}}$ - $\frac{٢}{س^{٣} - ٧}$ + ٥ ، عندما س = -١

التكامل غير المحدود

نشاط (١)

إذا كان ق(س) اقتراناً، حيث أن مشتقته $ق^{/}(س) = ٢س$، فإن قاعدة ق(س) **يمكن أن تكون:**

$ق_{١}(س) = س^{٢}$.

$ق_{٢}(س) = س^{٢} +$ ــــــ.

$ق_{٣}(س) = س^{٢} + \frac{١}{٣}$ إذن الصورة العامة للاقتران هي ق(س) = ــــــــــــــــــــ.

تعريف

إذا كان ق(س) اقتراناً مشتقته الأُولى قَ(س)، فإن التكامل غير المحدود للاقتران قَ(س) بالنسبة لـ س يساوي ق(س) +جـ، ويرمز لعملية التكامل بالرمز $\int$، وبصورة عامة فإنَّ:

$\int$ قَ(س) ءس = ق(س) + جـ، حيث جـ عدد حقيقي.

مثال (١)

إذا كان $ق^{/}(س) = ٦س$.فإن $\int$ قَ(س) ءس، ق(س) = $٣س^{٢}$ + جـ، حيث جـ عدد حقيقي.

قواعد التكامل غير المحدود:

قاعدة (١): $\int$ أ ءس = أ س+جـ، حيث أ،جـ عددان حقيقيان.

مثال (٢)

أجد $\int$ ٩ ءس **الحلّ:** $\int$ ٩ ءس = ٩س + جـ

قاعدة (٢): $\int س^{ن} ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن + ١}$ + جـ، حيث ن،جـ عددان حقيقيان، ن $\neq$ -١

مثال (٣)

$$\int س^{٣}\, ءس = \frac{س^{٣+١}}{٣+١} + جـ = \frac{١}{٤} س^{٤} + جـ$$

مثال (٤)

أجد قاعدة الإقتران ق(س) الذي مشتقته قَ(س) = $\sqrt[٤]{س^{٣}}$ ، علماً بأن ق(١) = ١

$$ق(س) = \int قَ(س)\, ءس = \int \sqrt[٤]{س^{٣}}\, ءس = \frac{٤س^{\frac{٧}{٤}}}{٧} + جـ$$

لكن ق(١) = ١ ومنها جـ = $\frac{٣}{٧}$.اذن قاعدة الاقتران ق(س) = $\frac{٤س^{\frac{٧}{٤}}}{٧} + \frac{٣}{٧}$.

$$ق(س) = \frac{٤}{٧}\sqrt[٤]{س^{٧}} + \frac{٣}{٧}$$

قاعدة (٣): إذا كان ق(س) ، هـ(س) إقترانين قابلين للتكامل فإن:

$$\int (ق \pm هـ)\,(س)\, ءس = \int ق(س)\, ءس \pm \int هـ(س)\, ءس$$

مثال (٥)

أَجد $\int (س^{٣}+س)\, ءس$

الحلّ: $\int (س^{٣}+س)\, ءس = \int س^{٣}\, ءس + \int س\, ءس$

$$= \frac{س^{٤}}{٤} + \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$$

قاعدة (٤): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، وكان ع(س) = ك. ق(س)، حيث ك عدد حقيقي، ك$\neq$٠،

فإن: $\int ع(س)\, ءس = \int ك.\, ق(س)\, ءس = ك. \int ق(س)\, ءس$

مثال (٦)

أَحسبُ: $\int ٦س^{٢}\,\text{دس}$

الحلّ: $\int ٦س^{٢}\,\text{دس} = ٦\int س^{٢}\,\text{دس}$

$= ٦ \times \frac{س^{٣}}{٣} + \text{جـ} \qquad = ٢س^{٣} + \text{جـ}$

تمارين ومسائل (١ - ٥)

١ أَحسبُ كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int (٣س^{٢}+٤س-٥)\,\text{دس}$ ب) $\int س^{\frac{٢}{٥}}\,\text{دس}$ جـ) $\int \sqrt[٧]{س}\,\text{دس}$

د) $\int (٦س^{-٤} + \frac{٢}{٥س^{٢}})\,\text{دس}$ هـ) $\int (٥٦س^{٣} + ٧س^{٢} + ٣س)\,\text{دس}$ و) $\int (٥)^{٢٠٠٤}\,\text{دس}$

٢ إذا كان $ق(س) = \int (س^{٥}-٤س^{٣}+٨)\,\text{دس}$، أجد $قَ(١)$.

٣ إذا كان $\int قَ(س)\,\text{دس} = ٣س^{٢} + ٢س + \text{جـ}$، أَجدُ $قَ(س)$.

٤ إذا كان $ص = \int (س^{٢}+٣)\,\text{دس}$، أَجدُ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

التكامل المحدود

أولاً: التكامل المحدود

تعريف

التكامل المحدود: إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن: $\int_{أ}^{ب}$ قَ(س) **د**س = ق(س) $\Big|_{أ}^{ب}$ = ق(ب) − ق(أ)،

حيث أ: الحد الأدنى ، ب: الحد الأعلى ، أ ، ب عددان حقيقيان.

مثال (١)

أَحسبُ قيمة: $\int_{٠}^{٢}$ (٢س + ٥) **د**س

الحلّ: $\int_{٠}^{٢}$ (٢س + ٥) **د**س = (س^{٢}+٥س) $\Big|_{٠}^{٢}$ = (٤+١٠) − (٠) =١٤

مثال (٢)

إذا كانت ص= ص= $\int_{٢}^{٣}$ س^{٢} **د**س ، فإن $\frac{دص}{دس}$ = ٠ . (لماذا).

الحلّ: $\int_{-١}^{٢}$ ٢قَ(س) **د**س = ٢ $\int_{-١}^{٢}$ قَ(س) **د**س (لماذا؟)

أتعلم

مشتقة التكامل المحدود تساوي صفراً دائماً.

مثـال (٣)

إذا كان $\int_{ب}^{٦} (٤س + ٣)\, ءس = ٩٠$ فما قيمة الثابت ب؟

الحلّ: $\int_{ب}^{٦} (٤س + ٣).ءس = (٢س^٢ + ٣س) \Big|_{ب}^{٦}$ (لماذا)؟= ق(٦) − ق(ب)

$= \Big((٢)(٣٦) +٣ (٦)\Big) - (٢ب^٢+٣ب) = ٩٠$

$=٩٠ - (٢ب^٢ + ٣ب) = ٩٠$ إذن: ب = ٠ أو ب = $\frac{-٣}{٢}$ (لماذا؟)

ملاحظة: تنطبق جميع قواعد التكامل غير المحدود على التكامل المحدود.

ثانياً: خصائص التّكامل المحدود

خاصية (١)

$\int_{ب}^{ب} ق(س)\, ءس = $ صفر، حيث: ب عدد حقيقي

مثـال (٤)

$\int_{٣}^{٣} (س - ٤)^٤ ءس = \int_{٣}^{٣} (س - ٤)^٤ ءس =$ صفر، لأَن الحد الأَعلى يساوي الحد الأَدنى.

خاصية (٢)

$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, ءس = -\int_{ب}^{أ} ق(س)\, ءس$

مثال (٥)

إذا كان $\int_{\text{١}}^{\text{٤}} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \text{٩}$ فما قيمة $\int_{\text{٤}}^{\text{١}} (\text{٢ق(س)} + \text{٧})\,\text{دس}$ ؟

الحلّ: $\int_{\text{٤}}^{\text{١}} (\text{٢ق(س)} + \text{٧})\,\text{دس} = \text{٢} \int_{\text{٤}}^{\text{١}} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{\text{٤}}^{\text{١}} \text{٧}\,\text{دس}$

$= \text{-٢} \int_{\text{١}}^{\text{٤}} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \text{٧س} \Big|_{\text{٤}}^{\text{١}}$

$= (\text{-٢})(\text{٩}) + (\text{٧} - \text{٢٨})$ (لماذا؟)

$= \text{-١٨} - \text{٢١} = \text{-٣٩}$

خاصية (٣)

إذا كان ق(س) معرفاً على الفترة [أ، ب]، وكان جـ عدد حقيقي بحيث $\text{أ} < \text{جـ} < \text{ب}$، فإنَّ:

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{دس}$. وتسمى هذه الخاصية خاصية الإضافة.

مثال (٦)

إذا كان $\int_{\text{-٣}}^{\text{٢}} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \text{٢}$ ، وكان $\int_{\text{٢}}^{\text{٦}} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \text{٤}$، فما قيمة $\int_{\text{-٣}}^{\text{٦}} \text{٥ق(س)}\,\text{دس}$؟

الحلّ: $\int_{\text{-٣}}^{\text{٦}} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \int_{\text{-٣}}^{\text{٢}} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{\text{٢}}^{\text{٦}} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

$= \text{٢} + \text{٤} = \text{٦}$

إذن: $\int_{\text{-٣}}^{\text{٦}} \text{٥ق(س)}\,\text{دس} = \text{٥} \int_{\text{-٣}}^{\text{٦}} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \text{٥} \times \text{٦} = \text{٣٠}$

تمارين ومسائل (١ - ٦)

١ أحسبُ كل من التكاملات التالية:

أ) $\int_{-٢}^{١}$ (٣س + ١) ءس   ب) $\int_{٢}^{٥}$ (٧ − ٢س) ءس   جـ) $\int_{١}^{٤}$ ($\sqrt{\text{س}}$ + ٣) ءس

٢ إذا كان $\int$ ع(س) ءس = ٣س^{٢}-٢س+جـ، فما قيمة $\int_{-٢}^{٢}$ ٢ع(س) ءس؟

٣ إذا كان $\int_{١}^{٥}$ ٣هـ(س) ءس =١٢، ما قيمة $\int_{٥}^{١}$ (هـ(س)+٢س-١) ءس؟

٤ إذا كان $\int_{٣}^{٥}$ (٢س+ب) ءس=١٢، فما قيمة الثابت ب؟

٥ إذا كان $\int_{-١}^{\text{جـ}}$ ٦س ءس = صفر، فما قيمة/قيم الثابت جـ؟

٦ إذا كان $\int_{-١}^{٥}$ ق(س) ءس= ١٣، $\int_{٥}^{-١}$ هـ(س) ءس = ٧، فما قيمة: $\int_{-١}^{٥}$ (٢ق(س) − هـ(س)) ءس؟

٧ إذا كان $\int_{٢}^{٧}$ ق(س) ءس= ٣، وكان $\int_{٣}^{٧}$ ٣ق(س) ءس= -٩، فما قيمة $\int_{٢}^{٣}$ ٤ق(س) ءس؟

تمـــارين عـــامـــة

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة:

١. إذا كان ق(س)= $\frac{٢}{س}$ ، س≠٠، فما قيمة قَ(١)؟

أ) -٨ ب) ٨ جـ) ٢ د) -٢

٢. إذا كان متوسط التغير في الاقتران ق(س) يساوي $\frac{٣}{٢}$ ، وكان Δس=٦، فما قيمة Δص ؟

أ) ٩ ب) ٣ جـ) ١٨ د) ٦

٣. إذا كان ق(س) = (٥س−١) (٢س) ؛ فما قيمة قَ(١) ؟

أ) ٨ ب) ١٠ جـ) ١٨ د) -٧

٤. إذا كان ق(س) = $\frac{٣س^{٢} + ١}{٢ - س}$ ، س≠٢، فما قيمة قَ(٣)؟

أ) ٣٧ ب) -٣٧ جـ) ١٠ د) ١

٥. إذا كان ق(٧) = -٥، هـ(٧) =٢، قَ(٧) =٣، هـَ(٧)= -١ فما قيمة (٢ق×٣هـ)َ(٧)؟

أ) ٦٦ ب) -٦ جـ) ٦ د) -١٨

٦. إذا كان للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند النقطة(-١٠، ٥)، فما قيمة قَ(-١٠)؟

أ) ٥ ب) -١٠ جـ) صفر د) ٣

٧. إذا كان ∫قَ(س) ءس= ٣س^{٢} − ٤س+جـ، فما قيمة قَ(٢)؟

أ) ١٢ ب) ٤ جـ) -٢ د) ٨

٨. إذا كان ق(س)= $\int_{١}^{٩}$ (٥س^{٣} + ٣س − ٢)^{٥} ءس، فما قيمة قَ(٨)؟

أ) ٢٤ ب) ٤٤ جـ) صفر د) ٢

٩. إذا كان $\int_{٥}^{٧}$ ٢ق(س) ءس=٦، $\int_{٥}^{١}$ ق(س) ءس=٤، فما قيمة $\int_{١}^{٧}$ (٣ق(س)+٢) ءس؟

أ) ٣٢ ب) ٩ جـ) ٣٣ د) ٣

١٠. إذا كان ق(س) = $\int_{٣}^{٥}$ (٦ − ٢س) ءس، فما قيمة قَ(٤)؟

أ) صفر ب) ٥ جـ) ٣ د) -٤

السؤال الثاني: إذا كان ق(س) = س٣ ـ جـ س ـ ٦ ، وكانت قَ(٢) = صفر ، أجد قيمة الثابت جـ؟

السؤال الثالث: إذا كان ق(س)= $\int_{ب}^{٥}$ (٢س + ١) ءس = ٢٤، أجد قيمة / قيم الثابت ب ؟

السؤال الرابع : إذا كان هـ(س) = ٤س^{٢} − ٨س + ١:

أ) فما فترات التزايد والتناقص للاقتران هـ(س)؟

ب) ما القيم القصوى المحلية للاقتران هـ(س)، وما نوعها؟

إختبار ذاتي

السؤال الأول: اختر رمز الاجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات التالية:

١ إذا كان ع (س) = $\frac{٤س^٢ - ١}{٥س + ٥}$ ، فما قيمة عَ (٠)

أ. $\frac{-٦}{٥}$ ب. $\frac{٦}{٥}$ جـ. $\frac{-٦}{٢٥}$ د. صفر

٢ إذا كان ك(س) = ق(س) - ٥هـ(س)، وكان كَ(٩) = ٧، قَ(٩) = ٢ فما قيمة هـَ(٩)؟

أ. -١ ب. ١ جـ. -٥ د. ٥

٣ إذا كان ص = $\int_{٤}^{٢}$ (٩س^٢ + ٧) دس فما قيمة $\frac{دص}{دس}$ ؟

أ. ٤ ب. ٣٦ جـ. ١٠٨ د. صفر

٤ إذا كان $\int_{٢}^{٧}$ ٣ق(س) دس = -١٨، وكان $\int_{١}^{٢}$ ق(س) دس = ٩، ما قيمة $\int_{١}^{٧}$ ٢ق(س) دس؟

أ. -٦ ب. ٦ جـ. -٩ د. ٩

٥ إذا كان $\int_{٤}^{٨}$ ٥ق(س) دس = ٣٠ فما قيمة $\int_{٤}^{٨}$ (٢ق(س) + س - ٣) دس؟

أ. ٢٤ ب. صفر جـ. ١٢ د. ٧

٦ إذا كان م = $\int_{-٢}^{٩}$ قَ(س) دس، وكان ق(-٢) = -١٥، ق(٩) = ٣ فما قيمة م؟

أ. صفر ب. -١٨ جـ. ١٨ د. -١٢

٧ إذا كان ق(س) = ٤س^٢ - ٥، هـ(١) = ٣، هـَ(١) = -٨، فما قيمة (ق × ٢هـ)َ (١)؟

أ. -٦١ ب. ٦٤ جـ. ٨ د. -٦٧

٨ ما قيمة $\int_{٢}^{٣}$ $\pi^٢$ دس؟

أ. $\pi^٢$ ب. ٥$\pi^٢$ جـ. صفر د. ١

٩ ما قيمة $\int_{٩}^{٩} \frac{٣س^{٢} - ٩س}{\sqrt{س^{٥}} - ٢}$ ؟

أ. ٩ ب. صفر جـ. -٩ د. ٥٤

السؤال الثاني: إذا كان $\int$(٢س - ق(س)) دس = س^{٣} - ٢س^{٢} + ٧س - ٣، فما قيمة $\int_{٠}^{٢}$(٣ق(س)) دس؟

السؤال الثالث: إذا كان $\int_{٤}^{-١}$هـ(س) دس = ٩، $\int_{-١}^{٤}$٢ق(س) دس = -٨ ، فما قيمة $\int_{-١}^{٤}$(٢هـ(س) + ق(س)) دس؟

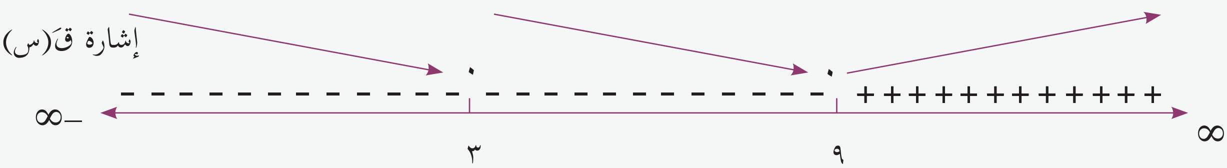
السؤال الرابع: إذا كان متوسط تغير الإقتران ق(س) على [٧ ، ٩] يساوي -٥، فما قيمة متوسط تغير الإقتران ك(س) = س ق(س) + ٢ على [٧ ، ٩] علماً بأنّ ق(٧) = ٤٠؟

السؤال الخامس: يوضح الرسم أدناه إشارة قَ(س) اعتمد عليه في الإجابة عن الأسئلة الآتية:

أ. متى يكون الاقتران ق(س) متزايداً؟

ب. متي يكون للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية في مجاله؟

جـ. هل تعتبر النقطة (٣، ق(٣)) نقطة قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)؟ لماذا؟



Matrix

(٢ - ١)

المصفوفة

تعريف

المصفوفة: هي تنظيم مستطيل الشكل لأعداد حقيقية على هيئة صفوف عددها (م) وأعمدة عددها(ن)، محصورة بين قوسين من النوع [ ]، ويرمز لها بأحد الحروف الهجائية، وتكون المصفوفة من **الرتبة** م × ن.

نشاط (١)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \\ -٨ & ٦ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٧ & ٠ & ١ \\ ٥ & ٧ & -٤ \\ ١٠ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٠ \\ ٥ \end{bmatrix}$

أ) رتبة المصفوفة أ تساوي ٣×٢. (لماذا؟)

ب) رتبة المصفوفة ب تساوي________.

جـ) رتبة المصفوفة جـ تساوي________.

د) يقع العدد٦ في تقاطع الصف الثالث والعمود الثاني في المصفوفة أ، ولذلك يسمى **المدخلة** $أ_{٢٣}$

هـ) المدخلة التي قيمتها -٨ في المصفوفة أ تسمى $أ_{١٣}$.

أتعلـــم

يسمّى كل عدد في المصفوفة أ مدخلة، ويرمز له بالرمز $أ_{ي هـ}$ ، حيث: (ي) (هـ) الصف والعمود الذين تقع المدخلة في تقاطعهما .

مثـال (١)

إذا كانت المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} -٢ & ٦ \\ ٩ & ٣ \\ ٧ & -٨ \end{bmatrix}$ ، فإن: رتبة المصفوفة أ تساوي ٣ × ٢

المدخلة $أ_{٢١}$ = ٦، المدخلة $أ_{١٢}$ = ٩، المدخلة $أ_{٢٣}$ = -٨

تعريف

- **مصفوفة الصف**: هي المصفوفة التي تتكوَّن من صف واحد فقط، و(ن) من الأعمدة، وتكون رتبتها ١×ن.
- **مصفوفة العمود**:هي المصفوفة التي تتكوَّن من عمود واحد فقط، و(م) من الصفوف، وتكون رتبتها م×١.
- **المصفوفة المربعة**: هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة ويساوي (ن)، وتسمى المصفوفة مربعة من الرتبة النونية.
- **المصفوفة الصفرية**:هي المصفوفة التي تكون كل مدخلة فيها تساوي صفراً، ويرمز لها بالرمز**(و)**.

مثال (٢)

ما رتبة كل من المصفوفات الآتية؟ ومانوعها.

س= $\begin{bmatrix} ٠,٥ & -٩ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ص= $\begin{bmatrix} ٣ \\ ٠ \\ ٩ \end{bmatrix}$ ، ع= $\begin{bmatrix} ٣ & ٩ & ١ \\ ٤ & ٥ & ٥ \\ ٩ & -١ & ٦ \end{bmatrix}$ ، و= $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$.

الحلّ:

١) رتبة س = ١×٣، وهي مصفوفة صف.

٢) رتبة ص= ٣×١، ص مصفوفة عمود.

٣) ع مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة.

٤) رتبة و= ٢×٣، وهي مصفوفة صفرية.

تعريف

تتساوى المصفوفتان أ، ب إذا كان لهما الرتبة نفسها، وكانت جميع مدخلاتهما المتناظرة متساوية.

مثال (٤)

إذا كانت أ= $\begin{bmatrix} س+٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب= $\begin{bmatrix} -٩ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة س التي تجعل أ = ب؟

الحلّ: بما أن $\begin{bmatrix} س+٢ & ٤ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -٩ & ٤ \end{bmatrix}$

إذن س+٢ = -٩ وبحلّ المعادلة ينتج أن س= -١١.

تمارين ومسائل (٢ - ١)

١ أَجدُ قيم الثابتين ب، جـ فيما يأتي:

أ) $\begin{bmatrix} \text{٥} & \text{٧} \\ \text{جـ} + \text{١} & \text{٧} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٥} & \text{٤-ب} \\ \text{ب} & \text{٧} \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} \text{٥} \\ \text{٨} \\ \text{٧} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٥} \\ \text{٢- ٣ب} \\ \text{جـ} + \text{ب} \end{bmatrix}$

جـ) $\begin{bmatrix} \text{جـ}^{\text{٢}} & \text{٦} & \text{١} \\ \text{ب} & \text{٥} & \text{٨} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٩} & \text{٦} & \text{١} \\ \text{ب}^{\text{٢}} & \text{٥} & \text{٨} \end{bmatrix}$

٢ أَجدُ قيمة س، ص حيث:

$\begin{bmatrix} \text{٥} & \text{٤} \\ \text{س - ٢ص} & \text{٤} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٥} & \text{س+ص} \\ \text{١} & \text{٤} \end{bmatrix}$

٣ إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{٥} & \text{-٩} & \text{٢} \\ \text{-٧} & \text{١} & \text{٤} \end{bmatrix}$ فما قيمة $\text{٣أ}_{\text{١١}} - \text{٢أ}^{\text{٢}}_{\text{٣٢}} + \text{٥}$؟

٤ إذا كانت أ ، ب مصفوفتان بحيث $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{٤} & \text{٥} & \text{٢} \\ \text{٣} & \text{٧} & \text{-١١} \end{bmatrix}$ وكانت ٢أ = ٣ب، جد المصفوفة ب.

العمليات على المصفوفات

أولاً: جمع المصفوفات وطرحها:

تعريف

إذا كانت ᵖ، ب مصفوفتين كل منهما من الرتبة نفسها م ×ن فإن المصفوفة جـ حيث: ᵖ ± ب = جـ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م ×ن، وتكون كل مدخلة في المصفوفة جـ مساوية لمجموع المدخلتين المناظرتين لها في المصفوفتين ᵖ، ب ،أي أن: $\text{جـ}_{\text{ي هـ}} = ᵖ_{\text{ي هـ}} \pm \text{ب}_{\text{ي هـ}}$

مثال (١)

إذا كانت $ᵖ = \begin{bmatrix} ٥ & ٨ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\text{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣- & ١٠ \end{bmatrix}$

، أجد أ + ب ، جـ - ب.

الحلّ: بما أن رتبة المصفوفة ᵖ = رتبة المصفوفة ب، فإنه يمكن إجراء عملية الجمع كالآتي.

$$ᵖ + \text{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ٨ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ + ٥ & ١- + ٨ \\ ٣ + ١ & ٣ + ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٧ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}$$

$$\text{جـ} - \text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣- & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١-٣ & ١- - ٣ \\ ٣-٣- & ٣-١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٦- & ٧ \end{bmatrix}$$

خصائص عملية جمع المصفوفات

١) عملية جمع المصفوفات هي عملية تبديلية.

٢) عملية جمع المصفوفات هي عملية تجميعية.

٣) المصفوفة الصفرية (و) هي المصفوفة المحايدة لعملية جمع المصفوفات.

٤) إذا كانت ٲ، ب مصفوفتين حيث: ٲ + ب = ب + ٲ = و، فإن ب هي **النظير الجمعيّ** للمصفوفة ٲ، وتكون ب = -ٲ

مثال (٢)

إذا كانت ٲ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \\ ٤ & ٥ & ٧ \end{bmatrix}$، و = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$، ب= $\begin{bmatrix} ٩ & ٤ & -٢ \\ -١ & ٢ & ٥ \end{bmatrix}$،

أجد: ١) (ٲ+و) + ب ٢) ٲ+(و +ب)

الحل: باستخدم الخصائث فإن ٲ+و = ٲ ومنها فإن (ٲ+و)+ب= ٲ+(و +ب) = $\begin{bmatrix} ١٢ & ٨ & ٣ \\ ٣ & ٧ & ١٢ \end{bmatrix}$

ٲ + و = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \\ ٤ & ٥ & ٧ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \\ ٤ & ٥ & ٧ \end{bmatrix}$

و+ ٲ = ________________. ماذا تُلاحظ؟

ثانياً: ضرب المصفوفات بعدد ثابت:

تعريف

إذا كانت ٲ مصفوفة من الرتبة م×ن، وكان جـ عدداً حقيقياً فإن جـ .ٲ مصفوفة من الرتبة م×ن، حيث تكون كل مدخلة فيها مساوية للمدخلة المناظرة لها في المصفوفة ٲ مضروبة بالثابت جـ. أي أن: **جـ(ٲ$_{ي هـ}$) = (جـٲ$_{ي هـ}$)**

مثـال (٢)

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ٥ & ٦ \\ ١ & ٧ & ٤ & ١ \end{bmatrix}$، فإن= ٧س = $\begin{bmatrix} ٢١ & ٢٨ & ٣٥ & ٤٢ \\ ٧ & ٤٩ & ٢٨ & ٧ \end{bmatrix}$

مثال (٣)

أَحلّ المعادلة المصفوفيّة الآتية: $٣س - \begin{bmatrix} ٩ & ١٢ \\ ١١ & ٠ \end{bmatrix} = س + \begin{bmatrix} -٧ & ٨ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

الحلّ:

$٣س - س = \begin{bmatrix} -٧ & ٨ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٩ & ١٢ \\ ١١ & ٠ \end{bmatrix}$ إذن $٢س = \begin{bmatrix} ٢ & ٢٠ \\ ١٢ & ٢ \end{bmatrix}$، ومنها $س = \begin{bmatrix} ١ & ١٠ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$

تمارين ومسائل (٢ - ٢)

١ إذا كانت المصفوفة جـ = ٢أ + ب، وكانت المدخلة $أ_{٢٥} = ٩$، والمدخلة $ب_{٢٥} = -٨$، فما قيمة المدخلة $جـ_{٢٥}$؟

٢ إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ٨ & ٣ & ٢ & ٦ \\ ٦ & ٥ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$، $ص = \begin{bmatrix} ٧ & ٥ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ & ٦ & ٨ \end{bmatrix}$، $ع = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٢ \\ ٧ & ٤ & ١ \end{bmatrix}$

أَجدُ ما يأتي (إن أَمكن):

أ) س + ص **ب)** ٣س - ٤ص **جـ)** ٥ص - س **د)** س - ٢ع **هـ)** ٢ص - ٣$و_{٢\times٤}$

٣ أَجدُ ناتج ما يأتي $٣ \begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٦ & ٥ \end{bmatrix} - ٤ \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -٣ & ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

٤ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -٧ \\ ٤ & ١ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$، $ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٨ & ١ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix}$، أَجدُ المصفوفة س حيث: ٢س = أ - ٣ب

٥ أَحلّ كلاً من المعادلات المصفوفيّة الآتية:

أ) $س + ٣\begin{bmatrix} -١ & ٥ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$

ب) $٢\left(س + \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}\right) = س - ٢\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

جـ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٢ \\ ٧ & ٦ \end{bmatrix} - ٢س = \begin{bmatrix} ٠ & -٦ \\ ٥ & ٠ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفات

تعريف

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م× ن، ب مصفوفة من الرتبة ن ×هـ، فإن:

$\text{أ}_{\text{م×ن}} \,.\, \text{ب}_{\text{ن×هـ}} = \text{جـ}_{\text{م×هـ}}$ ، حيث: $\text{جـ}_{\text{ي هـ}} = \text{أ}_{\text{ي١}}.\text{ب}_{\text{١هـ}} + \text{أ}_{\text{ي٢}}.\text{ب}_{\text{٢هـ}} + \ldots\ldots + \text{أ}_{\text{ي ن}}.\text{ب}_{\text{ن هـ}}$

عملية ضرب المصفوفات ليست تبديليّة.

مثال (١)

أَجدُ ناتج ضرب المصفوفتين أ ، ب في كل من الحالات الآتية:

١) $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٠ \\ ٠ & -٤ & ٣ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & -٣ \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix}$

٢) $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ١ \\ ٦ & ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ١ \\ ٦ & ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

الحلّ: ألاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة أ = عدد صفوف المصفوفة ب

$$\text{أ} \,.\, \text{ب} = \begin{bmatrix} (٣ \times ٥) + (١ \times ١) + (٠ \times ٦) & (٣ \times ٢) + (١ \times -٣) + (٠ \times ٠) \\ (٠ \times ٥) + (-٤ \times ١) + (٣ \times ٦) & (٠ \times ٢) + (-٤ \times -٣) + (٣ \times ٠) \\ (١ \times ٥) + (٢ \times ١) + (٥ \times ٦) & (١ \times ٢) + (٢ \times -٣) + (٥ \times ٠) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٦ & ٣ \\ ١٤ & ١٢ \\ ٣٧ & -٤ \end{bmatrix}$$

مثال (٢)

إذا كانت أ، ب مصفوفتان حيث: $\text{أ}_{\text{٣×٤}} \,.\, \text{ب}_{\text{٤×٥}} = \text{جـ}$، فإن رتبة المصفوفة **جـ** تساوي ٣ × ٥.

مثـال (٣)

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ١- & ٧ \\ ٢- & ٨ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ أجد ناتج كل من ١) أ . ب

الحلّ:

$$أ\ .\ ب = \begin{bmatrix} ١- & ٧ \\ ٢- & ٨ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- & ٧ \\ ٢- & ٨ \end{bmatrix}$$

أتعلـم

المصفوفة $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ هي المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات من الرتبة الثانية، ويرمز لها بالرمز $م_٢$، ويطلق عليها أيضاً اسم **مصفوفة الوحدة**.

تمارين ومسائل (٢ - ٣)

١ أجد ناتج ضرب المصفوفات فيما يأتي (إن أمكن):

أ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ٧ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ١ \\ ٢- & ٤ & ٥- \\ ١ & ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٥ & ٣ \\ ٢ & ٤- & ٥ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١- & ٥ \\ ٧ & ٢ \end{bmatrix}$

٢ إذا كانت $\begin{bmatrix} ١ & أ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ب \end{bmatrix}$ ما قيمة كل من الثابتيين أ، ب؟

٣ إذا كانت أ ، ب ، س ثلاث مصفوفات بحيث أ $= \begin{bmatrix} ٥ & ٩ & ٤ \\ ٢ & ٧ & ٣- \\ ٣- & ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ،

ب $= \begin{bmatrix} ١- & ٥ & ٢ \\ ٣ & ١ & ٤ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، وكانت ٢أ + س = ٣ب، أجد المصفوفة س.

النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

أولاً: المحددات: (Determinants)

تعريف (١)

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، فإن **محدد المصفوفة** أ = $\begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ هو عدد حقيقيّ ويرمز له بالرمز |أ| حيث |أ| = (أ$_{١١}$ × أ$_{٢٢}$) − (أ$_{١٢}$ × أ$_{٢١}$).

مثال (١)

أجد محدد كل من المصفوفات الآتية: ١) أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$

الحلّ:

|أ| = (أ$_{١١}$ × أ$_{٢٢}$) − (أ$_{١٢}$ × أ$_{٢١}$). ومنها |أ| = (٣ × -٣) − (١ × ٩) = -٩ − ٩ = -١٨

أتعلم

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، **ك** عدد حقيقي، **ك** ≠ صفر، فإن |**ك** أ| = **ك**^{٢}|أ|

نشاط (١)

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وكانت |٥أ| = -٥٠ ، فإن:

|أ| =________________________.   ٧|أ| =________________________.

ثانياً: النظير الضربيّ للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

تعريف (٢)

تُسمى المصفوفة التي محددها يساوي صفر بالمصفوفة **المنفردة.**

مثال (٢)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س-١ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ، أَجدُ قيمة س التي تجعل أ مصفوفة منفردة.

الحلّ: بما أن أ مصفوفة منفردة فإن محدد $|أ| = ٠$.

ومنها (س-١) × ٢ − ٢ × ٣ = صفر ومنها: ٢س-٢-٦ = صفر ٢س-٨=صفر إذن س=٤ .

تعريف (٣)

إذا كانت أ مصفوفة غير منفردة من الرتبة الثانية، فإن المصفوفة ب من الرتبة الثانية تسمى نظيراً ضربياً للمصفوفة أ إذا كان أ . ب = ب . أ = $م_٢$، حيث $م_٢$ المصفوفة المحايدة.

ويرمز للنظير الضربيّ للمصفوفة أ بالرمز $أ^{-١}$، أي أن $أ . أ^{-١} = أ^{-١} . أ = م_٢$

تعريف

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ ، حيث $|أ| \neq$ صفر، فإن: $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \begin{bmatrix} أ_{٢٢} & -أ_{٢١} \\ -أ_{١٢} & أ_{١١} \end{bmatrix}$

وإكانت المصفوفة أ منفردة فإنه لا يوجد لها نظير ضربي

مثال (٢)

أجد النظير الضربيّ للمصفوفة أ $= \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix}$ (إن أمكن).

الحلّ:

$|أ| = (أ_{١١} \times أ_{٢٢}) - (أ_{١٢} \times أ_{٢١})$

$|أ| = (١ \times -٤) - (١ \times -٢) = -٢$ ، إذا يوجد للمصفوفة أ نظير ضربي

$$أ^{-١} = \frac{-١}{٢} \begin{bmatrix} -٤ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٠,٥ & -٠,٥ \end{bmatrix}$$

أتعلم

$$(أ^{-١})^{-١} = أ$$

تمارين ومسائل (٢ - ٤)

١ أجد قيمة س التي تحقق $\begin{vmatrix} -١٢ & ٥ \\ ٣س & -٣ \end{vmatrix} = ٦$

٢ إذا كان $|٤ب| = -٣٢$، أجدُ: قيمة $|ب| + |٣ب|$، حيث ب مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية.

٣ أجد النظير الضربيّ لكل من المصفوفات الآتية (إن أمكن):

أ $= \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

٤ ما قيمة س التي تجعل المصفوفة أ $= \begin{bmatrix} ٥ & ٢س+١ \\ ٩ & ٤ \end{bmatrix}$ منفردة؟

حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام قاعدة كريمر

قاعدة كريمر:

تستخدم قاعدة كريمر لحلّ نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين، والذي يمكن كتابته بالصورة المصفوفية كالآتي: ٱ . ع = جـ، حيث:

ٱ :مصفوفة المعاملات، ع: مصفوفة المتغيرات، جـ: مصفوفة الثوابت، |ٱ|≠ صفر فيكون:

$$س = \frac{|ٱ_{س}|}{|ٱ|} \quad و \quad ص = \frac{|ٱ_{ص}|}{|ٱ|}$$ حيث:

ٱس: المصفوفة ٱ بعد استبدال مدخلات عمود معاملات س فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

ٱص:المصفوفة ٱ بعد استبدال مدخلات عمود معاملات ص فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

مثال (١)

استخدمُ قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي:

س − ص = ٤

٥س + ٢ص = ٦

الحلّ:

أَكتبُ نظام المعادلات الخطية على شكل معادلة مصفوفيّة:

$$\begin{bmatrix} ٤ \\ ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$$

أَفرض ٱ $= \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = (١\times٢) - (٥\times-١) = ٧$$

$$\text{المصفوفة } \text{أ}_{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\text{ومنها: } |\text{أ}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} ٤ & -١ \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix} = (٤\times٢) - (-١\times٦) = ١٤$$

$$\text{المصفوفة } \text{أ}_{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}$$

$$\text{ومنها: } |\text{أ}_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix} = (١\times٦) - (٤\times٥) = -١٤$$

$$\therefore \text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \frac{١٤}{٧} = ٢ \text{ ، } \text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \frac{-١٤}{٧} = -٢$$

إذن الحل: (س،ص) = (٢، -٢)

مثـال (٢)

عند استخدم قاعدة كريمر في حل نظام المعادلات الخطيةنتج أن $|\text{أ}_{\text{س}}| = ٣$ ، $|\text{أ}_{\text{ص}}| = ١٥$، ص = ٥، فما قيمة س؟

الحلّ: $\text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|}$

$$٥ = \frac{١٥}{|\text{أ}|} = ٥|\text{أ}| = ١٥ \Leftarrow |\text{أ}| \Leftarrow \frac{١٥}{٥} = ٣$$

$$\therefore \text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|}$$

$$= \frac{٣}{٣} = ١$$

تمارين ومسائل (٢ - ٥)

١ إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة الثانية

وكان $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ ، $|\text{أ}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}$ ، $|\text{أ}_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}$

أجد قيمة كل من س، ص.

٢ استخدم قاعدة كريمر في حل أَنظمة المعادلات الآتية:

أ) ٣س-٤ص = ٨
س+ص = ١٢

ب) ٣س - ٢ص - ١٩ = ٠
ص + ٣س = ١٣

٣ عند استخدم قاعدة كريمر في حل نظام من المعادلات الخطية نتج أنّ ص = ٤، |أ ص| = ٢٠،
|أس| = -١٥، جد قيمة س.

تمـــاريـــن عـــامـــة

السؤال الأوَّل: اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يلي:

١) إذا كانت أ= $\begin{bmatrix} -٩ & ٣ \\ -٨ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب= $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ فما قيمة $٢أ_{١٢} - ب_{٢١}$ ؟

أ) ٥ ب) ٢ ج) ١ د) -١

٢) إذا كانت $\begin{bmatrix} س & ٣ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ص+س & -١ \end{bmatrix}$ فما قيمة س، ص على الترتيب؟

أ) (١ ، ٢) ب) (٢ ، ١) ج) (٥ ، ٢) د) (-١، ١)

٣) إذا كانت ب= $\begin{bmatrix} ٦ & ٥ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، فأي من المصفوفات الآتية تمثل $(ب^{-١})^{-١}$ ؟

أ) $\begin{bmatrix} -٦ & ١ \\ ٥ & -١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٦ & ٥ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -٦ & -٥ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$

٤) إذا كانت س مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، وكان |٢س| = ٨ فما قيمة |٣س|؟

أ) ١٨ ب) ٦ ج) ٤ د) ٢

٥) أي من المصفوفات الآتية ليس لها نظير ضربيّ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & -٤ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -٢ & ٨ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$

٦) إذا كانت ص = $\begin{bmatrix} ١ & جـ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ص^{-١}$ = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ فما قيمة الثابت جـ؟

أ) ٢ ب) ١ ج) -١ د) -٢

٧)عند حل نظام من معادلتين خطيتين، وُجِدَ أن ص = ٢ ، $|أ_{س}|$ = -٣، $|أ_{ص}|$ = -٦ ماقيمة س؟

أ) ٣ ب) ١ ج) -١ د) -٣

٨) إذا كان $\begin{bmatrix} ١ & أ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ \\ ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة الثابت أ ؟

أ) ٤ ب) ٢ ج) ١ د) صفر

٩) إذا كانت أ،ب،جـ مصفوفات حيث أ . ب = جـ وكانت أ$_{٣×١}$ ، جـ$_{٣×٤}$ فما رتبة المصفوفة ب ؟

أ) ١×٤ ب) ١×٣ ج) ١×١ د) ٤×٣

السؤال الثاني: أَستخدمُ قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي: ٢س+١ = ص ، س-٢ص = ٤

إختبار ذاتي

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل من الفقرات الآتية:

١ إذا كانت المصفوفة س = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ١ \\ ١- & ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ فما رتبة المصفوفة س؟

أ.٢×٣ ب.٣×٢ ج.٦ د.٢

٢ إذا كانت ب= $\begin{bmatrix} ١- & ٥ & ٣ \\ ٢- & ٨ & ٥ \\ ٤ & ١٠ & ٦ \end{bmatrix}$ فما قيمة المدخلة ب$_{٢٣}$؟

أ.-١ ب.٢٣ ج.١٠ د. -٢

٣ إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣ & \text{س-٢} \\ \text{س+ص} & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ فما قيمة ص؟

أ. -٢ ب. ٢ ج.-٤ د.٤

٤ كانت المصفوفة أ هي النظير الضربي للمصفوفة ب فإن واحدة من العبارات الاتية صحيحة:

أ. أ×ب = و ب. أ٢ = ب٢ ج. أ×م = ب د. أ×ب= م

٥ ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & \text{س} \\ \text{س} & ٩ \end{bmatrix}$ منفردة؟

أ. ± ٦ ب. ٦ ج. -٦ د. ٦٣

٦ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ فما قيمة | ٢ أ | ؟

أ. ٨٢ ب. -٧ ج. -٨٢ د. -٤١

٧ إذا كانت س$^{-١}$ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ فما $(\frac{١}{٢}\text{س})^{-١}$؟

أ. $\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} ٠ & ٦ \\ ٢ & ٤- \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} \\ \frac{٣-}{٢} & ١ \end{bmatrix}$

٨ إذا كان $\frac{١}{٢}\,|\text{أ}^{\text{س}}| = |٣\text{ أ}| = ١٨$ حيث أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية فما قيمة س ؟

أ. ١٨ ب. ٣٦ ج. -١٨ د. ١

٩ إذا كان أ ب = س، حيث أ ، ب غير منفردتين فما المصفوفة ب؟

أ. $\text{أ}^{-١}\text{س}$ ب. $\text{س}.\text{أ}^{-١}$ ج. $\text{س}^{-١} - \text{ب}$ د. أس

١٠ ما ناتج $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ & ٤ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ \\ ٠ \\ ١ \end{bmatrix}$ ؟

أ. $\begin{bmatrix} -٦ & ٤ & ٨ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} ٦ \\ ٠ \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} -٦ & ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} -٢ \end{bmatrix}$

السؤال الثاني:

استخدم قاعدة كريمر في حل النظام الآتي من المعادلات:

٣ س +٢ ص - ٧ = ٤ ٢ ص + ٤ س =٦١

السؤال الثالث: حل المعادلة المصفوفية الآتية:

$$٣\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٩ & -٦ \end{bmatrix} - ٢\text{س} = \begin{bmatrix} ٤ & -٥ \\ ٢ & -٨ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ -٥ & ٦ \end{bmatrix}$$

السؤال الرابع: إذا كانت ص $= \begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & -١ \end{bmatrix}$، جد $\text{ص}^{-١}$.

السؤال الخامس: ما قيم س التي تحقق المعادلة: $\begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ ٤ & ٣-\text{س} \end{vmatrix} = ٨$؟

(٣ - ١) Exponent Equations

المعادلات الأُسية

أَتذكّر:

لتكن أ ، م، ن ∈ ح ، أ ≠ ١ ، أ ≠ صفر فإن:

١) $(\text{أ})^{\text{م}} \times (\text{أ})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}+\text{ن}}$

٢) $\dfrac{(\text{أ})^{\text{م}}}{(\text{أ})^{\text{ن}}} = \text{أ}^{\text{م}-\text{ن}}$

٣) $\left((\text{أ})^{\text{م}}\right)^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}\times\text{ن}}$

٤) $(\text{أ})^{٠} = ١$

مثال (١)

أَحل المعادلة $(٢٧)^{٢\text{س}-١} = (٩)^{١-\text{س}}$

الحلّ: $(٢٧) = (٣)^{٣}$ كذلك $٩ = (٣)^{٢}$

ومنها: $(٣)^{٦\text{س}-٣} = (٣)^{٢-٢\text{س}}$ (لماذا؟)

بما أَن الأَساسات متشابهة فتكون الأُسس متساوية:

أي أن: $٦\text{س} - ٣ = ٢ - ٢\text{س}$

$٨\text{س} = ٥$ ومنها مجموعة الحل: $\left\{\dfrac{٥}{٨}\right\}$

تمارين ومسائل (٣ - ١)

١ أجدُ مجموعة حلّ كل من المعادلات الأسية الآتية:

أ) $(٨)^{٥\text{س}-٣} = (٤)^{٦-٣\text{س}}$ ب) $(٧)^{\text{س}-٢} = (٤٩)^{٥-٤\text{س}}$ جـ) $(٢٧)^{\text{س}-٢} = (٨١)^{٢-\text{س}}$

٢ ما مجموعة حلّ كل من المعادلات الأسية الآتية؟

أ) $\left(\dfrac{١}{٩}\right)^{٣\text{س}-٥} = ٢٧$ ب) $(١٢٥)^{٢-\text{س}} = (٥)^{٢\text{س}-٩}$ جـ) $(٦)^{٢\text{س}-١} = ٢١٦$

المعادلات اللوغاريتمية

أتذكّر:

إذا كانت أ، س، ص > صفر، أ ≠ ١ فإن:

١) لو$_{أ}$ ١ = صفر   ٢) لو$_{أ}$ أ = ١

٣) لو$_{أ}$ س = جـ تكافئ أ^{جـ} = س   ٤) لو$_{أ}$ (س × ص) = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص

٥) لو$_{أ}$ $(\frac{س}{ص})$ = لو$_{أ}$ (س) − لو$_{أ}$ (ص)   ٦) لو$_{أ}$ س^{ن} = ن × لو$_{أ}$ س ، س > ٠

مثال (١)

أحلّ المعادلة لو$_{٢}$ س = ٣.

الحلّ: لحلّ المعادلة اللوغاريتمية نحولها أولاً للصورة الأُسية.

لو$_{٢}$ س = ٣ تكافئ (٢)^{٣} = س

ومنها: س = ٨

مثال (٢)

أحلُّ المعادلة اللوغاريتمية الآتية: لو$_{٢}$(س^{٢} − ٢س + ٥) = ٣

الحلّ: لحلّ المعادلة اللوغاريتمية نحولها أولاً للصورة الأُسية.

لو$_{٢}$(س^{٢} − ٢س + ٥) = ٣ تكافئ : س^{٢} − ٢س + ٥ = (٢)^{٣}

س^{٢} − ٢س − ٣ = ٠   ومنها: (س − ٣)(س + ١) = ٠   مجموعة الحلّ: {-١ ، ٣}

تمارين ومسائل (٣ - ٢)

١ أجدُ مجموعة حلّ كل من المعادلات الآتية:

أ) لو$_{٢}$(٥س − ٤) = ٤   ب) لو$_{٧}$ (٣٤٣) = ٢س − ١   جـ) لو$_{٣}$(٦ − س) = ٣

د) لو$_{٥}$ (س^{٢} + ٣س − ٣) = ٠   هـ) لو$_{١٠}$ (١٠)^{٦} = ٢س + ٤

٢ أجدُ مجموعة حلّ المعادلة لو$_{٣}$(س^{٢}−٣) = ٠

٣ أحل المعادلة اللوغاريتمية الآتية: لو$_{٣}$(س − ١) − لو$_{٣}$(٢س − ٥) = ١

المتسلسلة الحسابية ومجموعها

أولاً: المتسلسلات: (Series)

أتذكّر:

المتتالية الحسابية: هي المتتالية التي يكون الفرق بين أي حدين متتاليين فيها يساوي مقداراً ثابتاً دائماً.

وحدها العام $ح_ن = ا + (ن - ١)\,د$، حيث ا: الحد الأول، د: الأساس، ن: رتبة الحد النوني.

تعريف

المتسلسلة $\left(\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر\right)$ تمثّل مجموع حدود المتتالية $(ح_ر)$ المقابلة لها، ويكون حدها العام $\left(\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر\right)$،
ويعبر $جـ_ن$ عن مجموع حدودها.

مثال (١)

أكتب المتسلسلة المقابلة للمتتالية $ف_ن = \{٣ ، -١ ، ٤ ، ٩ ، -٥\}$، ثم أجد مجموعها

الحلّ: $\sum_{ر=١} ف_ر = ٣ + -١ + ٤ + ٩ + -٥$. لاحظ أن: $\sum_{ر=١}^{٥} ف_ر = جـ_٥$ ومنها: $جـ_٥ = ١٠$

أتعلم

تعرف المتسلسلة الحسابية بأنها مجموع حدود المتتالية الحسابية المرتبطة بها.

مثال (٣)

أُميّز المتسلسلة الحسابية من غيرها فيما يأتي:

١) ٧ + ١٠ + ١٣ + ١٦ + ١٩ ٢) ٨ + ٦ + ٥ + ٣ + ٢

الحلّ: ١) المتسلسلة حسابية ، لأنّ: ١٠ − ٧ = ١٣ − ١٠ = ١٦ − ١٣ = ١٩ − ١٦ = ٣

٢) المتسلسلة ليست حسابية ، لأنّ ٦ − ٨ = −٢ ، بينما ٥ − ٦ = -١ ≠ ٣ − ٥ = -٢. ٦ − ٨ ≠ ٥ − ٦.

أتعلم

مجموع أول ن حداً من حدود متسلسلة حسابية حدها الأول أ وأساسها د ، يعطي بالقانون:

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢} (٢\text{أ} + (\text{ن} - ١) \times \text{د}) \text{ أو } \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢} (\text{أ} + \text{ل})$$

مثال (٣)

أَجِدُ مجموع أَول ٤٠ حدّاً من المتسلسلة الحسابية ١٢+١٠+٨+٦+...

الحلّ: أ =١٢ ، د=-٢ ، ن=٤٠

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢} (٢\text{أ} + (\text{ن} - ١) \times \text{د})$$

$$\text{جـ}_{٤٠} = \frac{٤٠}{٢} (٢ \times ١٢ + (٤٠ - ١) \times -٢) = ٢٠ (٢٤ + ٣٩ \times -٢) = ٢٠ (٢٤ - ٧٨) = -١٠٨٠$$

نشاط (١)

أَجِدُ $\sum_{\text{ر}=١}^{٦٠} (١٢ - \text{ر})$

الحلّ: ألاحظ أن المتسلسلة حسابية (لماذا)؟

$\text{ح}_{١} = ١٢ - ١ = ١١ = \text{أ}$

$\text{ح}_{٦٠} = ١٢ - ٦٠ = -٤٨$ إذن المتسلسلة حسابية، فيها أ =١١ ، ل = -٤٨، ن =٦٠

$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢} (\text{أ} + \text{ل})$ ومنها $\text{جـ}_{٦٠} =$ ....

مثال (٤)

أَجدُ الحد الخامس عشر في المتسلسلة الحسابية التي يعطى مجموعها بالعلاقة: $جـ_{ن} = ٤ن - ن^{٢}$

الحلّ: أَلاحظ أَن الحد الأَول $ﺃ = جـ_{١}$.

$جـ_{١} = ٤(١) - (١)^{٢} = ٣$ ومنها: $ﺃ = ٣$

مجموع أَول حدين $= جـ_{٢} = ح_{١} + ح_{٢}$

$= ٤(٢) - (٢)^{٢} = ٨ - ٤ = ٤$ ومنها: $ح_{٢} = (جـ_{٢} - جـ_{١})$

$ح_{٢} = ٤ - ٣ = ١$ كما أن أَساس المتسلسلة $= ح_{٢} - ح_{١}$ (لماذا)؟

$= ١ - ٣ = -٢$ إذن $د = -٢$ ومنها: $ح_{ن} = ٣ + (ن - ١) \times -٢$

$ح_{١٥} = ٣ + (١٥ - ١) \times -٢ = -٢٥$ (هل هناك حلول إخرى؟).

تمارين ومسائل (٣ - ٤)

١ أَكتبُ الحدود الأَربعة الأُولى من مفكوك كلّ من المتسلسلات الآتية:

أ) $\sum_{ر=١}^{٧} (٢ر + ١)$ ب) $\sum_{ر=١}^{١٧} (٢ر)$

٢ متسلسلة حسابية حدها الأَول ١٤، وأساسها يساوي ٥ أَجدُ مجموع أَول ٢٠ حداً منها.

٣ أَجدُ الحد الأَول في المتسلسلة الحسابيّة التي أَساسها ٢ ومجموع أَول ٦٠ حداً فيها يساوي ١٢٠

٤ كم حداً يجب أَخذه من متسلسلة حسابية حدها الأَول ٣ وأَساسها ٦ ليكون مجموع تلك الحدود = ٢٧؟

٥ متسلسلة حسابية حدها الأول ٣ وحدها الستون = ٨٧ ، أجد $جـ_{٦٠}$.

المتسلسلة الهندسية ومجموعها

أَتذكّر:

المتتالية الهندسية: هي المتتالية التي تكون النسبة بين أي حدين متتاليين فيها يساوي مقداراً ثابتاً دائماً.
وحدها العام $ح_ن = ﺃ ر^{(ن - ١)}$ ، حيث ﺃ: الحد الأول، ر: الأساس، ن: رتبة الحد النوني

أتعلـــم

تعرف المتسلسلة الهندسية بأنها مجموع المتتالية الهندسية المرتبطة بها.

مثـال (١)

أُميِّزُ المتسلسلات الهندسية مما يأتي: أ) ٨١ + ٢٧ + ٩ + ٣ + ١. ب) ٦ + ٩ + ١٢ + ١٥ + ١٨.

الحلّ: أ) متسلسلة هندسية ، لأن $\frac{٢٧}{٨١} = \frac{٩}{٢٧} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

ب) ليست هندسية، لأَن $\frac{٩}{٦} \neq \frac{١٢}{٩}$ =

أتعلـــم

مجموع أَول ن حد من حدود متسلسلة هندسية حدها الأَول ﺃ وأَساسها ر ،

يعطي بالقانون $جـ_ن = ﺃ\left(\frac{١ - ر^{ن}}{١ - ر}\right)$، $ر \neq ١$

مثـال (٣)

$$\sum_{ن=١}^{٨} (٢^{ن}) = ٢^{١} + ٢^{٢} + ٢^{٣} + ٢^{٤} + \ldots\ldots\ldots\ldots + ٢^{٨}$$

ألاحظ أن المتسلسلة هندسية لماذا؟ : وفيها: ﺃ = ٢ ، ر = ٢ ، ن = ٨

إذن: $جـ_٨ = ٢\left(\frac{١ - ٢^{٨}}{١ - ٢}\right) = ٢\left(\frac{١ - ٢٥٦}{-١}\right) = ٥١٠$

تمارين ومسائل (٣ - ٥)

١ أَجدُ مجموع المتسلسلات الهندسية الآتية:

أ) $\sum_{ن=١}^{٤} (٢ \times ٣^{ن})$.

ب) ١ + ٥ + ٢٥ + ١٢٥ + ٦٢٥ .

ج) $٤ - ١ + \frac{١}{٤} - \frac{١}{١٦}$

٢ متسلسلة هندسية حدها الأَول ٧ و أَساسها -١ ، أَجدُ مجموع أَول عشر حدود منها.

٣ أَجدُ الحد الأَول في المتسلسلة الهندسية التي أَساسها ٢ ومجموع أَول أَربعة حدود يساوي ٦٠ .

٤ كم حداً يلزم أَخذه من متسلسلة هندسية حدها الأَول ٤ وأَساسها ٣ ليكون مجموعها ١٦٠ ؟

ورقة عمل

السؤال الأَول: أضعُ دائرة حول رمز الإِجابة الصحيحة:

١) ما قيمة $\sum^{\text{٥}} (\text{-١})^{\text{ر}}$؟ أ) -٥ ب) -١ ج) ١ د) ٥

٢) ما عدد الحدود اللازم أَخذها ليصبح مجموع المتسلسلة ٥+١٠+٢٠ +.. يساوي ٦٣٥؟

أ) ٧ ب) ٦ ج) ٥ د) ٤

٣) متسلسلة حسابية مجموع أَول ستة عشر حداً فيها ٣٢، وأَساسها -٢، ما حدها الأَول؟

أ) ٣٤ ب) ١٧ ج) ١٦ د) -١٣

٤) ما قيمة: $\text{لـو}_{\text{٣}}$ (٢٤٣ × ٨١)؟

أ) ٥ ب) ٢٠ ج) ٩ د) ٤

٥) ما مجموعة حلّ المعادلة: $\text{لـو}_{\text{٢٧}} (\text{٣})^{\text{٣س}-\text{١}} = \text{٥}$

أ) ٧ ب) ٣ ج) $\frac{\text{١٦}}{\text{٣}}$ د) -

السؤال الثاني: أَكتب أَول ٥ حدود لمتسلسلة حسابية مجموع حديها الثاني والتاسع = ٢٥، ومجموع حديها الثالث والسابع =٢٠.

السؤال الثالث: كم حداً يلزم أَخذه من المتسلسلة الهندسية ١ + ٣ + ٩ .... ليكون المجموع مساوياً ٣٦٤.

السؤال الرابع: إِذا كان مجموع أول ن حداً من متسلسلة حسابية يعطى بالعلاقة $\text{جـ}_{\text{ن}}$=ن(٢ن+١) أَجدُ الحد الأَول والأَساس لتلك المتسلسلة.

السؤال الخامس: ما مجموعة حلّ كل من المعادلة اللوغاريتمية الآتية؟ $\text{لـو}_{\text{٥}} (\text{٢٥})^{\text{٢س-٣}} = \text{لـو}_{\text{٨}} (\text{٦٤})^{\text{س}}$

العلامة المعيارية

تعريف

العلامـة المعياريـة: إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من البيانات يساوي (μ) وانحرافها المعياري σ، فإن العلامة المعيارية (ع) المقابلة للقيمة (س) تمثِّل عدد الانحرافات المعيارية التي تنحرفها القيمة س عن الوسط الحسابي للبيانات. وبالرموز فإنّ: $ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$

مثال (١)

إذا كان الوسط الحسابي لعلامات (٣٠) طالبا في الصف الثاني عشر الأَدبي في اختبار الجغرافيا يساوي (١٣) وانحرافها المعياري (٢). فإذا حصل ثلاثة طلاب على العلامات: ١١، ١٣، ٢٣، فما هي القيم المعيارية المناظرة لكل منهم؟

الحلّ:

$$ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

العلامة المعيارية (ع) المقابلة للعلامة (س =١١) هي $ع = \frac{١١ - ١٣}{٢} \longleftarrow ع = -١$

العلامة المعيارية (ع) المقابلة للعلامة (س =١٣) هي $ع = \frac{١٣ - ١٣}{٢} \longleftarrow ع = ٠$

العلامة المعيارية (ع) المقابلة للعلامة (س =٢٣) هي $ع = \frac{٢٣ - ١٣}{٢} \longleftarrow ع = ٥$

مثال (٢)

إذا كان الوسط الحسابي لأعمار مجموعة من الآباء يساوي (٤٣) سنة وانحرافها المعياري (٥) سنة وكانت العلامة المعيارية المقابلة للعمر(س) تساوي (٤) ما العمر س؟

الحلّ: $ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$ ومنها $٤ = \frac{س - ٤٣}{٥}$

$٢٠ = س - ٤٣$ إذن $س = ٦٣$

تمارين ومسائل (٤ - ١)

١ إذا كان $\mu = ٢٠$ ، $\sigma = ٤$، ما العلامة المعيارية (ع) التي تقابل العلامة س = ٢٨ .

٢ إذا كان مجموع علامات ٥٠ طالباً في امتحان التاريخ يساوي ١٠٠٠، وانحرافها المعياري $\frac{٥}{٢}$ ، ما العلامة المعيارية المناظرة للعلامة ١٥؟

٣ إذا كان الوسط الحسابي لأطوال ٢٠ طالباً يساوي ١٥٠سم وانحرافها المعياري ٢ سم، ما الطول الذي علامته المعيارية = ٣؟

٤ إذا كان الوسط الحسابي لكتلة مجموعة من الأشخاص يساوي ٥٠كغم، وانحرافها المعياري σ كغم، وكانت العلامتان المعياريتان المقابلتان للكتلتين: س، ٦٠ هما -٢ و ٤ على الترتيب:

أ) فما قيمة كل من س و σ؟

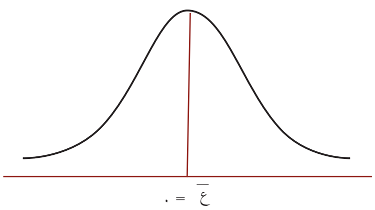
ب) مالعلامة المعيارية المقابلة للكتلة ٥٨كغم؟

التّوزيع الطبيعي المعياري

تعريف

منحنى التوزيع الطبيعي المعياري هو منحنى تكراري لتوزيع العلامات المعيارية مقابل تكراراتها، بوسط حسابي يساوي صفر، وانحراف معياري يساوي واحد. ويسمى هذا المنحنى شكل الجرس.

وأهم خصائصه:



١. متماثل حول ع̄ = ٠.

٢. يُقسّم المحور الأُفقي فيه بمقدار انحراف معياري واحد بكل وحدة.

٣. المساحة المحصورة بين المنحنى والمحور الأُفقي تساوي وحدة مربعة واحدة.
ومن الجدير بالإشارة أن المساحة المحصورة بين قيمتين معياريتين يمكن حسابها من خلال جداول منظمة ودقيقة أُعدّت لهذا الغرض. لاحظ الملحق (١).

نشاط (١)

أستخدم الجداول في حساب المساحة المحصورة بمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري والواقعة تحت (ع= ٠,٢٣)

ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤
٠,٠					
٠,١					
٠,٢				٠.٥٩١٠	
٠,٣					
٠,٤					

أجد من الجدول أن: المساحة تحت (ع= ٠,٢٣) = ٠,٥٩١٠

مثـال (١)

أستخدم الجداول في حساب المساحة المحصورة بمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري والواقعة:

١. تحت (ع = ١) ٢. تحت (ع = ١,٤٢) ٣. فوق(ع = ٢)

الحلّ: ١. المساحة تحت (ع = ١) تساوي ٠,٨٤١٣ ٢. المساحة تحت ع = (١,٤٢) تساوي ٠,٩٢٢٢

٣. المساحة فوق (ع = ٢)= ١- المساحة تحت (ع = ٢) = ١- ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

أتعلـــم

نسبة المساحة المحصورة تحت منحنى التوزيع الطبيعي عندما (ع> ع$_1$) إلى المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي المساحة تحت (ع =ع$_1$)

مثـال (٢)

استخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري في إيجاد نسبة المساحة في كل مما يأتي :

١) عندما (ع ≥ -٢,٦٤)　　　٢) عندما (٢≥ع ≥ ٣)　　　٣) عندما (ع ≤ -٢,٥٢)

الحلّ: ١) عندما (ع ≥ -٢,٦٤) فإن نسبة المساحة تحت (ع = -٢,٦٤) = ________________

٢) عندما (٢≥ع ≥ ٣) فإن نسبة المساحة بين (ع = ٢ ، ع = ٣)

المساحة تحت (ع = ٣) − المساحة تحت (ع = ٢) = ٠,٩٩٨٧ − ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢١٥

ألاحظ أن المساحة المحصورة بين ع = ٢ و ع = ٣ تمثل ما نسبته ٢,١٥٪ من المساحة الكلية تحت المنحنى.

٣) عندما (ع ≤ -٢,٥٢) = نسبة المساحة فوق (ع = -٢,٥٢) = ١ − نسبة المساحة تحت ع = -٢,٥٢

= ١ − ٠,٠٠٥٩ = ٠,٩٩٤١

تطبيقات على التوزيع الطبيعي المعياري:

تقدّم ١٠٠٠ طالب لامتحان ما في جامعة النجاح الوطنية. فإذا كانت علامات الطلبة تتبع التوزيع الطبيعي وسطه الحسابي ٦٠ وانحرافه المعياري ١٠ . أَجـدُ:

أ) النسبة المئوية للطلبة الذين تنحصر علاماتهم بين ٥٠، و٩٠.　　　**ب)** عدد الطلبة الذين علاماتهم تزيد عن ٨٠

الحلّ: أ) أفرض أَن س تمثّل علامات الطلبة، حيث μ = ٦٠ ، σ = ١٠

عندما س = ٥٠ فإن: ع = $\frac{٥٠ - ٦٠}{١٠}$ = -١ ، وعندما س = ٩٠ فإن: ع = $\frac{٩٠ - ٦٠}{١٠}$ = ٣

إذن النسبة التي تمثل (٥٠ ≥ س ≥ ٩٠) = نسبة المساحة عندما (-١ ≥ع ≥ ٣)

= (المساحة تحت ع = ٣) − (المساحة تحت ع = ١)

= ٠,٩٩٨٧ − ٠,١٥٨٧ = ٠,٨٤٠، إذن النسبة المئوية = ٠,٨٤٠ × ١٠٠٪ = ٨٤٪

ب) عندما س = ٨٠ فإن: ع = $\frac{٨٠ - ٦٠}{١٠}$ = ٢ إذن النسبة التي تمثل (س ≥ ٨٠) = نسبة المساحة فوق (ع=٢)

= ١ - المساحة تحت (ع = ٢) = ١ - ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

النسبة المئوية = ٠,٠٢٢٨ × ١٠٠٪ = ٢,٢٨٪ إذن عدد الطلبة = ٠,٠٢٢٨ × ١٠٠٠ ≈ ٢٣ طالباً.

تمارين ومسائل (٤ - ٢)

١ استخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري في إيجاد نسبة المساحة لكل من الآتية:

أ) عندما (ع ≤ ٠,٣٤) ب) عندما (ع ≥ -١,٦٤) جـ) عندما (-٢ ≤ ع ≤ ١,٦٧)

٢ إذا كان عمر التشغيل لبطارية سيارة من إنتاج مصنع فلسطيني يتبع التوزيع الطبيعي، بوسط حسابي ٢٠٠٠ ساعة، وانحراف المعياري ١٢٠ ساعة، ما النسبة المئوية للبطاريات التي يكون عمر التشغيل لها أكثر من ١٨٢٠ ساعة؟

٣ خطّ إنتاج في مصنع ينتج ٤٠٠ كيس من السكر تتبع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي يساوي ١,٠١ كغم وانحراف معياري يساوي ٠,٠٢ كغم . أجـــــــــدُ:

أ) النسبة المئوية للأكياس التي كتلتها أقل من ١,٠٣ كغم من إنتاج هذا الخط.

ب) عدد الأكياس التي كتلتها أكثر من ١,٠٢ كغم.

جـ) النسبة المئوية للأكياس التي تتراوح كتلتها بين ١ كغم و ١,٠٥ كغم.

٤ تقدم ١٠٠٠ طالب في إحدى الجامعات الفلسطينية لامتحان عام في المهارات التقنية. وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي ٦٨ وانحراف معياري σ، فإذا كان عدد الطلبة الذين حصلوا على علامة ٦٠ على الأقل هو ٧١٩ طالب.

أ) ما قيمة σ؟

ب) ما النسبة المئوية للطلبة الذين حصلوا على علامة ٤٠ على الأقل؟

جـ) ما عدد الطلبة الذين حصلوا على علامة ٧٠ على الأكثر؟

تمـــــارين عـــــامـــــة

السؤال الأَول: أضعُ دائرة حول رمز الإِجابة الصحيحة:

١) متسلسلة حسابية حدها الأَول ٣ وحدها العاشر ٢١، ما مجموع أول عشرة حدود منها؟

أ) ٢٠ ب) ٤٠ ج) ٥٠ د) ١٢٠

٢) متسلسلة هندسية حدها الأَول -١ ، أَساسها $\frac{١}{٣}$ ، ما مجموع أَول ثلاثة حدود منها؟

أ) $\frac{-١٣}{٩}$ ب) $\frac{٩}{١٣}$ ج) $\frac{٤}{٣}$ د) $\frac{٥٢}{٨١}$

٣) ما قيمة: لو$_{٣}$ (٢٤٣ × ٨١)؟

أ) ٥ ب) ٢٠ ج) ٩ د) ٤

٤) ما قيمة س التي تحقق المعادلة ٦٤ = $\left(\frac{١}{٣٢}\right)^{١-س}$ ؟

أ) -٥ ب) $\frac{-١}{٥}$ ج) ٥ د) $\frac{١١}{٥}$

٥) إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من العلامات يساوي ٥٦ والانحراف المعياري يساوي ٤ فما العلامة التي تنحرف انحرافين معياريين تحت الوسط؟

أ) ٥٧ ب) ٤٨ جـ) ١٢ د) -١٢

٦) إذا كان الفرق بين طولي شخصين يساوي ١٥سم، والفرق بين العلامتين المعياريتين المناظرتين لطوليهما يساوي ١,٥، فما الانحراف المعياري σ ؟

أ) ١٥ ب) ١,٥ ج) ١٠ د) ٧٠,٧٥

٧) إذا كانت كتلتا شخصين ٨٥كغم ، ٨٠ كغم، وكانت العلامتان المعياريتان المناظرتان لهما ١، -٢ على الترتيب فما الانحراف المعياري؟

أ) ١ ب) $\frac{٣}{٥}$ ج) $\frac{٥}{٣}$ د) ١٠

٨) إذا كانت ع تتبع التوزيع الطبيعي وكانت المساحة عندما (ع < ٢,٢٣) = **ك**
ما نسبة المساحة عندما (ع < -٢,٢٣)؟

أ) **ك** ب) ١ – **ك** ج) **ك** – ١ د) **ك** + ١

٩) إذا كان الفرق بين طولي شخصين يساوي ١٥سم، والفرق بين العلامتين المعياريتين المناظرتين لطوليهما يساوي ١,٥، فما الانحراف المعياري σ ؟

أ) ١٥ ب) ١,٥ ج) ١٠ د) ٠,٧٥

١٠) إذا كانت س تتبع التوزيع الطبيعي بوسط الحسابي μ وانحراف معياري σ ، ما قيمة المساحة الممكنة عندما (س $<\mu$) ؟

أ) ٠,٠٥ ب) ٠,٥٠ ج) ١ د) صفر

السؤال الثاني: إذا كان ع يتبع التوزيع الطبيعي، أَجد نسبة المساحة في كل مما يأتي:

أ) عندما (ع $\leq$ ١,١٣)
ب) عندما (ع $\geq$ ١,٤٢)
جـ) عندما (-١,٣٥ $\geq$ ع $\geq$ ٢,٠١)
د) عندما (-١,٤١ $\geq$ ع $\geq$ ٢,٤٥)

السؤال الثالث: ما مجموعة حلّ كل من المعادلة الأُسية $(٩)^{\text{س}+٤} = (٢٧)^{٤\text{س}}$ ؟

السؤال الرابع: ما مجموعة حلّ كل من المعادلة اللوغاريتمية الآتية؟ $\dfrac{\text{س}\,\text{لو}_{١٠}(٠,٠٠٠١)}{\text{لو}_{١٠٠}(١٠٠٠٠٠٠)} = -١$

السؤال الخامس: ما مجموعة حلّ المعادلة: $\dfrac{١}{٢}\,\text{س}^{٢}\,\text{لو}_{٨}(٦٤) + \text{س}\,\text{لو}_{٣}(٢٤٣) + ٢\,\text{لو}_{٥}(١٢٥) = ٠$

السؤال السادس: إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من المفردات يساوي ٥٠ والانحراف المعياري لها ١٠ أَجد:

أ) العلامة المعيارية المناظرة للمفردة ٦٠

ب) المفردة المناظرة للعلامة المعيارية -١,٥

السؤال السابع: إذا كانت س تمثل علامات طلبة صف ما بحيث س تتبع التوزيع الطبيعي حيث أَن الوسط الحسابي يساوي ٢٠ والانحراف المعياري يساوي ٤، أَجد كلاً مما يأتي:

أ) نسبة المساحة عندما (س $\leq$ ١٦) ب) نسبة المساحة عندما (س $\geq$ ٩)

السؤال الثامن: إذا كانت العلامتان المعياريتان المناظرتان للعلامتين ١٧ ، ٣٥ هما -١،٣ على الترتيب، فما الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات الخام؟

السؤال التاسع: صَفّ مكون من ٤٠ طالباً، إذا كانت علامات الطلاب رامي، محمد ، رائد هي ٨٠، ٩٠، س على الترتيب، وعلاماتهم المعيارية المناظرة هي: ٢، ٣، -١ على الترتيب، فما قيمة س؟

إختبار ذاتي

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات الاتية:

١) اذا كانت العلامة المعيارية لاحمد في اختبار الرياضيات تساوي ع = -٣,٥ فيما كانت العلامة المعيارية لناصر هي -١، فاي منهما كانت علامته الخام أفضل؟

أ.ناصر ب . أحمد ج. نفس مستوى الأداء د. لا يمكن ان نقرر

٢) إذا كان الوسط الحسابي لأطوال ٥١ طالبا تساوي ١٣٠ سم ،وكانت العلامة المعيارية المقابلة للطول ١٣٢ سم هي ٥,٠ ، فما لانحراف المعياري لتلك الاطوال ؟

أ. ٢ ب. ١ ج. ٤ د. ٨

٣) اذا كانت مجموع $\sum_{ر=١}^{ن}$ ح$_{ن}$ = $\sum_{ر=١}^{ن}$(٤ر – ٥) ، فما مجموع أول ٧٢ حدا فيها؟

أ. ٢٦٨٢ ب.١٣٤١ ج. ٨٥٤١ د. -١٠١٥٢

٤) ما عدد حدود المتسلسلة الهندسية مجموع $\sum_{ر=١}^{ن}$ ح$_{ن}$ = $\sum$ ٤(٢)^{ر} اللازم جمعها ليصبح ج ن =٦٠ ؟

أ. ٥ ب. ٤ ج. ٠٦ د. ٦

ما مجموعة حل المعادلة : لو$_{٤}$ (٢س-١) - لو$_{٤}$ (٣-س) = ٠ ؟

أ. {$\frac{٤}{٣}$} ب.{$\frac{٣}{٤}$} ج. {٠} د. {-٢}

السؤال الثاني: حل كل من المعادلات الاتية:

١) (٦٤)$^{-٢س}$ = $\frac{١}{٦٤}$ ٢) لو$_{ه}$ (س+٣) - لو$_{ه}$ (س-١) = ١

السؤال الثالث: متسلسلة حسابية يعطى مجموع أول ن حدأ منها ج$_{ن}$ = ٥ن^{٢} - ٣ن جد الحد العام لهذه المتسلسلة .

السؤال الرابع: تتبع كتل الأطفال الخدَج منحنى التوزيع الطبيعي ،بوسط حسابي ١,٢٤ كغم وانحراف معياري =٠,٢ ،اذا كان عدد الأطفال الحدج عام ٢٠١٨ يساوي ١٢٠٠ طفلا .

أ) ما عدد الأطفال الذين يقل وزنهم عن ١ كغم؟

ب) ما نسبة الأطفال الذين تنحصر أوزانهم من ١ أو ١,٣ كغم؟