١٢

دولــة فلـسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الريادي والفندقي والاقتصاد المنزلي والزراعي

الرزمة التعليمية

٢٠٢٤

دولــة فلـسطين
وزارة التربية والتعليم
مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
+970-2-2983280 هاتف | +970-2-2983250 فاكس

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

المحتويات

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الرزمة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيفها في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- التعرف على مفهوم المصفوفة.
- تنظيم بيانات معطاة على شكل مصفوفة وتحديد رتبة هذه المصفوفة.
- إيجاد ناتج جمع وطرح المصفوفات.
- إيجاد ناتج ضرب المصفوفات.
- إيجاد محدد المصفوفات المربعة من الرتبة ٢×٢ ، ٣×٣.
- إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة ٢×٢.
- حل نظام من المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات.
- توظيف المصفوفات في مسائل عملية وحل تمارين عامة.
- التعرف إلى مفهوم متوسط التغير للاقتران ق(س) وإيجاده.
- التعرف إلى مفهوم المشتقة الأولى للاقتران، وإيجادها باستخدام التعريف.
- التعرف على قواعد الاشتقاق، واستخدامها لإيجاد مشتقات بعض الاقترانات.
- إيجاد المشتقة الأولى باستخدام قاعدة السلسلة.
- إيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران.
- التعرف إلى العلاقة بين العلامة المعيارية والعلامة الخام.
- حساب العلامة المعيارية، وتفسيرها.
- التعرف إلى التوزيع الطبيعي المعياري، وخواصّه.
- استخدام جدول التوزيع الطبيعي في إيجاد المساحة تحت المنحنى.
- توظيف خواص التوزيع الطبيعي في حل مسائل عملية.
- التعرف إلى مفهوم التكامل غير المحدود.
- إيجاد التكامل غير المحدود.
- التعرف إلى قواعد التكامل غير المحدود وتوظيفها في إيجاده.
- التعرف إلى التكامل المحدود، وحسابه.
- التعرف إلى خواص التكامل المحدود وتوظيفها في حسابه.
- استخدام طريقة التعويض في إيجاد بعض التكاملات.
- توظيف التكامل المحدود في إيجاد بعض المساحات.
- التعرف إلى مفهوم الفائدة، وأنواعها.
- التعرف إلى عوامل الفائدة.
- إيجاد الفائدة البسيطة.
- إيجاد الفائدة المركبة.

المصفـوفة (Matrix)

تعريف:

المصفوفة: ترتيب من الأعداد الحقيقية على شكل مستطيل، مكونة من عدد من الصفوف وعدد من الأعمدة ومحصورة بالحاصرتين [ ]، ويرمز للمصفوفة بأحد الرموز: أ، ب، جـ، ....

أتعلم

(١) إذا كانت أ مصفوفة تتكون من م صف، ن عمود (م ، ن ∈ $ص^+$) فإن م × ن تسمى رتبة المصفوفة أ، وتقرأ م في ن، ويرمز لها بالرمز ($أ_{م \times ن}$) .

(٢) الأعداد الحقيقية المكونة للمصفوفة تسمى عناصر (مدخلات)،

$أ_{ي هـ}$ تعني مدخلة الصف ي والعمود هـ في المصفوفة أ.

(٣) ناتج الضرب م×ن يمثل عدد مدخلات(عناصر) المصفوفة أ.

(٤) تكتب المصفوفات حسب مدخلاتها، فمثلاً : $أ_{٣\times٢} = \begin{bmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{bmatrix}$ ، $أ_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{bmatrix}$

نشاط: إذا كانت: $أ = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ & ٤- \\ ١- & ٥ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢- & ٣- \\ \sqrt{٥} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ & ٥- \end{bmatrix}$

رتبة أ تساوي ٣×٣ ، رتبة ب .... ، رتبة جـ ......

$أ_{٢١}$ هي مدخلة الصف الأول والعمود الثاني وتساوي ٣ ، $ب_{٢٢}$ = ... ، $جـ_{٣١}$ = ...

العدد -٤ هو مدخلة الصف الثاني والعمود الأول في المصفوفة أ وتمثل بالرموز $أ_{١٢}$

مثال (١): المصفوفة أ من الرتبة ٢×٢، إذا عرفت مدخلات المصفوفة أ بحيث أن $أ_{ي هـ}$ = ي + هـ ، اكتب المصفوفة بذكر مدخلاتها؟

الحل: $أ_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{bmatrix}$ ، $أ_{١١}$ = ١ + ١ =٢ ، $أ_{٢١}$ = ١ + ٢ = ٣

$أ_{١٢}$ =٢ + ١ = ٣ ، $أ_{٢٢}$ = ٢ + ٢ = ٤

$أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

مصفوفات خاصة:

مصفوفة الصف: هي المصفوفة التي تتكون من صفّ واحد فقط.

مثال: أ = $\begin{bmatrix} \pi & \sqrt{5} & -1 \end{bmatrix}$ ، أ رتبتها ١×٣ ، تسمى أ مصفوفة صف.

مصفوفة العمود: هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط.

مثال: جـ = $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -3 \end{bmatrix}$ ، جـ رتبتها ٢×١ ، تسمى جـ مصفوفة عمود.

المصفوفة المربعة: المصفوفة التي فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

مثال (١): أ = $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من الرتبة ٢×٢ ويمكن تسميتها مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية.

تسمى المدخلات $\sqrt{2}$ ، ٣ القطر الرئيس للمصفوفة أ ، والمدخلات ١ ، $\frac{1}{2}$ القطر الثانوي للمصفوفة أ.

مثال (٢): جـ = $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -4 & 12 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة ويمكن كتابتها بالصورة جـ$_{3}$ أو جـ$_{3\times3}$.

المصفوفة الصفرية: المصفوفة التي جميع مدخلاتها أصفار، ويرمز لها بالرمز (و).

تعريف:

تتساوى المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية (أ$_{يهـ}$ = ب$_{يهـ}$
والعكس صحيح.

مثال (٣): إذا كانت $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ص & -٢ \\ ٣ & ١ & ٢س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ٦ & -٢ \\ ٣ & ١ & -٦ \end{bmatrix}$ ما قيمة س، ص؟

الحل: المصفوفتان متساويتان، فمدخلاتهما المتناظرة متساوية.

ص= ٦

٢س = -٦ ومنها س = -٣

تمارين ومسائل

س١: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ & ٤ \\ \sqrt{٥} & \frac{٢}{٣} & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٦ & -٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٨ & -٣ \\ \sqrt{١٦} & ٤ \\ ٢,٣ & -٥ \end{bmatrix}$

١) ما رتبة كل من المصفوفات أ ، ب ، جـ ؟

٢) ما قيمة $أ_{٢٢}$ ، $ب_{١٢}$ ، $جـ_{١٣}$ ، $جـ_{٢٣}$ ؟

٣) ما قيمة $أ_{٢١}$ + $جـ_{٢٣}$ ؟

س٢: أجد قيمة س، ص في المصفوفات الآتية:

١) $\begin{bmatrix} ٦ & ٣ص \\ ١-س & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٩ \\ -٢ & -٢ \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} س+٤ \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣س \end{bmatrix}$

س٣: المصفوفة جـ من الرتبة ٣×٢، إذا عرفت مدخلاتها بحيث أن $جـ_{ي هـ}$ = ٢ي – هـ، أكتب المصفوفة بذكر مدخلاتها.

جمع المصفوفات وطرحها

(Summation and Subtraction of Matrices)

تعريف:

تجمع المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة، وتتم عملية جمع المصفوفتين بجمع مدخلاتهما المتناظرة. وتكون مصفوفة الناتج من نفس الرتبة.

تطرح المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة، وتتم عملية طرح المصفوفتين بطرح مدخلاتهما المتناظرة. وتكون مصفوفة الناتج من نفس الرتبة.

مثال (١): إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٩ & ١ \\ ١ & ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٠ \\ ٠ & -٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، أجد أ + ب ، أ − ب ؟

الحل: أ + ب = $\begin{bmatrix} ٣ + ٦ & ٩ + ٣ & ١ + ٠ \\ ١ + ٠ & ٢ + -٤ & -٣ + ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ١٢ & ١ \\ ١ & -٢ & -٢ \end{bmatrix}$

أ − ب = $\begin{bmatrix} ٣ - ٦ & ٩ - ٣ & ١ - ٠ \\ ١ - ٠ & ٢ - -٤ & -٣ - ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٦ & ١ \\ ١ & ٦ & -٤ \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفة بعدد حقيقي:

إذا كان ك عدداً حقيقياً، $أ_{م \times ن}$ مصفوفة، فإن $(كأ)_{م \times ن}$ مصفوفة، تنتج مدخلاتها من ضرب كل مدخلة من مدخلات المصفوفة أ في ك.

مثال (٢): إذا كان أ = $\begin{bmatrix} -٣ & ٩ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ أجد: ١) ٢ أ ٢) $\frac{١}{٢}$ أ ٣) - أ

الحل: ١) ٢ أ = $\begin{bmatrix} ٢ \times -٣ & ٢ \times ٩ \\ ٢ \times ٠ & ٢ \times ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & ١٨ \\ ٠ & ١٠ \end{bmatrix}$

٢) $\frac{١}{٢}$ أ = $\begin{bmatrix} -\frac{٣}{٢} & \frac{٩}{٢} \\ ٠ & \frac{٥}{٢} \end{bmatrix}$

٣) -أ = $\begin{bmatrix} ٣ & -٩ \\ ٠ & -٥ \end{bmatrix}$ وتسمى هذه المصفوفة بالمعكوس الجمعي للمصفوفة أ.

مثال (٣): إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ١١ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٦ & ٩ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ١- \\ ٣- & ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

أجد: ١) -أ + ٢ب ٢) ٣ب – ٢أ

الحل: ١) -أ + ٢ب =

$$\begin{bmatrix} ٢+١١- & ٦+٣- & ٢-+٢- \\ ٦-+٥- & ٠+٦- & ٤+٩- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ١- \\ ٣- & ٠ & ٢ \end{bmatrix} ٢ + \begin{bmatrix} ١١- & ٣- & ٢- \\ ٥- & ٦- & ٩- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٩- & ٣ & ٤- \\ ١١- & ٦- & ٥- \end{bmatrix} =$$

٢) ٣ب – ٢أ =

$$\begin{bmatrix} ٢٢ & ٦ & ٤ \\ ١٠ & ١٢ & ١٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٩ & ٣- \\ ٩- & ٠ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٦ & ٩ \end{bmatrix} ٢ - \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ١- \\ ٣- & ٠ & ٢ \end{bmatrix} ٣$$

$$\begin{bmatrix} ١٩- & ٣ & ٧- \\ ١٩- & ١٢- & ١٢- \end{bmatrix} =$$

مثال (٤): أجد قيمة س، ص فيما يأتي: ٢ $\begin{bmatrix} س \\ ٣ \end{bmatrix}$ – ٣ $\begin{bmatrix} ٤ \\ ص \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$

الحل: $\begin{bmatrix} ٢س \\ ٦ \end{bmatrix}$ – $\begin{bmatrix} ١٢ \\ ٣ص \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ٢س – ١٢ \\ ٦ – ٣ص \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$

٢س – ١٢ = ٢ ومنها س = ٧

٦ – ٣ص = ٩ ومنها ص = ١-

خصائص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي:

اذا كانت أ، ب، جـ مصفوفات من نفس الرتبة، ك ∋ ح:

أ) أ + ب = ب + أ .... (الخاصية التبديلية).

ب) (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) .... (الخاصية التجميعية).

جـ) أ + و = و + أ = أ .... (المصفوفة الصفرية).

د) أ + (-أ) = (-أ) + أ = و.................................. (المعكوس الجمعي).

هـ) ك (أ + ب) = ك أ + ك ب ....(ضرب عدد في مجموع مصفوفتين).

مثال (٥): أجد المصفوفة سـ في المعادلة الآتية: $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ + ٢سـ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}$ ،

الحل: ($\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٥- & ٤- \end{bmatrix}$) + ٢سـ = ($\begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٥- & ٤- \end{bmatrix}$) (بإضافة المعكوس الجمعي)

$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ + ٢سـ = $\begin{bmatrix} ١- & ١- \\ ٣- & ٧- \end{bmatrix}$ ومنها سـ = $\begin{bmatrix} \frac{١-}{٢} & \frac{١-}{٢} \\ \frac{٣-}{٢} & \frac{٧-}{٢} \end{bmatrix}$

أتعلم

المعادلة $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ + ٢سـ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}$ تسمى معادلة مصفوفية، حيث سـ مصفوفة،

وكذلك $\begin{bmatrix} س \\ ٢ \end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix} ١٢ \\ ٣ص \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$ **تسمى معادلة مصفوفية، حيث س ، ص أعداد حقيقية.**

تمارين ومسائل

س٢: أجد ناتج ما يأتي:

١) $\begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ ٣ & -٢ \\ -٥ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ١ & -٢ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix}$

س٣: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & ٣ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & -٣ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ٠ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

أجد: ١) (أ + ب) − ٢ جـ ٢) (أ + ب) + جـ ٣) أ + (ب + جـ)

٤) ٢ (أ + جـ) ٥) (ب + جـ) ٦) (جـ + ب)

س٤: أحل المعادلات المصفوفية الآتية:

١) $\begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ \text{س} - ٣\text{ص} & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & \text{س} + \text{ص} \\ ٠ & ٧ \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} \text{س} \\ ١ \\ ٤ \end{bmatrix} + ٣ \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢\text{ص} \\ -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ \\ ١٣ \\ ١ \end{bmatrix}$

س٥: أحل المعادلات المصفوفية الآتية:

١) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١٠ & -٣ \end{bmatrix} - ٢\text{س} = ٣ \begin{bmatrix} ٠ & -٥ \\ ٤ & ٩ \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} -٣ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٥ & -٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٠ & -٢ \\ ٠ & ١ & ٣ \end{bmatrix} + \frac{١}{٢}\text{ص}$

ضرب المصفوفات

(Matrix Multiplication)

تعريف:
إذا كانت أ ، ب مصفوفتين، وكان عدد الأعمدة في أ يساوي عدد الصفوف في ب، فإن المصفوفة أ . ب معرفة، والناتج مصفوفة جـ من الرتبة (عدد صفوف أ في عدد أعمدة ب)، أي أن $أ_{م×ن} . ب_{ن×هـ} = جـ_{م×هـ}$

نشاط (١): أكمل الجدول الآتي:

رتبة المصفوفة أ	رتبة المصفوفة ب	أ . ب معرفة	أ . ب غير معرفة	رتبة المصفوفة الناتجة
٢×٣	٣×٢	✓	______	٢×٢
٣×٢	٣×٢	....	....	______
٣×١	....	✓	______	٣×٣

مثال (١): إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ١- & ٢ \\ ٢- & ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٥- & ٢ & ١- \\ ٢- & ١ & ٠ \\ ١- & ٢- & ١- \end{bmatrix}$

أجـد: أ.ب ، ب.أ إن أمكن؟

الحل: $أ_{٢×٣} . ب_{٣×٣} = جـ_{٢×٣} = \begin{bmatrix} جـ_{٣١} & جـ_{٢١} & جـ_{١١} \\ جـ_{٣٢} & جـ_{٢٢} & جـ_{١٢} \end{bmatrix}$

$$جـ = \begin{bmatrix} ٤ & ١- & ٢ \\ ٢- & ١ & ٠ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٥- & ٢ & ١- \\ ٢- & ١ & ٠ \\ ١- & ٢- & ١- \end{bmatrix}$$

$جـ_{١١}$ = ٢ × ١- + ١- × ٠ + ٤ × ١- = ٦- وهي ناتج جمع (ضرب مدخلات الصف الأول من المصفوفة أ في مدخلات العمود الأول من المصفوفة ب). وهكذا بقية مدخلات المصفوفة جـ.

$$ج = \begin{bmatrix} 2\times -1 + -1\times 0 + 4\times -1 & 2\times 2 + -1\times 1 + 4\times -2 & 2\times -5 + -1\times -2 + 4\times -1 \\ 0\times -1 + 1\times 0 + -2\times -1 & 0\times 2 + 1\times 1 + -2\times -2 & 0\times -5 + 1\times -2 + -2\times -1 \end{bmatrix}$$

$$ج = أ \,.\, ب = \begin{bmatrix} -6 & -5 & -12 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

ب . أ غير معرفة، لأن عدد أعمدة ب لا يساوي عدد صفوف أ.

أتعلم

المدخلة $ج_{ي هـ}$ = مجموع حواصل ضرب المدخلات في الصف ي من المصفوفة أ في مدخلات العمود هـ من المصفوفة ب.

خصائص عملية الضرب على المصفوفات:

إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث أن عملية الضرب والجمع في العبارات الآتية معرفة، ك∈ح فإن:

١. (أ . ب) . جـ = أ . (ب . جـ)................ الخاصية التجميعية.

٢. أ . (ب + جـ) = (أ . ب) + (أ . جـ)... توزيع الضرب على الجمع من اليمين.

٣. (أ + ب) . جـ = (أ . جـ) + (ب . جـ).. توزيع الضرب على الجمع من اليسار.

٤. أ . م = م . أ = أ .... (م) المصفوفة المحايدة.

٥. ك (أ . ب) = (ك أ) . ب = أ . (ك ب)

تمارين ومسائل

س١: أجد ناتج ما يأتي (إن أمكن):

١) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

٣) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

٤) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

س٢: إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} 7 & 8 & 15 \\ 3 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

أجد (إن أمكن):

١) ب . جـ　　٢) ٢أ . (-ب)　　٣) جـ^2　　٤) أ^2

س٣: أجد قيم س ، ص فيما يأتي:

$$\begin{bmatrix} س & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -14 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

س٤: إذا كان أ $= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ب $= \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ جـ $= \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ أجد:

١) (أ . ب) . جـ　　٢) أ . (ب . جـ)　　٣) ٢ (أ . ب)

٤) (٢أ) . ب　　٥) أ . (٢ب)

المحددات (Determinants)

تعريف:

إذا كانت $أ_{٢×٢} = \begin{bmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{bmatrix}$ ، فإن المقدار $(أ_{١١} \times أ_{٢٢}) - (أ_{٢١} \times أ_{١٢})$ يسمى محدد المصفوفة أ

ويرمز له بالرمز | أ |.

مثال (١): إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٣- & ٦ \\ \frac{١}{٢} & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$.

أجد: ١) | أ | ٢) | ب | ٣) | أ . ب |

الحل: ١) $| أ | = \begin{vmatrix} ٣- & ٦ \\ \frac{١}{٢} & ١ \end{vmatrix} = (٦ \times \frac{١}{٢}) - (٣- \times ١) = ٣ + ٣ = ٦$

٢) $| ب | = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = (٢ \times ٣) - (١ \times ١) = ٦ - ١ = ٥$

٣) $أ . ب = \begin{bmatrix} ٣- & ٩ \\ ٢,٥ & ٢,٥ \end{bmatrix}$ ، $| أ . ب | = (٩ \times ٢,٥) - (٣- \times ٢,٥) = ٣٠$

مثال (٢): إذا كان $\begin{vmatrix} س & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٧$، أجد قيمة س.

الحل: $(٣ \times ٥) - (س \times ٢) = ٧$ ومنها $س = ٤$

تعريف:

تعريف: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{bmatrix}$ ، فإن محدد المصفوفة أ هو:

$$| أ | = أ_{١١} \begin{vmatrix} أ_{٣٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix} - أ_{٢١} \begin{vmatrix} أ_{٣٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix} + أ_{٣١} \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix}$$

مثال (٣): أجد محدد المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} -١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & -٣ & ١ \\ ٥ & -٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ؟

الحل: $|أ| = ٢ \begin{vmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & ٥ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٥ \end{vmatrix} + -١ \begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ -٢ & ٠ \end{vmatrix}$

$= ٢((-٣×٥) - (٢×-٢)) - ٣((١×٥) - (٢×٠)) + (-١)((١×-٢) - (-٣×٠))$

$= ٢(-١١) - ٣(٥) -١(-٢) = -٢٢ - ١٥+٢ = -٣٥$

تمارين ومسائل

س١: أجد: ١) $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix}$ ، ٢) $\begin{vmatrix} ٤ & ١٢ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}$ ، ٣) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ & -٣ \\ -٢ & ٣ & ٤ \end{vmatrix}$

س٢: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، أجد $|أ . ب|$ ، $|أ + ب|$ ، $|أ - ٢ب|$

س٣: أجد قيمة س بحيث $\begin{vmatrix} ١ & س \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٥$

س٤: أجد قيمة س بحيث $\begin{vmatrix} ١ & -٢ & س \\ -١ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٦ & ٥ \end{vmatrix} = ١١$

النظير الضربي للمصفوفة المربعة
(Inverse Matrix)

تعريف:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين ثنائيتين، وكان أ.ب = ب.أ = م$_{٢×٢}$ (م$_{٢×٢}$ المصفوفة المحايدة أو مصفوفة الوحدة).

فإن ب تسمى النظير الضربي لِـ أ، وبالرموز ب = أ$^{-١}$ ، (أ$^{-١}$ النظير الضربي للمصفوفة أ).

مثال (١): إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢- & ٥ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$ أبين أن ب = أ$^{-١}$ ؟

الحل: أ . ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢- & ٥ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١×٢ + ٢-×١ & ٢-×٢ + ٥×١ \\ ١×٥ + ٢-×٢ & ٢-×٥ + ٥×٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

ب . أ = $\begin{bmatrix} ٢- & ٥ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥×٢- + ٢×٥ & ٢×٢- + ١×٥ \\ ٥×١ + ٢×٢- & ٢×١ + ١×٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

أ . ب = ب . أ = م ومنها ب = أ$^{-١}$ وكذلك أ = ب$^{-١}$.

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة الثنائية:

تعريف:

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{bmatrix}$ فإن أ$^{-١}$ = $\frac{١}{|\text{أ}|} \begin{bmatrix} -أ_{٢١} & أ_{٢٢} \\ أ_{١١} & -أ_{١٢} \end{bmatrix}$ = حيث | أ | ≠ ٠ .

إذا كان | أ | = ٠ ، فإن أ ليس لها نظير ضربي (تسمى أ مصفوفة منفردة).

مثال (٢): أي من المصفوفات الآتية منفردة؟

١) $\begin{bmatrix} ٣- & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} ١٠ & ٥- \\ ٢- & ١ \end{bmatrix}$ ٣) $\begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ٤). $\begin{bmatrix} \sqrt{٤} & \frac{٣}{٤} \\ \frac{٤}{٣} & ١ \end{bmatrix}$

الحل: ١) $\begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = (١ \times ٤) - (-٣ \times ٢) = ١٠ \neq ٠$ ليست منفردة.   ٢) $\begin{vmatrix} -٥ & ١٠ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} = ٠$ منفردة.

٣) $\begin{vmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١٢ - ١٢ = ٠$ منفردة.   ٤) $\begin{vmatrix} \frac{٣}{٤} & ٢ \\ ١ & \frac{٤}{٣} \end{vmatrix} = -١$ ليست منفردة.

مثال (٣): أجد أ $^{-١}$ (إن أمكن) حيث أ $= \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٩ & ٧ \end{bmatrix}$.

الحل: $|أ| = ٧ \times ٥ - ٤ \times ٩ = ٣٥ - ٣٦ = -١$

أ $^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{bmatrix} ٧ & -٤ \\ -٩ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & ٤ \\ ٩ & -٥ \end{bmatrix}$ أتحقق من أن النظير الضربي لِـ أ $^{-١}$ هو أ .

مثال (٤): أحل المعادلة المصفوفية الآتية: س . $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

الحل: أضرب طرفي المعادلة بالنظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ من اليسار.

النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ لماذا ؟

س . $\left(\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} \right)$

س . $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & -٩ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ لماذا؟

س . م $= \begin{bmatrix} ٦ & -٩ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ومنهـا س $= \begin{bmatrix} ٦ & -٩ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$

تمارين ومسائل

س١: أجد النظير الضربي للمصفوفات الآتية (إن أمكن):

١) $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٢} \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ٣) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

س٢: أجد قيمة س التي تجعل المصفوفات الآتية منفردة حيث ١) $\begin{bmatrix} ٢ & س \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} ٩ & س \\ س & ٤ \end{bmatrix}$

س٣: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، وكانت ب = ٤أ ، أجد $ب^{-١}$ ؟

س٤: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ، أجد: $(أ \,.\, ب)^{-١}$ ، $ب^{-١} \,.\, أ^{-١}$ ؟ ماذا تلاحظ؟

س٥: أحل المعادلة المصفوفية ٢س . $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$

حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات
(Solving Linear System of Equations by Matrices)

١- طريقة النظير الضربي:

مثال (١): أحل النظام الآتي باستخدام النظير الضربي: ٢س + ص = ٤

٥س − ٢ص = ١

الحل: أكتب النظام على صورة معادلة مصفوفية $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ١ \end{bmatrix}$

أضرب طرفي المعادلة المصفوفية بالنظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix}$ من اليمين.

النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix} \frac{٢}{٩} & \frac{١}{٩} \\ \frac{٥}{٩} & \frac{٢-}{٩} \end{bmatrix}$ لماذا ؟

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{٢}{٩} & \frac{١}{٩} \\ \frac{٥}{٩} & \frac{٢-}{٩} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{٩} & \frac{١}{٩} \\ \frac{٥}{٩} & \frac{٢-}{٩} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٤ \\ ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix} \quad \text{ومنها} \quad \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

ومنها س = ١ ، ص = ٢ (أتحقق من ذلك).

٢- طريقة المحددات (طريقة كريمر).

طريقة كريمر: في النظام $أ_{١}$ س + $ب_{١}$ ص = ك

$أ_{٢}$ س + $ب_{٢}$ ص = ل ،

تكون س = $\frac{|أ_{س}|}{|أ|}$ ، ص = $\frac{|أ_{ص}|}{|أ|}$ حيث أ = $\begin{bmatrix} أ_{١} & ب_{١} \\ أ_{٢} & ب_{٢} \end{bmatrix}$ ، $|أ| \neq ٠$ ، $أ_{س} = \begin{bmatrix} ك & ب_{١} \\ ل & ب_{٢} \end{bmatrix}$ ، $أ_{ص} = \begin{bmatrix} أ_{١} & ك \\ أ_{٢} & ل \end{bmatrix}$.

مثال (٢): أحل النظام الآتي باستخدام طريقة كريمر: ٢س − ص = ٧ ، س + ٢ ص = ١

الحل: أكتب النظام على صورة معادلة مصفوفية $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ١ \end{bmatrix}$

$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات، ومنها | أ | = (٢×٢) − (١×-١) = ٥

$\text{أ}_{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٧ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ استبدال العمود الأول في المصفوفة أ بالثوابت، ومنها | $\text{أ}_{\text{س}}$ | = ١٥

$\text{أ}_{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ استبدال العمود الثاني في المصفوفة أ بالثوابت، ومنها | $\text{أ}_{\text{ص}}$ | = -٥

ومنها س = $\frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \frac{١٥}{٥} = ٣$ ، ص = $\frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \frac{-٥}{٥} = -١$ (أتحقق).

مثال (٣): أحل المعادلة المصفوفية الآتية بطريقة كريمر $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ \\ ١ \end{bmatrix}$

الحل: $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\text{أ}_{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٩ & ٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٥ & ٩ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$

| أ | = ٧ ، | $\text{أ}_{\text{س}}$ | = ٧ ، | $\text{أ}_{\text{ص}}$ | = ١٤

س = $\frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \frac{٧}{٧} = ١$ ، ص = $\frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \frac{١٤}{٧} = ٢$ (أتحقق).

تمارين ومسائل

س١: أحل الأنظمة الخطيّة الآتية باستخدام طريقة النظير الضربي:

١) ٣س − ٤ص = ٤ ، -٢س + ٤ص = ٤

٢) س − ص = ٣ ، ٢س = ٦ − ص

س٢: أحل الأنظمة الخطيّة الآتية باستخدام طريقة كريمر:

١) س − ص = ٨ ، ٢س + ص = ١

٢) ٢ ص − س = ١ ، ٢س + ص − ٨ = ٠

س٣: في نظام من معادلتين خطيّتين كانت | أ | = ١١، |$أ_{س}$| = ٣٣، | $أ_{ص}$ | = ١١، أجد قيم س ، ص ؟

س٤: في نظام من معادلتين خطيّتين على الصورة أس + ب ص + جـ = ٠ ، كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١١ & ٣ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة المعاملات، ب = $\begin{bmatrix} -٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة الثوابت.

أ) أكتب المعادلتين الخطيّتين بدلالة س ، ص.

ب) أستخدم طريقة كريمر لحل النظام.

متوسط التغير
(Rate of Change)

تعريف:

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً، وتغيرت فيه س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن $\triangle$س = $س_٢$ − $س_١$ تمثل التغير في س وتقرأ دلتا س.

وبناءً على التغير في س تتغير ص، حيث $\triangle$ص = $ص_٢$ − $ص_١$ = ق($س_٢$) − ق($س_١$) تمثل التغير في ص وتقرأ دلتا ص.

مثال (١): إذا كان ص = ق (س) =٢س + ٣ أجد $\triangle$س ، $\triangle$ص ، عندما تتغير س من $س_١$ = ١ إلى $س_٢$ = ٤.

الحل: $\triangle$س = $س_٢$− $س_١$ = ٤ − ١ = ٣

$\triangle$ص = $ص_٢$− $ص_١$ = ق($س_٢$) − ق($س_١$) = ق(٤) − ق(١) =١١ − ٥ = ٦

تعريف:

يسمى المقدار $\frac{\triangle ص}{\triangle س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$ متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$.

مثال (٢): إذا كان ص= ق(س)=٢$س^٢$ + ٤ ، س $\in$ ح ، وتغيرت س من $س_١$= ٢ إلى $س_٢$= ٥، أجد متوسط التغير للاقتران ق(س).

الحل: متوسط التغير = $\frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$$= \frac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢} = \frac{٥٤ - ١٢}{٥ - ٢} = ١٤$$

مثال (٣): إذا كان ص= ق(س) = ١ − ٣س ، س $\in$ ح، وزادت س من $س_١$= ٣ بمقدار ٢، أجد متوسط التغير للاقتران ق(س).

الحل: متوسط التغير = $\frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$\triangle$س = $س_٢$− $س_١$

٢ = $س_٢$ − ٣ ومنها $س_٢$ = ٥

متوسط التغير = $\frac{ق(٥) - ق(٣)}{٥ - ٣} = \frac{{}^-١٤ - {}^-٨}{٥ - ٣} = {}^-٣$

أتذكر

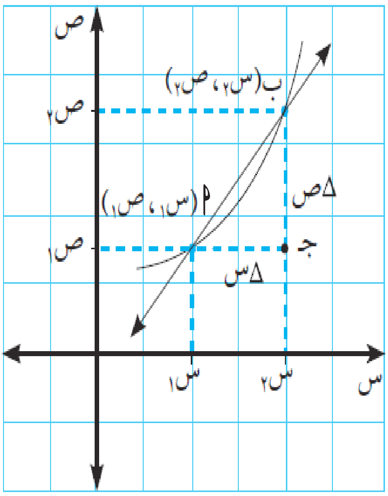
إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران

ص= ق(س)، والنقطتان ﺃ($س_١$ ،$ص_١$) ، ب($س_٢$،$ص_٢$)

واقعتين عليه، فإن ميل المستقيم القاطع ﺃب = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

ومتوسط التغير للاقتران ص= ق(س) يساوي $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ أي

أن متوسط التغير للاقتران يساوي ميل المستقيم القاطع.



مثال (٤): تقع النقطتان ﺃ(-١، -٣)، ب(٣، ٩) على منحنى الاقتران ص= ق(س)، أجد ميل المستقيم القاطع ﺃب.

الحل: ميل المستقيم القاطع ﺃب = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

= $\frac{٩ - -٣}{٣ - -١}$ = ٣

تمارين ومسائل

س١: إذا كان ص = ق(س)= ٥س - ١ أجد Δس ، Δص عندما تتغير س:

أ) من $س_١$ = ٢ إلى $س_٢$ = ٣,٨

ب) من $س_١$ = ٤ إلى $س_٢$ = -٢

س٢: أجد متوسط التغير للاقتران ص = ق(س) في الحالات الآتية:

أ) ق(س) = $\sqrt{س - ٣}$ ، عندما تتغير س من $س_١$ = ٧ إلى $س_٢$ = ٤

ب) ق(س) = $س^٢$ - ١ ، عندما $س_١$ = ٢ ، Δس = ٤

س٣: ليكن ص = ق(س) اقتراناً، وكان متوسط تغير الاقتران عندما تتغير س من $س_١$ = ١ إلى $س_٢$ = ٤ هو ١٣، أجد:

أ) التغير في ص

ب) ق(٤) علما بأن ق(١) = ٦

س٤: إذا كان ق(س) = س + ٧ ، أجد ميل القاطع المارّ بالنقطتين ﺃ(-٢ ، ق(-٢)) ، ب(٣ ، ق(٣)).

مفهوم المشتقة الأولى
(First Derivative)

تعريف: المشتقة الأولى للاقتران ص= ق(س) عند النقطة (س$_1$ ،ق(س$_1$)) هي:

$$\underset{\triangle س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{ق(س_1 + \triangle س) - ق(س_1)}{\triangle س}$$ ويرمز لها بالرمز ق$^/$(س$_1$) أو $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=س_1}$ أو $\left.ص^/\right|_{س=س_1}$

وللتبسيط يمكن كتابة $\triangle$س= هـ ، فتكون ق$^/$(س$_1$) = $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{ق(س_1 + هـ) - ق(س_1)}{هـ}$

مثال (١): إذا كان ق(س) = ٥ ، أجد ق$^/$(٢) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

الحل: ق$^/$(٢) = $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{ق(٢ + هـ) - ق(٢)}{هـ} = \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٥ - ٥}{هـ}$

= صفر

مثال (٢): إذا كان ق(س) = ٣س، أجد ق$^/$(١) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

الحل: ق$^/$(١) = $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{ق(١ + هـ) - ق(١)}{هـ} = \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٣(١ + هـ) - ٣(١)}{هـ}$

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٣ + ٣هـ - ٣}{هـ} = \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٣هـ}{هـ}$

= ٣

مثال (٣): إذا كان ق(س) = ٣س^٢ + ١، أجد ق$^/$(٢) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة؟

الحل: ق$^/$(٢) = $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{ق(٢ + هـ) - ق(٢)}{هـ} = \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٣(٢ + هـ)^٢ + ١ - (٣(٢)^٢ + ١)}{هـ}$

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٣(٤+٤هـ+هـ^٢)+١ - (٣\times٤+١)}{هـ}$

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{١٣ + ١٢هـ + ٣هـ^٢ - ١٣}{هـ} = \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{١٢هـ + ٣هـ^٢}{هـ} = \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{هـ(١٢ + ٣هـ)}{هـ}$

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ ١٢ + ٣هـ = ١٢ + ٣×٠

= ١٢

مثال (٤): إذا كان ق(٢) = ٨ ، ق$^{/}$(٢) = ٢ أجد $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{ق(٢) - ق(٢ + هـ)}{٥هـ}$

الحل: $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{ق(٢) - ق(٢ + هـ)}{٥هـ} = \frac{-١}{٥} \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{ق(٢+هـ) - ق(٢)}{هـ}$

$= \frac{-١}{٥}$ ق$^{/}$(٢) لماذا؟

$= \frac{-١}{٥} \times ٢ = \frac{-٢}{٥}$

مثال (٥): إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س في الفترة [٣ ، ٣ + هـ].

يساوي $\frac{هـ^٢ - ٥هـ}{هـ}$ ، أجد ق$^{/}$(٣).

الحل: متوسط التغير = $\frac{ق(٣+هـ) - ق(٣)}{هـ} = \frac{هـ^٢ - ٥هـ}{هـ}$

ق$^{/}$(٣) = $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{ق(٣+هـ) - ق(٣)}{هـ} = \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{هـ^٢ - ٥هـ}{هـ}$

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{هـ(هـ - ٥)}{هـ} = -٥$

ألاحظ أن ق$^{/}$(س$_١$) تساوي نهاية متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [س$_١$ ، س$_١$ + هـ] عندما تؤول هـ إلى الصفر.

مثال (٦): إذا كان ق(س) = س^٢ + ٣، أجد ق$^{/}$(س) باستخدام تعريف المشتقة، ثم أجد ق$^{/}$(٢) ؟

الحل: ق$^{/}$(س) = $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} = \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{(س+هـ)^٢ + ٣ - (س^٢+٣)}{هـ}$

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{(س^٢ + ٢سهـ + هـ^٢) + ٣ - (س^٢ + ٣)}{هـ}$

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{س^٢ + ٢سهـ + هـ^٢ + ٣ - س^٢ - ٣}{هـ}$

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{٢سهـ + هـ^٢}{هـ} = \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{هـ(٢س + هـ)}{هـ}$

$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} (٢س + هـ) = ٢س$

ومنها ق$^{/}$(٢) = ٢ × ٢ = ٤

ملاحظة: سنقتصر إيجاد المشتقة بإستخدام التعريف على الإقترانات كثيرة الحدود التي درجتها أقل من ٣.

تمارين ومسائل

س١: باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة، أجد ق$^/$ (س) عند النقطة المعطاة في كل حالة:

أ) ق(س) = ٢س ـ ٧ ، س = -٣

ب) ق(س) = ٣ ـ س ، س = ٢

جـ) ق(س) = س^٢ + س ، س = - $\frac{١}{٢}$

س٢: إذا كان ق$^/$ (٣) = ٨ ، أجد:

أ) $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{ق(٣ + هـ) ـ ق(٣)}{هـ}$

ب) $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{ق(٣ + هـ) ـ ق(٣)}{٢هـ}$

جـ) $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{ق(٣) ـ ق(٣ + هـ)}{هـ}$

س٣: إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من س$_١$ = ٣ إلى س$_٢$= ٣ + هـ

يساوي $\frac{٢}{(-١ + هـ)}$ ، أجد قيمة ق$^/$ (٣).

س٤: إذا كانت $\triangle$ص = $\frac{٧هـ ـ هـ^٢}{٤}$ هي التغير في الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من س$_١$ = ٥ إلى س$_٢$ = ٥ + هـ، أجد ق$^/$ (٥).

س٥: إذا كان ص = ق(س) = س^٢ + ١ ، أجد ق$^/$ (س) باستخدام تعريف المشتقة.

قواعد الاشتقاق
(Differentiation Rules)

قاعدة (١): إذا كان ق(س) = جـ حيث جـ عدد حقيقي، فإن ق$^{/}$(س) = صفر. $\forall$ س $\in$ ح.

مثال (١): إذا كان ق(س) = ٣ ، أجد ق$^{/}$(س) ، ق$^{/}$(٥)

الحل: ق$^{/}$(س) = صفر لجميع قيم س $\in$ ح

ق$^{/}$(٥) = صفر

قاعدة (٢): إذا كان ق(س) = س^{ن} ، فإن ق$^{/}$(س) = ن س$^{ن-١}$ ، ن عدد حقيقي، س $\neq$ ٠

مثال (٢): أجد المشتقة الأولى $\frac{ءص}{ءس}$ في كل من الحالات الآتية:

أ) ص = س٤

ب) ص = س$^{-٥}$ ، س $\neq$ ٠

جـ) ص = $\frac{١}{س^{٣}}$ ، س $\neq$ ٠

د) ص= $\sqrt{س}$ ، س $\geq$ ٠

الحل: أ) ص = س^{٤}

$$\frac{ءص}{ءس} = ٤ \text{ س}^{٤-١} = ٤\text{س}^{٣} ،\ \forall \text{ س} \in \text{ح}$$

ب) ص = س$^{-٥}$ ، س $\neq$ ٠

$$\frac{ءص}{ءس} = -٥ \text{ س}^{-٥-١}$$

$$= -٥\text{س}^{-٦}$$

جـ) ص = $\frac{١}{س^{٣}}$ = س$^{-٣}$

$$\frac{ءص}{ءس} = -٣ \times \text{س}^{-٣-١} = -٣ \text{ س}^{-٤} = \frac{-٣}{\text{س}^{٤}}$$

د) ص = $\sqrt{س}$ = س$^{\frac{١}{٢}}$ ، س $\geq$ ٠

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢} \text{ س}^{\frac{١}{٢}-١} = \frac{١}{٢} \text{ س}^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢\text{س}^{\frac{١}{٢}}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} ،\ \text{س} > ٠$$

قاعدة (٣): إذا كان الاقترانان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س، وكانت $أ \in$ ح، وكان هـ(س)= أ ق(س)، فإن هـ/ (س) = أ ق/ (س).

قاعدة (٤): إذا كان الاقترانان ك(س) ، ع(س) قابلين للاشتقاق عند س، وكان ق(س) = ك(س) + ع(س) ، فإن ق/ (س) = ك/ (س) + ع/ (س).

مثال (٣): إذا كان ك(س) = س^{٢} ، ع(س) = ٢س، ق(س) = ك(س) + ع(س)، أجد ق/ (س) ، ق/ (٠)؟

الحل: ق/ (س) = ك/ (س) + ع/ (س)

= (٢ س) + (٢)

= ٢س + ٢

ق/ (٠) = ٢×٠ + ٢ = ٢

قاعدة (٥): إذا كان الاقترانان ك(س) ، ع(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س ، وكان ق(س) = ك(س) – ع(س) ، فإن ق/ (س) = ك/ (س) – ع/ (س).

مثال (٤): إذا كان ك(س) = ٥س ، ع(س) = ٢س^{٣} ، ق(س) = ك(س) – ع(س)، أجدق/ (س)، ق/ (-٢) ؟

الحل: ق/ (س) = ك/ (س) – ع/ (س)

ق/ (س) = ٥ – ٦س^{٢}

ق/ (-٢) = ٥ – ٦ (-٢)^{٢}

= ٥ – ٢٤

= - ١٩

ويمكن تعميم القاعدتين السابقتين لتشمل أكثر من اقترانين.

مثال (٥): إذا كان ك/ (١) = ٣ ، ع/ (١) = ٢ وكان ق(س) = ك(س) – ٢ع(س) ، أجد ق/ (١) ؟

الحل: ق/ (س) = ك/ (س) – ٢ع/ (س)

ق/ (١) = ك/ (١) – ٢ع/ (١)

= ٣ – ٢ × ٢ = -١

قاعدة (٦): إذا كان الاقترانان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان ل(س) = ق(س) × هـ(س) فإن

ل/(س) = ق(س) × هـ/(س) + هـ(س) × ق/(س)

وبالكلمات ل/(س) = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول.

مثال (٦): إذا كان ص = (س^٢+٣س+٢) (٥س+١) أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\Big|_{\text{س}=٢}$

الحل: ص = (س^٢+٣س+٢) (٥س+١)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (س^٢+٣س+٢)×٥ + (٥س+١)×(٢س + ٣)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\Big|_{\text{س}=٢}$ = (٤ + ٦ + ٢)×٥ + (١٠ + ١) × (٤ + ٣)

= ٦٠ + ٧٧ = ١٣٧

مثال (٧): إذا كان ك(٢) = ٥ ، ك/(٢) = ٣ ، ع(٢) = ٤ ، ع/(٢) = ٦ وكان

ق(س) = ك(س) × ع(س) ، أجد ق/(٢).

الحل: ق/(س) = ك (س) × ع/(س) + ع(س) × ك/(س)

ق/(٢) = ك (٢) × ع/(٢) + ع(٢) × ك/(٢)

= ٥ × ٦ + ٤ × ٣

= ٣٠ + ١٢ = ٤٢

قاعدة (٧): إذا كان الاقتران ل(س) = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ ، ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، هـ(س) ≠ ٠ فإن:

ل/(س) = $\frac{\text{هـ(س) × ق/(س) – ق(س) × هـ/(س)}}{(\text{هـ(س)})^{٢}}$

وبالكلمات ل/(س) = $\frac{\text{المقام × مشتقة البسط – البسط × مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

مثال (٨): إذا كان ق(س) = $\frac{٣س + ١}{٢س - ٥}$ ، س ≠ $\frac{٥}{٢}$ ، أجد ق/(س).

الحل: ق/(س) = $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

$$= \frac{(٢س - ٥)\times٣ - (٣س + ١)\times٢}{(٢س - ٥)^{٢}}$$

$$= \frac{٦س - ١٥ - ٦س - ٢}{(٢س - ٥)^{٢}} = \frac{-١٧}{(٢س - ٥)^{٢}}$$

مثال (٩): إذا كان ل(س) = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ ، هـ(س) ≠ صفر، وكان ق/(٢) = -١ ، ق(٢) = ١ ، هـ(٢) = ٢،

ل/(٢) = -٢ أجد هـ/(٢).

الحل: ل/(س) = $\frac{\text{هـ(س)} \times \text{ق/(س)} - \text{ق(س)} \times \text{هـ/(س)}}{(\text{هـ(س)})^{٢}}$

$$\text{ل/(٢)} = \frac{\text{هـ(٢)} \times \text{ق/(٢)} - \text{ق(٢)} \times \text{هـ/(٢)}}{(\text{هـ(٢)})^{٢}}$$

$$-٢ = \frac{٢ \times -١ - ١ \times \text{هـ/(٢)}}{(٢)^{٢}}$$

-٨ = -٢ - هـ/(٢)

ومنها هـ/(٢) = ٦ لماذا ؟

مثال (١٠): إذا كان ق(س) = $\frac{\text{هـ(س)}}{\text{س+١}}$ ، س ≠ -١ أجد ق/(١)، علماً بأن هـ(١) = ٢ ، هـ/(١) = ٣

الحل: ق/(س) = $\frac{(\text{س+١}) \times \text{هـ/(س)} - \text{هـ(س)} \times ١}{(\text{س+١})^{٢}}$

$$\text{ق/(١)} = \frac{(١+١) \times \text{هـ/(١)} - \text{هـ(١)}}{(٢)^{٢}}$$

$$= \frac{٢\text{هـ/(١)} - \text{هـ(١)}}{٤}$$

$$= \frac{٢ \times ٣ - ٢}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١$$

قاعدة (٨): إذا كان ص = ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكانت $\text{ق}^{/}$(س) هي المشتقة الأولى للاقتران ق(س)، فإن المشتقة الأولى للاقتران $\text{ق}^{/}$(س) تسمى المشتقة الثانية للاقتران ق(س) ويرمز لها بالرمز $\text{ق}^{//}$(س) أو $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ أو $\text{ص}^{//}$.

وكذلك يرمز للمشتقة الثالثة للاقتران ق(س) بالرمز $\text{ق}^{///}$(س) أو $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}$ أو $\text{ق}^{(٣)}$(س) أو $\text{ص}^{///}$، وهكذا.*

مثال (١١): إذا كان ق(س)= $\text{س}^{٣}$ − ٤$\text{س}^{٢}$ + ٣س + ٢ أجد $\text{ق}^{/}$(س)، $\text{ق}^{//}$(س)، $\text{ق}^{(٣)}$(س).

الحل: $\text{ق}^{/}$(س) = ٣$\text{س}^{٢}$ - ٨ س + ٣

$\text{ق}^{//}$(س) = ٦س - ٨

$\text{ق}^{(٣)}$(س) = ٦

مثال (١٢): إذا كان ص = ٣$\text{س}^{٢}$ − ٥س + ٧ ، أجد $\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{\text{س}=٢}$. $\left.\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}\right|_{\text{س}=٢}$ ، $\left.\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}\right|_{\text{س}=٢}$

الحل: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦س − ٥ ومنها $\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{\text{س}=٢}$ = ٧

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٦ ومنها $\left.\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}\right|_{\text{س}=٢}$ = ٦

$\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}$ = صفر ومنها $\left.\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}\right|_{\text{س}=٢}$ = صفر.

مثال (١٣): إذا كان ع(س) = ٣$\text{س}^{٤}$ + ب $\text{س}^{٢}$، وكانت $\text{ع}^{/}$(١) = ٢٢، أجد قيمة الثابت ب، ثم أجد $\text{ع}^{//}$(٠).

الحل: $\text{ع}^{/}$(س) = ١٢$\text{س}^{٣}$ + ٢ب س

$\text{ع}^{/}$(١) = ١٢$(١)^{٣}$ + ٢ب (١)

٢٢ = ١٢ + ٢ب

١٠ = ٢ب ومنها ب = ٥

$\text{ع}^{/}$(س) = ١٢$\text{س}^{٣}$ + ١٠س

$\text{ع}^{//}$(س) = ٣٦$\text{س}^{٢}$ + ١٠

$\text{ع}^{//}$(٠) = ١٠

---

* المشتقة النونية يرمز لها بالرمز $\text{ق}^{(\text{ن})}$ ، ن ≥ ٣

تمارين ومسائل

س١: أجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل من الاقترانات الآتية:

أ) ص = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ب) ص = ٥س + ٣

ج) ص = $\frac{٣}{\text{س}^{٢}}$ + ٥س ، س ≠ ٠

د) ص = ٧س^{٢} + $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$

هـ) ص = (٢س + ٥) (٣ – س^{٣})

و) ص = $\frac{\text{س}}{\text{س} + ٣}$، س ≠ -٣ ، عندما س = ١

س٢: أجد ق$^{/}$(٣)، علماً بأن ق(س) = س^{٢} ـ س + ٥

س٣: إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٣س، وكان ل(س) = ق(س) + ٣هـ(س)، هـ(٢) = ٥، هـ$^{/}$(٢) = ١ أجد ل$^{/}$(٢).

س٤: إذا كان ق(س) = $\frac{٣\text{س}+٢}{٤\text{س}+١}$ ، س ≠ $\frac{-١}{٤}$ ، أحسب ق$^{/}$(٢)؟

س٥: إذا كانت ق(س) = س^{٣} ل(س) + هـ(س)، وكان ل(٢) = ٥، هـ$^{/}$(٢) = ٧ ، ل$^{/}$(٢) = –٣ فما قيمة ق$^{/}$(٢) ؟

س٦: أجد المشتقة الثانية لكل من الاقترانات إزاء النقط المبينة بجانبها:

أ) ق(س) = س^{٤} – ٢س^{٣} + س + ١ ، س = ٢

ب) هـ(س) = $\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$ ، س > ٠ ، س = ١

س٧: أجد المشتقة الأولى والثانية والثالثة للاقتران ق(س) = ٢س^{٤} + س^{٣} ـ ٤س + ١، ثم أبين أن ق$^{(٥)}$(١) = صفر.

ورقة عمل

س(١): إذا كان $\begin{bmatrix} \text{٢} & \text{س} \\ \text{س} & \text{ص} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{١} & \text{٠} \\ \text{٢} & \text{١-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٣} & \text{٧} \\ \text{ص} & \text{ع} \end{bmatrix}$ أجد قيم كل من س، ص، ع ؟

س(٢): إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} \text{١} & \text{٢} \\ \text{٢} & \text{٣-} \\ \text{١} & \text{٥} \end{bmatrix}$، أجد المصفوفة $\text{ب}_{\text{٣×٢}}$ بحيث أ + ب = و

س(٣): إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{١} & \text{٣} \\ \text{٢-} & \text{٢} \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} \text{١-} & \text{٢} \\ \text{٢} & \text{٣-} \end{bmatrix}$ وكانت جـ = أ . ب، أجد قيمة $\text{جـ}_{\text{٢١}}$.

س(٤): إذا كان $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{٢-} & \text{٣-} \\ \text{١-} & \text{٢} & \text{س} \\ \text{٢-} & \text{٣} & \text{٤} \end{vmatrix}$ = -٢، أجد قيمة س.

س(٥): إذا كان ق(س) = ٥ − ٢س، أجد ق/(٤) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة؟

س(٦): إذا كان ق(س) = ٢$\text{س}^{\text{٥}}$ ، أجد ق/(س) ، ق/(-١).

نموذج إختبار

س١: أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

١. إذا كان $\begin{bmatrix} \text{٥} & \text{٢س+٣} \\ \text{ص−٢} & \text{٤} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٥} & \text{٧} \\ \text{-١} & \text{٤} \end{bmatrix}$ ، ما قيمة س ، ص على الترتيب ؟

أ) ٧،-١ ب) ٥،-٣ جـ) ٢،١ د) ١،٢

٢. إذا كانت سـ = $\begin{bmatrix} \text{-٥} & \text{٢} \\ \text{-١} & \text{١} \end{bmatrix}$ فما قيمة | ٢سـ | ؟

أ) ٣ ب) ٦ جـ) ١٢ د) -٢٨

٣. ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} \text{-٤} & \text{٢} \\ \text{٣س} & \text{٣} \end{bmatrix}$ مصفوفة منفردة؟

أ) ١٢ ب) -٢ جـ) ٢ د) صفر

٤. إذا كان أ$_{\text{س}}$ = $\begin{bmatrix} \text{٥} & \text{١} \\ \text{٧} & \text{٢} \end{bmatrix}$ ، أ$_{\text{ص}}$ = $\begin{bmatrix} \text{١} & \text{٢} \\ \text{٢} & \text{٣} \end{bmatrix}$ أجد المصفوفة أ ؟

أ) $\begin{bmatrix} \text{٥} & \text{٢} \\ \text{٧} & \text{٣} \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} \text{٢} & \text{٥} \\ \text{٣} & \text{٧} \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} \text{١} & \text{١} \\ \text{٢} & \text{٢} \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} \text{٢} & \text{١} \\ \text{٣} & \text{٢} \end{bmatrix}$

٥. ما ميل المستقيم القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) المارّ في النقطتين أ (١، ٣) ، ب (٣، ٩)؟

أ) -٣ ب) ٣ جـ) ٢ د) ٦

٦. إذا كان ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$، ما قيمة ق$'$(٤)؟

أ) $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ب) - $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ جـ) $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ د) ٢

٧. ما ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{\text{٥}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}}$ عند س = ٢ ؟

أ) $\frac{\text{٤}}{\text{٩}}$ ب) - $\frac{\text{٢٠}}{\text{٩}}$ جـ) ١٥ د) $\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$

س٢: إذا كانت ٲ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣- & ٢ \\ ٤ & ٥- & ٦ \end{bmatrix}$ جـ = $\begin{bmatrix} ٢- & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ،

د= $\begin{bmatrix} ٢- & ٦ & ٢ \\ ٥ & ١ & ٤- \\ ٣ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ل= $\begin{bmatrix} ٤- & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ أجد الآتي (إن أمكن):

أ) جـ + ل   ب) ٣جـ − ٢ل   جـ) (ٲ.ب) . د   د) ل $^{-١}$ هـ) | جـ |

س٣: أستخدم طريقة كريمر لحل النظام الآتي:

٢ ص − ٤ س = ٢ ، ٥س + ص = ٨

س٤: إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ = ٢ إلى س$_{٢}$ = ٥ هو ١٠، أجد ق(٥) علماً بأن ق(٢) = ٦ ؟

س٥: إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) = س^{٢} + ٣ عندما تتغير س من ٢ إلى ٲ يساوي ٦ فما قيمة الثابت ٲ ؟

س٦: إذا كان ق(س) = س^{٢} + ١، أجد ق$^{/}$(٣) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

قاعدة السلسلة (مشتقة الاقتران المركب)

Chain Rule

نشاط ١

إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين بحيث مدى هـ(س) $\subseteq$ مجال ق(س) فإننا نعرف الاقتران المركب (ق∘هـ)(س) = ق(هـ(س)).

أكمل ما يلي: إذا كان ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = ٢س ـ ١ فإن:

(ق∘هـ)(س) = ق(هـ(س))

= (.............)^{٢}

= ٤س^{٢} ـ ٤س + ١ لماذا؟

(ق∘هـ)$'$(س) = ٨س ـ ٤ ،

هل يمكن إيجاد (ق∘هـ)$'$(س) بطريقة أخرى ؟

قاعدة السلسلة:

إذا كان هـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س، وكان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند هـ(س) فإن الاقتران المركب (ق∘هـ)(س) يكون قابلاً للاشتقاق عند س، ويكون (ق∘هـ)$'$(س) = ق$'$(هـ(س))هـ$'$(س).

مثال (١): إذا كان ق(س) = س^{٣} + ٢س + ٥ ، هـ(س) = س^{٢} + ١ ، أجد (ق∘هـ)$'$(س)، ثم أجد (ق∘هـ)$'$(١).

الحل: (ق∘هـ)$'$(س) = ق$'$(هـ(س))هـ$'$(س)

لكن ق$'$(س) = ٣س^{٢} + ٢ ، هـ$'$(س) = ٢س

ومن ذلك (ق∘هـ)$'$(س) = ق$'$(س^{٢} + ١) × ٢س

= (٣(س^{٢} + ١)^{٢} + ٢)×٢س ، لماذا؟

= ٦س^{٥} + ١٢س^{٣} + ١٠س ، لماذا؟

(ق∘هـ)$'$(١) = ٦ × ١ + ١٢ × ١ + ١٠ × ١ = ٢٨

مثال (٢): إذا كان ق(س) = س^{٢} − ١ ، هـ(س) = ٢س + ١ أجد (ق∘هـ)$^{/}$(٤)، (هـ∘ق)$^{/}$(٤)

الحل: (ق∘هـ)$^{/}$(٤) = ق$^{/}$(هـ(٤))هـ$^{/}$(٤)

ق$^{/}$(س) = ٢س ، هـ$^{/}$(س) = ٢

هـ(٤) = ٩ ، هـ$^{/}$(٤) = ٢ ،

(ق∘هـ)$^{/}$(٤) = ق$^{/}$(٩) × ٢

= ١٨ × ٢

= ٣٦

(هـ∘ق)$^{/}$(٤) = هـ$^{/}$(ق(٤))ق$^{/}$(٤)

= هـ$^{/}$(١٥) × ٨

= ٢ × ٨ = ١٦

نتيجة (١):

إذا كان ص = ق(ع)، ع = هـ(س)، اقترانين قابلين للاشتقاق، فإن ص = ق(هـ(س)) وبالتالي:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ق}^{/}(\text{ع}) \times \text{هـ}^{/}(\text{س})$$

$$= \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$$

أي أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

مثال (٣): إذا كانت ص = ع^{٢} + ع ، ع = ٢س + ١ ، أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

الحل: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

= (٢ع +١) × ٢

= (٢(٢س+١) + ١) × ٢

= (٤س + ٣) × ٢

= ٨س + ٦

مثال (٤): إذا كانت ص = م^{٢} + ٢م ، م = س^{٢} + س + ١ ، أجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = ٠

الحل: $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءم} \times \frac{ءم}{ءس}$

= (٢م + ٢) (٢س + ١)

عندما س = ٠ تكون م = ١

$\frac{ءص}{ءس}$ = (٢×١ + ٢) (٢×٠+١) = ٤

نتيجة (٢):

إذا كانت ص = (ق(س))^{ن} ، ن عدد نسبي وكان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن:

$\frac{ءص}{ءس}$ = ن(ق(س))$^{ن-١}$. ق$^{/}$(س)

مثال (٥): إذا كانت ص = (٤س + ٢)^{٣} أجد $\frac{ءص}{ءس}$.

الحل: $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣(٤س + ٢)^{٢} × ٤

= ١٢ (٤س + ٢)^{٢}

تمارين ومسائل

س١. إذا كان ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = س + ١ أجد (ق∘هـ)$^{/}$(س).

س٢. إذا كانت ص = (٢س – ١)^{٢} ، أجد $\frac{ءص}{ءس}$.

س٣. إذا كان ص = ع^{٢} – ٥ع + ١ ، ع = ٢س + ٣ ، أجد $\frac{ءص}{ءس}$.

س٤. إذا كان م(س) = (س^{٢} – س)^{٤} ، أجد م$^{/}$(٢).

س٥. إذا كان ق(س) = هـ(٣س^{٢} + ١) ، أجد ق$^{/}$(١)، علماً بأن هـ$^{/}$(١) = ٥ ، هـ$^{/}$(٤) = ٢ .

س٦. إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق على ح بحيث أن: هـ$^{/}$(٢) = ٣، ق$^{/}$(٢) = ٥، ق$^{/}$(٤) = -٢،
هـ(٢) = ٤، ق(٢) = ٣، هـ$^{/}$(٣) = ١، أجد (ق∘هـ)$^{/}$(٢)، (هـ∘ق)$^{/}$(٢)

القيم القصوى
(Extreme Values)

تعريف:

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً وكانت س = جـ في مجال الاقتران، فإنه يقال أن ق(جـ):

أ. قيمة عظمى محلية للاقتران، إذا كانت ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع قيم س المجاورة لِـ جـ.

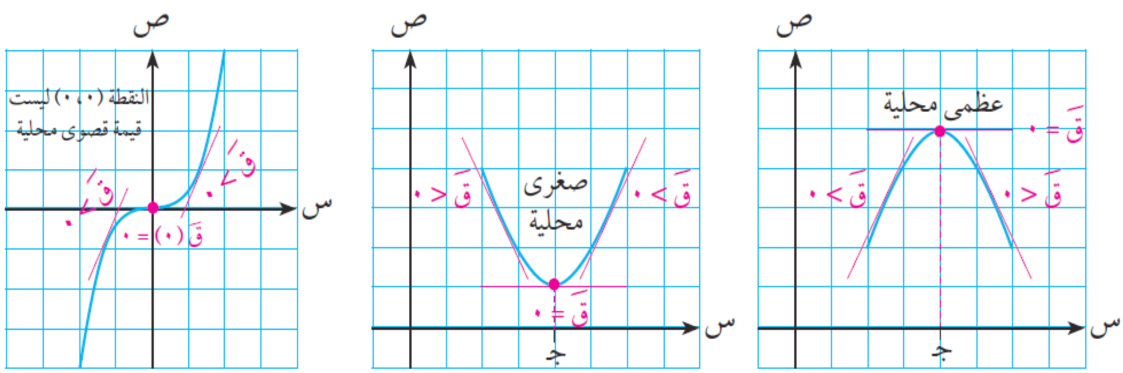
ب. قيمة صغرى محلية للاقتران، إذا كانت ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع قيم س المجاورة لِـ جـ.

ملاحظة: سنقتصر في دراستنا للقيم القصوى على الاقترانات كثيرة الحدود المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية ح فقط.

استخدام المشتقة الأولى لإيجاد القيم القصوى المحلية:

إن التمثيل البياني لأي اقتران على مجاله يساعد في تحديد نقط القيم القصوى المحلية للاقتران، ولكن: كيف تساعدنا المشتقة الأولى لهذا الاقتران في تعيين القيم القصوى المحلية له؟

أتأمل الأشكال الآتية، وألاحظ العلاقة بين إشارة ق/(س) والقيم القصوى للاقتران.



(أ) (ب) (جـ)

في الشكل (أ): ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)، ق/(جـ) = صفر، إشارة ق/(س) تغيرت من موجبة لقيم س < جـ إلى سالبة لقيم س > جـ .

في الشكل (ب): ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)، ق/(جـ) = صفر، إشارة ق/(س) تغيرت من سالبة لقيم س < جـ إلى موجبة لقيم س > جـ .

في الشكل(ج): ق/(جـ) = صفر، إشارة ق/(س) موجبة لقيم س < جـ وموجبة لقيم س > جـ .

ق(جـ) ليست قيمة قصوى محلية للاقتران.

ماذا تستنتج؟

نتيجة (١):

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكانت ق/(جـ) = صفراً، حيث جـ ∋ مجال ق(س)، فإن:

أ. إذا تغيرت إشارة ق/(س) من موجبة لقيم س < جـ إلى سالبة لقيم س > جـ فإن ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س).

ب. إذا تغيرت إشارة ق/(س) من سالبة لقيم س < جـ إلى موجبة لقيم س > جـ فإن ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س).

يسمى هذا باختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى.

مثال (١): أعيّن جميع القيم القصوى للاقتران ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} ـ ٣س^{٢} + ٨ س + ٢.

الحل: ق/(س) = س^{٢} ـ ٦س + ٨

ق/(س) = ٠

س^{٢} ـ ٦س + ٨ = ٠

(س ـ ٢) (س ـ ٤) = ٠

س = ٢ ، ٤

إشارة ق/(س)	++++++++	صفر	---- ---	صفر	++++++
س		٢		٤	

إشارة ق/(س) تغيرت من موجبة حيث س < ٢ إلى سالبة حيث س > ٢ ⟸ ق(٢) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س).

إشارة ق/(س) تغيرت من سالبة حيث س < ٤ إلى موجبة حيث س > ٤ ⟸ ق(٤) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س).

القيمة العظمى المحلية = ق(٢) = $\frac{٢٦}{٣}$

القيمة الصغرى المحلية = ق(٤) = $\frac{٢٢}{٣}$

مثال (٢): أعيّن القيم القصوى للاقتران = س^{٢} − ٦س + ٩ .

الحل: ق$'$(س) = ٢س − ٦

ق$'$(س) = ٠

٢س − ٦ = ٠

س = ٣

إشارة ق$'$(س)	- - - - - - -	صفر	+ + + + + + + +
س		٣	

إشارة ق$'$(س) تغيرت من سالبة حيث س < **٣** إلى موجبة حيث س > **٣** ⟸ ق(٣) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س).

القيمة الصغرى المحلية = ق(٣) = ٩ − ١٨ + ٩ = ٠ .

مثال (٣): إذا كان ق(س) = س^{٣} − ١٢س − ٥ ، س ∈ ح ، أجد قيم س التي عندها قيم قصوى للاقتران ق(س).

الحل: ق$'$(س) = ٣س^{٢} − ١٢

ق$'$(س) = صفر

٣س^{٢} − ١٢ = ٠

س^{٢} − ٤ = ٠

س = ٢ أو -٢

إشارة ق$'$(س)	+ + + + + + + +	صفر	- - - - - - -	صفر	+ + + + + +
س		-٢		٢	

ألاحظ أن إشارة ق$'$(س) تغيرت من موجبة حيث س < -٢ إلى موجبة حيث س > -٢ ⟸ عند (س= -٢) يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س).

إشارة ق$'$(س) تغيرت من سالبة حيث س < ٢ إلى موجبة حيث س > ٢ ⟸ عند (س= ٢) يوجد قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س).

مثال (٤): أعيّن القيمة/ القيم القصوى المحلية إن وجدت للاقتران ق(س)= س^{٣} ، س ∈ ح .

الحل: ق$'$(س) = ٣س^{٢}

ق$'$(س) = ٠

٣س^{٢} = ٠

س = ٠

إشارة ق$'$(س)	+ + + + + + + +	صفر	+ + + + + + + +
س		صفر	

لم تتغير إشارة ق$'$(س) حول (س = ٠)، ومنها لا توجد للاقتران ق(س) قيمة قصوى محلية.

تمارين ومسائل

س١. أعيّن القيمة/ القيم القصوى إن وجدت لكل من الاقترانات الآتية:

أ . ق(س) = ٤س – ٢س^{٢} ، س ∈ ح

ب. ق(س) = س(س^{٢} – ١٢) ، س ∈ ح

جـ. ق(س) = س^{٣} – ٣س + ٢ ، س ∈ ح

د. ق(س) = -س^{٢} +١٠س + ٥ ، س ∈ ح

س٢. أعيّن القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = س^{٢} – ٢س + ١ ، س ∈ ح

س٣. إذا كان للاقتران ق(س) = -س^{٢} + ب س -٣ ، س ∈ ح قيمة عظمى محلية عند س = -٢ فما قيمة ب؟

س٤. إذا كان ق(س) = س^{٣}– ٥ ، س ∈ ح، أبيّن أنه لا توجد للاقتران ق(س) أي قيم قصوى.

س٥. الشكل الآتي يبين إشارة ق/(س)، أجد قيم س التي عندها قيم قصوى للاقتران ق(س) وأبيّن نوعها، علماً بأن ق(س) كثير حدود معرّف على ح.

إشارة ق/(س)	+ + + + + + + +	صفر	- - - - - -	صفر	+ + + + + +
س		-٢		٢	

العلامة المعيارية (Standard Score)

نشاط ١

إذا كانت علامتا الطالبة رنيم في مبحثي الرياضيات والفيزياء هي ٩٣ ، ٨٨ على الترتيب، فهل يعني ذلك أن تحصيل الطالبة رنيم أفضل في الرياضيات ؟ .... لماذا ؟ ....

للحكم على أفضلية التحصيل، لا يكفي أن نعتمد على العلامة فقط، وإنما نحتاج إلى معرفة الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعلامات جميع طلبة الصف.

أتذكر

الوسط الحسابي (μ): هو مجموع القيم (المشاهدات) مقسوماً على عددها.

$$\mu = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}}{\text{ن}}$$

الانحراف المعياري (σ): هو الجذر التربيعي لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ر}} - \mu)^{٢}}{\text{ن}}}$$

العلامة المعيارية (ع) :Standard Score

القيمة الخام: هي القيمة الأصلية التي نحصل عليها في اختبار أو مقياس ما، ويرمز لها بالرمز "س".

العلامة المعيارية: هي عدد الانحرافات المعيارية التي تبعدها القيمة (العلامة) الخام عن الوسط الحسابي، وبالرموز فإن: $\text{ع} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$

مثال (١): مزارع فلسطيني يزرع البندورة في سهل مرج ابن عامر، كان الوسط الحسابي لكتلة (٣٠٠) صندوق بندورة ١٧ كغم، وانحرافها المعياري (٢) كغم، اختيرت ٣ صناديق، وكانت كتلها ١٣ كغم، ١٩ كغم، ١٧ كغم على الترتيب. أجد العلامة المعيارية لكتل كل من الصناديق الثلاثة.

الحل: $\text{ع} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$، حيث ع هي العلامة المعيارية، س الكتلة الخام، μ الوسط الحسابي للكتل، σ الانحراف المعياري لها.

- العلامة المعيارية للصندوق الأول $\text{ع}_{١} = \frac{١٣ - ١٧}{٢} = -٢$
- العلامة المعيارية للصندوق الثاني $\text{ع}_{٢} = \frac{١٩ - ١٧}{٢} = ١$
- العلامة المعيارية للصندوق الثالث $\text{ع}_{٣} = \frac{١٧ - ١٧}{٢} = \text{صفر}$

مثال (٢): حصلت عهد على علامة ما في الرياضيات، وكانت العلامة المعيارية المقابلة لها (١,٥) علماً بأن الوسط الحسابي لعلامة طالبات صفها كان (٨٥) والانحراف المعياري (٦)، أجد علامة عهد في اختبار الرياضيات.

الحل: $ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$

$١,٥ = \frac{س - ٨٥}{٦}$ ، $٩ = س - ٨٥$ ومنها $س = ٩٤$

نتيجة: إذا كانت $س_١$، $س_٢$، ....، $س_ن$ مجموعة من القيم الأصلية، وكانت العلامات المعيارية المقابلة لها هي $ع_١$ ، $ع_٢$ ، ....، $ع_ن$ فإن الوسط الحسابي $\bar{ع}$ لمجموعة هذه العلامات يساوي صفراً، والانحراف المعياري لها $\sigma_ع = ١$.

مثال (٣): إذا كانت العلامات المعيارية المناظرة لأطوال ٥ أشجار صنوبر كالآتي:

ل ، ٠,٥ ، صفر، -٠,٥، -١,٥ فما قيمة ل

الحل: ل + ٠,٥ + ٠ + -٠,٥ + -١,٥ = صفر

ل + $^-$١,٥ = صفر

ل = ١,٥

مثال (٤): إذا كانت علامتا طالبين في امتحان المحاسبة ٧٠ ، ٨٨ وكانت علاماتاهما المعياريتان المناظرتان -٠,٨ ، ١ على الترتيب، ما الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعلامات طلبة الصف في الامتحان؟

$ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$

$-٠,٨ = \frac{٧٠ - \mu}{\sigma}$

وبالضرب التبادلي: $-٠,٨\sigma = ٧٠ - \mu$ .... (١)

$١ = \frac{٨٨ - \mu}{\sigma}$

وبالضرب التبادلي: $\sigma = ٨٨ - \mu$ .... (٢)

أحل المعادلتين (١) ، (٢) بالحذف

$$\sigma = ٨٨ - \mu$$

$$-٠,٨\sigma = ٧٠ - \mu$$

بالطرح $١,٨\sigma = ١٨$ ومنها $\sigma = ١٠$

وبالتعويض في إحدى المعادلتين ينتج أن $١٠ = ٨٨ - \mu$ ومنها $\mu = ٧٨$

أي أن الوسط الحسابي = ٧٨ والانحراف المعياري = ١٠

تمارين ومسائل

س١: في مزرعة خراف، إذا كانت كتل (٥) خراف كالآتي ٤٠ كغم، ٥٠ كغم، ٦٠ كغم، ٧٠ كغم، ٥٥ كغم. أجد العلامات المعيارية للكتل؟

س٢: إذا علمت أن علامة علي في امتحان اللغة العربية ٧٢، وفي المحاسبة ٦٩، وفي الرياضيات ٧٥، والوسط الحسابي لعلامات طلبة الصف في المواد الثلاث بالترتيب هو ٦٩، ٦٨، ٧٩، والانحراف المعياري ١، ٤، ٢، في أي المواد كان تحصيل علي أفضل؟

س٣: إذا كان الوسط الحسابي لأطوال أشجار الصنوبر في محيط برك سليمان في بيت لحم ١٧متراً والانحراف المعياري لمجموعة الأطوال يساوي ٣م، أجد الأطوال الحقيقية للأشجار التي العلامات المعيارية لأطوالها هي: ٢ ، -١,٨.

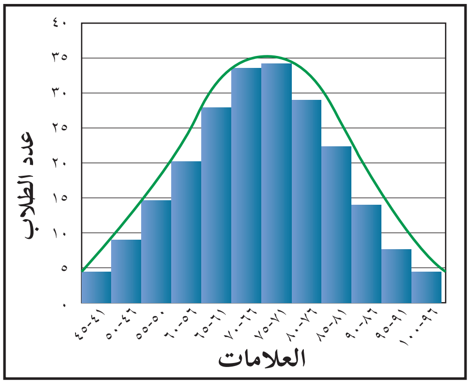
س٤: إذا حولت القيم الخام لمجتمع إحصائي إلى علامات معيارية وكانت كالآتي ٠,٥ ، ٠,٥ك ، -١,٥ ، ٠ ، -٠,٥، أجد قيمة ك ؟ أتحقق أن الانحراف المعياري للعلامات المعيارية يساوي ١.

س٥: إذا كانت العلامتان ٤٤ ، ٨٤ تقابلهما العلامتان المعياريتان -٢ ، ٣ على الترتيب. أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع العلامات الأصلية؟

س٦: إذا كانت العلامات المعيارية المقابلة للعلامتين ٨٥ ، ٧٠ هي ١ ، -٢ على الترتيب. أحسب العلامة المعيارية للعلامة الخام ٧٥.

التوزيع الطبيعي المعياري (Standard Normal Distribution)

نشاط ١



مثّل المعلم حمدان علامات طلاب مدرسته في مادة الرياضيات بيانياً، كما هو في الشكل المجاور. ألاحظ أن هناك تجمعاً لعلامات الطلاب في المنتصف، كما أن شكل التمثيل البياني لتوزيع العلامات يشبه الجرس تقريباً. إن مثل هذا التوزيع يسمى توزيعاً طبيعياً.

الوسط الحسابي للعلامات يقع في الفئة (٧١-٧٥)

الوسيط للعلامات يقع في الفئة ....

المنوال للعلامات هو مركز الفئة ....

أتعلم

إذا كان الوسط = الوسيط = المنوال يكون التوزيع طبيعياً.

التوزيع الطبيعي:

يوجد العديد من التوزيعات الاحتمالية، ومنها التوزيع الطبيعي، ويعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية في علم الإحصاء، لأنه يمثل كثيراً من الظواهر التي تقابلنا في الحياة العملية، مثل: الأطوال، والكتل، والأعمار، ودرجات الحرارة، والدخول الشهرية، وغيرها من الظواهر المتصلة.

خصائص التوزيع الطبيعي:

١) التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس، ومتماثل حول المستقيم الرأسي المار بالوسط.

٢) يتساوى فيه الوسط والوسيط والمنوال.

٣) المنحنى متصل.

٤) يقترب المنحنى من المحور س، ولكنه لا يمسه.

التوزيع الطبيعي المعياري: هو التوزيع للعلامات المعيارية، وسطه الحسابي يساوي صفراً، وانحرافه المعياري يساوي (١).

وسنركز في دراستنا هذه على التوزيع الطبيعي المعياري.

جدول المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري:

المساحة الكلية تحت المنحنى الطبيعي المعياري تساوي وحدة مساحة واحدة، وقد وضع العلماء جداول خاصة تبين نسبة المساحة تحت المنحنى والمحدودة بقيمة معينة من العلامات المعيارية.
سنعتمد الجداول الملحقة في نهاية الكتاب والتي تعطي المساحة المحصورة تحت ع حيث ع عدد حقيقي.

مثال (١): باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد كلاً من:

أ) المساحة تحت (ع = ١,١٧)

ب) المساحة فوق (ع = ١,٢)

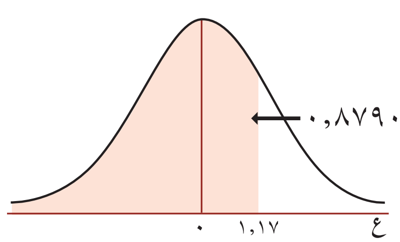
جـ) المساحة تحت (ع = -١)

د) المساحة فوق (ع = -٠,٥)

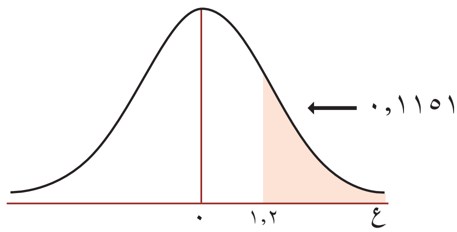
هـ) المساحة المحصورة بين ($ع_١$ = -٠,٨) و ($ع_٢$ = ٠,١٥)

ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥

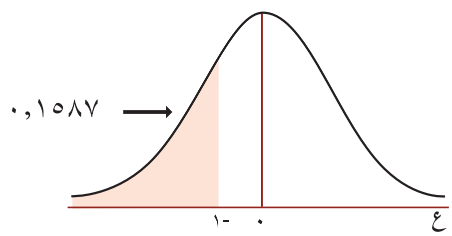
الحل: أ) المساحة تحت (ع = ١,١٧) = ٠,٨٧٩٠ ويتم إيجادها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري وتحدد من تقاطع الصف ١,١ ومن العمود ٠,٠٧، حيث أن تقاطع العمود مع الصف يمثل قيمة المساحة. ألاحظ الشكل:



ب) المساحة فوق (ع = ١,٢) = ١ – المساحة تحت (ع = ١,٢) = ١ – ٠,٨٨٤٩ = ٠,١١٥١. ألاحظ الشكل:

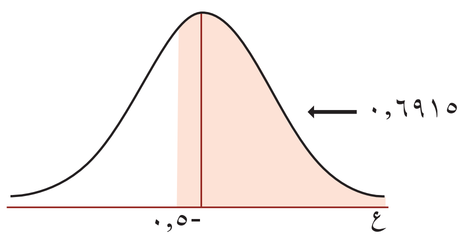


جـ) المساحة تحت (ع = -١) = ٠,١٥٨٧ مباشرة من الجدول، ألاحظ الشكل:



د) المساحة فوق (ع = -٠,٥) = ١ ـ (المساحة تحت ع = -٠,٥)

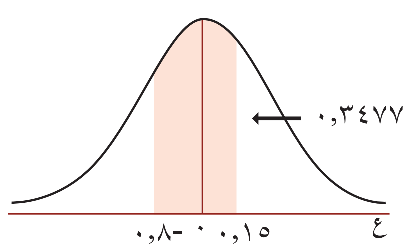
= ١ ـ ٠,٣٠٨٥ = ٠,٦٩١٥ ألاحظ الشكل:



هـ) المساحة المحصورة بين (ع$_1$ = -٠,٨) و (ع$_2$ = ٠,١٥)

= المساحة تحت (ع = ٠,١٥) ـ المساحة تحت (ع = -٠,٨)

= ٠,٥٥٩٦ ـ ٠,٢١١٩ = ٠,٣٤٧٧

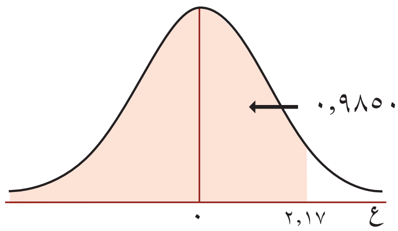


مثال (٢): أجد قيمة ع في كل مما يأتي:

أ) المساحة تحتها تساوي ٠,٩٨٥٠

ب) المساحة فوقها تساوي ٠,٦٦٢٨

الحل: أ) المساحة تحت ع تساوي ٠,٩٨٥٠ ، أبحث في الجدول عن المساحة ٠,٩٨٥٠ ، أجد أنها تقع عند تقاطع صف ع = ٢,١ وعمود ٠,٠٧ ، ومنها ع = ٢,١٧ ، ألاحظ الشكل الآتي:

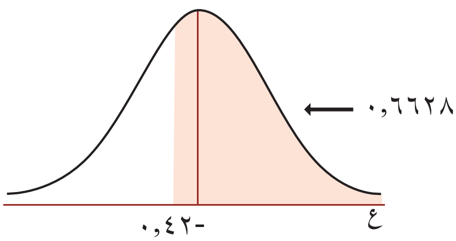


ب) المساحة فوق ع تساوي ٠,٦٦٢٨ = ١ ـ المساحة تحت ع

المساحة تحت ع = ١ ـ ٠,٦٦٢٨

= ٠,٣٣٧٢

من الجدول ع = -٠,٤٢ ألاحظ الشكل المجاور:



مثال (٣): الوسط الحسابي لأعمار المصابيح الكهربائية التي ينتجها أحد المصانع هو ١٢٠٠ ساعة بانحراف معياري مقداره ٣٠٠ ساعة، فإذا كانت هذه الأعمار تتبع التوزيع الطبيعي واختير أحد المصابيح عشوائياً، فما النسبة المئوية لأن يبقى المصباح الكهربائي صالحاً مدة تزيد على ١٨٠٠ ساعة.

الحل: نسبة أن يبقى المصباح صالحاً لمدة تزيد على ١٨٠٠ ساعة = المساحة فوق ($ع|_{س=١٨٠٠}$)

$$ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

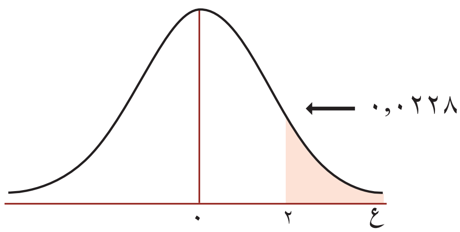
$$ع|_{س=١٨٠٠} = \frac{١٨٠٠ - ١٢٠٠}{٣٠٠} = ٢$$

المساحة = المساحة فوق (ع = ٢)

= ١ − المساحة تحت (ع = ٢)

= ١ − ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

النسبة المطلوبة = ٠,٠٢٢٨ × ١٠٠٪ = ٢,٢٨٪

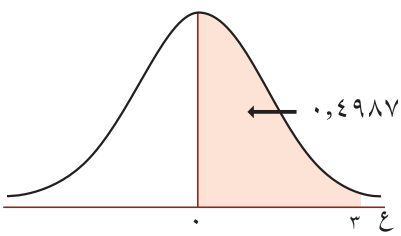


مثال (٤): الوسط الحسابي لكتل ١٠٠٠ شخص يساوي ٦٥ كغم، والانحراف المعياري للكتل ١٠ كغم، فإذا كانت الكتل تتبع التوزيع الطبيعي، فما نسبة الأشخاص الذين تقع كتلهم بين ٦٥ كغم و ٩٥ كغم؟ وما عددهم؟

الحل: نسبة الأشخاص الذين كتلهم بين ٦٥ كغم، ٩٥ كغم

= المساحة المظللة في الشكل المقابل.

أحول القيمة الخام ٩٥ إلى علامة معيارية



$$ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

$$ع|_{س=٩٥} = \frac{٩٥ - ٦٥}{١٠} = ٣$$

نسبة الأشخاص = المساحة بين (ع = صفر ، و ع = ٣) لماذا؟

= المساحة تحت (ع = ٣) − ٠,٥ لماذا؟

= ٠,٩٩٨٧ − ٠,٥

= ٠,٤٩٨٧

أي أن النسبة المئوية للأشخاص الذين تنحصر كتلهم بين ٦٥ كغم و ٩٥ كغم = ٤٩,٨٧٪

عدد هؤلاء الأشخاص = ١٠٠٠ × ٠,٤٩٨٧ ≈ ٤٩٩ شخصاً.

تمارين ومسائل

س١: أجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري في كل من الحالات الآتية:

أ) تحت (ع = ١,٣٨)

ب) فوق (ع = ٠,٩٠)

جـ) بين (ع = -١,٥) و (ع = ١,٥)

س٢: أجد العلامة المعيارية (ع) في كل من الحالات الآتية:

أ) المساحة تحت ع هي ٠,٨٥٥٤

ب) المساحة فوق ع هي ٠,٧٧٣٤

جـ) المساحة بين -ع و ع هي ٠,٦

س٣: مدرسة ثانوية فيها ٥٠٠ طالب، أطوالهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي ١٦٥سم، وبانحراف معياري ١٠سم، ما نسبة الطلبة الذين تنحصر أطوالهم بين ١٥٠سم، ١٨٠سم ؟ وما عددهم ؟

س٤: إذا كان الزمن الذي يستغرقه بائع جرائد للوصول إلى أحد البيوت يتخذ توزيعاً طبيعياً، بوسط حسابي ١٢ دقيقة وبإنحراف معياري دقيقتان، وكان هذا الموزّع ينقل الجرائد يوميّاً على مدار ٣٦٥ يوماً، ما عدد الأيام التي يستغرق فيها الموزّع زمناً:

أ) يزيد على ١٧ دقيقة؟

ب) ينحصر بين ٩ - ١٣ دقيقة؟

س٥: إذا كانت علامات ٦٠٠ طالب تتخذ توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي ٧٢ وبانحراف معياري ٨ وكانت علامة النجاح هي ٦٠، أجد:

أ) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع علاماتهم بين ٦٢، ٧٨

ب) عدد الطلبه الراسبين.

س٦: تتبع رواتب ١٠٠٠ موظف في إحدى الشركات توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي ٧٠٠ دينار، وبانحراف معياري ٢٠ ديناراً. أحسب عدد الموظفين الذين تنحصر رواتبهم بين ٦٨٠ ديناراً و ٧٤٠ ديناراً.

ورقة عمل

١- إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق على ح بحيث أن: هـ$'$(١) = ٤، ق$'$(١) = -١ ، ق$'$(٦) = -٢، هـ(١) = ٦ ، أجد (ق∘هـ)$'$ (١).

٢- إذا كانت أعمار (٥) أشخاص كالآتي: ٢٠، ٨، ١٢، ١٤، ١٦، أجد:

١) العلامة المعيارية المناظرة لأعمار هؤلاء الأشخاص.

٢) الوسط الحسابي للعلامات المعيارية.

٣) الانحراف المعياري للعلامة المعيارية.

٣- إذا كانت العلامات المعيارية لخمسة طلاب كما يلي ١، $\frac{١}{٢}$، $\frac{-٣}{٢}$، أ ، $\frac{-١}{٢}$ فما قيمة الثابت أ ؟

٤- نادي رياضي مكون من ٤٠٠ عضو تتبع أعمارهم التوزيع الطبيعي بوسط حسابي ٤٠ سنة وبانحراف معياري ٥ أجد:

أ) عدد الأعضاء الذين تزيد أعمارهم على ٥٠ سنة.

ب) عدد الأعضاء الذين تتراوح أعمارهم بين ٣٥ سنة إلى ٤٥ سنة.

٥- إذا كان ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = س − ٢ ما قيمة (ق∘هـ)$'$(١) ؟

٦- أجد القيم القصوى للاقتران ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} + ٧

نموذج اختبار

س١: أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

١) ما قيمة الوسط الحسابي (μ) والانحراف المعياري (σ) لمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري:

أ) μ = ١ ، σ = ١   ب) μ = ٠ ، σ = ٠   جـ) μ = ٠ ، σ = ١   د) μ = ١ ، σ = ٠

٢) ما العلامة المعيارية المناظرة للعلامة ٧٧ علماً بأن الوسط الحسابي ٧٠ والانحراف المعياري ١٤ ؟

أ) -٢   ب) -٠,٥   جـ) ٠,٥   د) ٢

٣) إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من المفردات ٧٥ والانحراف المعياري ١٥ فما العلامة الخام المناظرة للعلامة المعيارية ع = ٢؟

أ) ١٠٣   ب) ١٠٨   جـ) ١٠٤   د) ١٠٥

٤) ما مساحة المنطقة بين (٠,٩٦ > ع > ١,٦٥):

أ) ٠,٠٩٩١   ب) ٠,١١٩٠   جـ) ١,٨١٢   د) ١,٧٨٢

٥) إذا كانت ص = (س − ١)^{٥} ما قيمة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س= -١ ؟

أ) ٥   ب) ٢٥   جـ) صفر   د) ٨٠

٦) إذا كان ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = س − ٢ ما قيمة (ق$\circ$هـ)$'$(١) ؟

أ) -٢   ب) ٢   جـ) صفر   د) ٤

٧) إذا كان ق(س) = س^{٢}، هـ(س) = س + ١ فما قيمة (هـ$\circ$ق)$'$ (٢) ؟

أ) ٣   ب) ١   جـ) ٤   د) ٢

٨) إذا كانت ص = (١ − ٢س)^{٢} ما قيمة $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ عندما س = ٣ ؟

أ) -٢٠   ب) ٨   جـ) -٨   د) ٢٠

س٢: أجد القيم القصوى للاقتران: أ) ق(س) = - س^{٣} + ٣س^{٢} + ٧   ب) ق(س) = س^{٣} − ٣س^{٢}

س٢: إذا كانت العلامتان المعياريتان المناظرتان للعلامتين ٧١ ، ٥٣ هما ٠,٥ ، -١ على الترتيب، أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات الخام لطلبة الصف.

س٣: خط إنتاج في مصنع ينتج أكياساً من الأرز بوسط حسابي يساوي ١,٠١ كغم، وبانحراف معياري يساوي ٠,٠٢ كغم. أجد:

أ) نسبة الأكياس التي كتلتها أقل من ١,٠٣ كغم.

ب) نسبة الأكياس التي تتراوح كتلها بين ١ كغم و ١,٠٥ كغم.

س٤: إذا ارتبط عمر بطارية السيارة بالمسافة التي تقطعها السيارة باستعمال هذه البطارية، وعلم أن عمر أحد أنواع بطاريات السيارات يتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي ١٠٠٠٠٠كم، وبانحراف معياري ١٠٠٠٠كم. وأنتجت إحدى الشركات ٢٠٠٠٠ بطارية من هذا النوع في الشهر. أجد:

أ) عدد البطاريات التي يتراوح عمرها بين ٩٠٠٠٠ كم، ١١٠٠٠٠ كم.

ب) عدد البطاريات التي يزيد عمرها على ١٢٠٠٠٠ كم.

جـ) النسبة المئوية للبطاريات التي تتراوح أعمارها بين ٨٠٠٠٠ كم، ١١٠٠٠٠ كم.

التكامل غير المحدود (Indefinite Integral)

إذا كان ق(س) = س^{٣} فإن ق$^{/}$(س) = ٣س^{٢}، إذا كان ق$^{/}$(س) = ٢س، فإن ق(س) = ...؟
إن عملية إيجاد الاقتران ق(س) الذي عُلِمت مشتقته الأولى ق$^{/}$(س) هي عملية عكسية لعملية الاشتقاق التي تعلمتها في الوحدة السابقة.

مثال (١): أكتب ثلاثة اقترانات مشتقتها الأولى هي ٤س^{٣}؟

الحل: ق(س)= س^{٤}، ك(س)= س^{٤} + ١٣، هـ(س) = س^{٤} ـ π، جميعها مشتقتها هي ٤س^{٣}.

ألاحظ أن ق(س) – ك(س) = س^{٤} – (س^{٤} + ١٣) = -١٣ وكذلك ك(س) – هـ(س) = (س^{٤} + ١٣) – (س^{٤} – π) = ١٣ + π أي أن الفرق بين أي اقترانين لهما نفس المشتقة هو عدد ثابت، لذلك فإن الاقتران الذي مشتقته ٤س^{٣} سيكون على الصورة ق(س) = س^{٤} + جـ، أي أن التكامل عملية عكسية للتفاضل.

تعريف:
إذا كان الاقتران ق$^{/}$(س) هو المشتقة الأولى للاقتران ق(س)، فإن الاقتران ق(س) + جـ يمثل مجموعة الاقترانات التي مشتقتها الأولى ق$^{/}$(س)، ويسمى بالتكامل غير المحدود للاقتران ق$^{/}$(س)، أو يسمى بالاقتران الأصلي الذي مشتقته ق$^{/}$(س).
وبالرموز يكتب: $\int$ق$^{/}$(س) ءس = ق(س) + جـ ، جـ $\in$ ح، الرمز $\int$ هو إشارة التكامل، ءس تشير أن الاقتران بدلالة المتغير س ، جـ يسمى ثابت التكامل.

مثال (٢): أجد $\int$٢ءس ؟

الحل: $\int$٢ءس = ق(س) ، حيث ق$^{/}$(س) = ٢
ق(س) = ٢س + جـ
$\int$٢ءس = ٢س + جـ (الاقتران الأصلي).

مثال (٣): أجد $\int$٣س^{٢} ءس ؟

الحل: $\int$٣س^{٢} ءس = ك(س)، حيث ك$^{/}$(س) = ٣س^{٢}
ك(س) = س^{٣} + جـ
$\int$٣س^{٢} ءس = س^{٣} + جـ (الاقتران الأصلي).

مثال (٤): أي من الاقترانين ق(س) = ٢س^{٣} + ٤س^{٢} + ٤س + جـ
هـ(س) = ٢س^{٣} + ٥س^{٢} + ٤س + جـ

يمكن اعتباره اقتراناً أصلياً للمشتقة (٦س^{٢} + ١٠س + ٤) ؟

الحل: ق$'$(س) = ٦س^{٢} + ٨س + ٤

هـ$'$(س) = ٦س^{٢} + ١٠س + ٤

هـ(س) = ٢س^{٣} + ٥س^{٢} + ٤س + جـ هو الاقتران الأصلي للمشتقة (٦س^{٢} + ١٠س + ٤)

وبالرموز $\int$(٦س^{٢} + ١٠س + ٤) ءس = ٢س^{٣} + ٥س^{٢} + ٤س + جـ

مثال(٥): إذا كان ق(س) = $\int$(س^{٢} + س)(س − ٢) ءس ، أجد ق$'$(س) ؟

الحل: ق$'$(س) = مشتقة $\int$(س^{٢} + س)(س − ٢) ءس، وبما أن الاشتقاق عملية عكسية للتكامل،

فإن ق$'$(س) = (س^{٢} + س)(س − ٢).

تمارين ومسائل

س١. أضع إشارة ✓ أمام العبارة الصائبة وإشارة ✗ أمام العبارة الخاطئة:

أ) $\int$(٥س + ٤) ءس = $\frac{\text{٥س}^{٢}}{٢}$ + ٤س

ب) $\int$(٦س^{٥} + ٣س^{٢}) ءس = س^{٦} + س^{٣} + جـ

جـ) $\int$(٢س^{٣} + ٣س) ءس = ٦س + ٣

د) $\int \frac{-٥}{\text{س}^{٢}}$ ءس = $\frac{٥}{\text{س}}$ + جـ

هـ) $\int$٢نقءس = نق^{٢} + جـ

و) $\int$٢نقءنق = نق^{٢} + جـ

س٢. إذا كان ق(س) = $\int \frac{\text{س}^{٢} + ٣}{\text{س} + ١}$ ءس، أجد ق$'$(س).

قواعد التكامل غير المحدود (Rules of Indefinite Integral)

إذا كان الاقتران الأصلي للمشتقة ق/(س) = ٣س^{٢} هو س^{٣} + جـ، فكيف يمكن إيجاد الاقتران الأصلي للمشتقة ق/(س) = ٤س^{٣} + ٣س^{٢} ـ ٣ ؟ هل يوجد قواعد لإيجاد الاقتران الأصلي؟

الاقتران الأصلي لِـ ٤س^{٣} هو س^{٤} + جـ

الاقتران الأصلي لِـ ٣س^{٢} هو س^{٣} + جـ

الاقتران الأصلي لِـ -٣ هو ....

الاقتران الأصلي لِـ ٤س^{٣} + ٣س^{٢} ـ ٣ هو ......

مثال (١): أجد ∫ ٣ءس ؟

الحل: المطلوب هو إيجاد الاقتران الأصلي ق(س) الذي مشتقته الأولى ق/(س) = ٣.

من معلوماتنا في التفاضل، ألاحظ أن الاقترانات:

ق$_{١}$(س) = ٣س ، ق$_{٢}$(س) = ٣س + ٥،

ق$_{٣}$(س) = ٣س ـ $\sqrt{٢}$ ، ق$_{٤}$(س) = ٣س + ثابت

هي اقترانات مشتقتها الأولى ق/(س) = ٣، ألاحظ أن الفرق بين هذه الاقترانات هو في الحد الثابت فقط، ولذلك فإن الاقتران الأصلي ق(س) الذي مشتقته ق/(س) = ٣ هو ق(س) = ٣س + جـ.

أي أن ∫ ٣ءس = ٣س + جـ

قاعدة (١): $\int$ ﻡ ءس = ﻡ س + جـ ، ﻡ ، جـ عددين حقيقيين.

مثال (٢): أجد التكاملات الآتية:

١) $\int$ -٥ءس   ٢) $\int \sqrt{٣}$ ءص   ٣) $\int \frac{١}{٢}$ ءع.

الحل: ١) $\int$ -٥ءس = -٥س + جـ، الاقتران بدلالة المتغير س.

٢) $\int \sqrt{٣}$ ءص = $\sqrt{٣}$ ص + جـ، الاقتران بدلالة المتغير ص.

٣) $\int \frac{١}{٢}$ ءع = $\frac{١}{٢}$ ع + جـ، الاقتران بدلالة المتغير ع.

مثال (٣): أتأمل الجدول الآتي، وأجيب عن الأسئلة اللاحقة:

ق(س)	$\frac{س^{٣}}{٣}$	$\frac{س^{٤}}{٤}$ + ٧	$\frac{س^{٥}}{٥}$	$\frac{س^{٦}}{٦}$ + ٢
ق/(س)	س^{٢}	س^{٣}	س^{٤}	س^{٥}

١. ما العلاقة بين درجة ق/(س) و درجة ق(س)؟
٢. ما العلاقة بين معامل الحد الذي يحتوي على س في ق(س) ودرجة ق(س) ؟

الحل: ١. درجة الاقتران ق(س) تزيد ١ عن درجة ق/(س).

معامل الحد الذي يحتوي على س يساوي مقلوب درجة الاقتران.

قاعدة (٢): $\int$ س^{ن}ءس = $\frac{س^{ن+١}}{ن + ١}$ + جـ، جـ عدد حقيقي، ن ≠ -١.

مثال (٤): أجد كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int$ س^{٢}ءس   ب) $\int$ س$^{-٣}$ءس   ج) $\int$ س$^{\frac{١}{٢}}$ ءس   د) $\int \sqrt{س^{٣}}$ ءس

الحل: أ) $\int$ س^{٢}ءس = $\frac{س^{٢+١}}{٢ + ١}$ + جـ = $\frac{س^{٣}}{٣}$ + جـ

ب) $\int \text{س}^{-3}\,\text{ءس} = \dfrac{\text{س}^{-3+1}}{-3+1} + \text{ج} = \dfrac{\text{س}^{-2}}{-2} + \text{ج}$

ج) $\int \text{س}^{\frac{1}{2}}\,\text{ءس} = \dfrac{\text{س}^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \text{ج} = \dfrac{\text{س}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \text{ج} = \dfrac{2\text{س}^{\frac{3}{2}}}{3} + \text{ج}$

د) $\int \sqrt[3]{\text{س}^{2}}\,\text{ءس} = \int \text{س}^{\frac{2}{3}}\,\text{ءس} = \dfrac{\text{س}^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + \text{ج} = \dfrac{\text{س}^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \text{ج} = \dfrac{3\text{س}^{\frac{5}{3}}}{5} + \text{ج} = \dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\text{س}^{5}} + \text{ج}$

قاعدة (٣): إذا كان الاقتران ق(س) قابلاً للتكامل، فإن $\int \text{أ ق(س)}\,\text{ءس} = \text{أ}\int \text{ق(س)}\,\text{ءس}$ ، أ $\in$ ح

مثال (٥): أجد التكاملات الآتية:

أ) $\int 2\text{س}^{3}\,\text{ءس}$ ب) $\int \dfrac{3}{5}\text{س}^{4}\,\text{ءس}$ ج) $\int \sqrt{2}\,\text{ل}^{7}\,\text{ءل}$

الحل: أ) $\int 2\text{س}^{3}\,\text{ءس} = 2\int \text{س}^{3}\,\text{ءس} = \dfrac{2\text{س}^{4}}{4} + \text{ج} = \dfrac{\text{س}^{4}}{2} + \text{ج}$

ب) $\int \dfrac{3}{5}\text{س}^{4}\,\text{ءس} = \dfrac{3}{5}\int \text{س}^{4}\,\text{ءس} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{\text{س}^{5}}{5} + \text{ج} = \dfrac{3\text{س}^{5}}{25} + \text{ج}$

ج) $\int \sqrt{2}\,\text{ل}^{7}\,\text{ءل} = \sqrt{2}\int \text{ل}^{7}\,\text{ءل} = \sqrt{2}\,\dfrac{\text{ل}^{8}}{8} + \text{ج}$

قاعدة (٤): إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل، فإن:

١. $\int (\text{ق+هـ})(\text{س})\,\text{ءس} = \int \text{ق(س)}\,\text{ءس} + \int \text{هـ(س)}\,\text{ءس}$

٢. $\int (\text{ق−هـ})(\text{س})\,\text{ءس} = \int \text{ق(س)}\,\text{ءس} - \int \text{هـ(س)}\,\text{ءس}$

مثال (٦): أجد $\int (3\text{س}^{2} + 4\text{س})\,\text{ءس}$

الحل: $\int (3\text{س}^{2} + 4\text{س})\,\text{ءس} = 3\int \text{س}^{2}\,\text{ءس} + 4\int \text{س}\,\text{ءس}$

$= \text{س}^{3} + 2\text{س}^{2} + \text{ج}$ لماذا ؟

مثال (٧): أجد $\int (\frac{١}{٢}\text{س}^{٣} - \frac{٥}{\text{س}^{٢}})\,\text{ءس}$

الحل: $\int (\frac{١}{٢}\text{س}^{٣} - \frac{٥}{\text{س}^{٢}})\,\text{ءس} = \int \frac{١}{٢}\text{س}^{٣}\,\text{ءس} - \int \frac{٥}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\int \text{س}^{٣}\,\text{ءس} - ٥\int \text{س}^{-٢}\,\text{ءس}$

$= \frac{\text{س}^{٤}}{٨} + ٥\text{س}^{-١} + \text{جـ}$ لماذا؟

يمكن تعميم القاعدة (٤) لأكثر من اقترانين.

مثال (٨): أجد $\int (\text{س} + ٣)^{٢}\,\text{ءس}$

الحل: $(\text{س} + ٣)^{٢} = (\text{س} + ٣)(\text{س} + ٣) = \text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٩$

$\int (\text{س} + ٣)^{٢}\,\text{ءس} = \int (\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٩)\,\text{ءس} = \int \text{س}^{٢}\,\text{ءس} + \int ٦\text{س}\,\text{ءس} + \int ٩\,\text{ءس}$

$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + ٦\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٩\text{س} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + ٣\text{س}^{٢} + ٩\text{س} + \text{جـ}$

مثال (٩): أجد $\int \frac{\text{ع}^{٢} - ٩}{\text{ع} + ٣}\,\text{ءع}$ ، $\text{ع} \neq -٣$

الحل: $\int \frac{\text{ع}^{٢} - ٩}{\text{ع} + ٣}\,\text{ءع} = \int \frac{(\text{ع} + ٣)(\text{ع} - ٣)}{(\text{ع} + ٣)}\,\text{ءع} = \int (\text{ع} - ٣)\,\text{ءع} = \frac{\text{ع}^{٢}}{٢} - ٣\text{ع} + \text{جـ}$

مثال (١٠): إذا كان $\text{ص} = \int (٥\text{س}^{٢} + ٣\text{س})\,\text{ءس}$ = أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ؟

الحل: $\text{ص} = \int (٥\text{س}^{٢} + ٣\text{س})\,\text{ءس} = \frac{٥\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٣\text{س}^{٢}}{٣} + \text{جـ}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٥ \times ٣\text{س}^{٢}}{٣} + \frac{٣ \times ٢\text{س}}{٢} + \text{صفر}$

$= ٥\text{س}^{٢} + ٣\text{س}$ ماذا تلاحظ؟

هل يمكن الحل بطريقة أخرى؟ وضّح ذلك.

٤ - ٢ تمارين ومسائل

س١: أجد التكاملات الآتية:

أ. $\int \frac{\text{٢}}{\text{٣}}\ \text{ءس}$

ب. $\int \pi\ \text{ءع}$

ج. $\int -\sqrt{\text{٥}}\ \text{س ءس}$

د. $\int (\text{٢س}^{\text{٢}} + \text{٣})\ \text{ءس}$

هـ. $\int (\text{٧س}^{\text{٣}} - \frac{\text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}}} + \text{١})\ \text{ءس}$

و. $\int \text{ك}^{\text{٢}}\ \text{ءس}$ ، ك ثابت $\neq$ ٠

س٢: أجد $\int (\text{٢ص} - \text{٥})(\text{ص} + \text{٣})\ \text{ءص}$

س٣: أجد $\int \frac{\text{ل}^{\text{٢}} - \text{٥ل} + \text{٦}}{\text{ل} - \text{٢}}\ \text{ءل}$ ، ل $\neq$ ٢

س٤: أجد $\int (\text{٢س} + \text{١})(\text{س}^{\text{٣}} + \text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{٤})\ \text{ءس}$

س٥: إذا كان $\text{ق(س)} = \int (\text{٣س}^{\text{٣}} + \text{٥س}^{\text{٢}} - \text{٢س} + \text{٤})\ \text{ءس}$، أجد $\text{ق}^{/}\text{(س)}$.

س٦: إذا كان $\text{ص} = \int (\text{٢س} + \text{٢})(\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س})^{\text{٥}}\ \text{ءس}$، أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

التكامل المحدود

(Definite Integral)

تعريف: إذا كانت ق/(س) هي المشتقة الأولى للاقتران ق(س)، وكان ق/(س) قابلاً للتكامل، فإن

$\int_{أ}^{ب}$ ق/(س)ءس = ق(ب) – ق(أ)، أ ، ب عددان حقيقيان. وهذا التكامل يسمى تكاملاً محدوداً، حدّه العلوي = ب،

وحدّه السفلي= أ، وقيمته تساوي عدداً ثابتاً.

مثال (١): أحسب قيمة التكامل $\int_{١}^{٢}$ (س – ٣) ءس ؟

الحل: ق(س) = $\int$ (س – ٣) ءس

$= \frac{س^٢}{٢} -$ ٣س + جـ

$\int_{١}^{٢}$ (س – ٣) ءس = ق(٢) – ق(١)

= (٢ – ٦ + جـ) – ($\frac{١}{٢}$ – ٣ + جـ)

$= \frac{-٣}{٢}$ + جـ – جـ $= \frac{-٣}{٢}$

يمكن حل المثال بطريقة أخرى

$\int_{١}^{٢}$ (س – ٣) ءس = $\left(\frac{س^٢}{٢} - ٣س\right)\Big|_{١}^{٢}$

أعوض الحد العلوي، ثم أطرح منه ناتج تعويض الحد السفلي. = (٢ – ٦) – ($\frac{١}{٢}$ – ٣) $= \frac{-٣}{٢}$

مثال (٢): أجد $\int_{-١}^{٢}$(٣س^٢ – ٢س + ١)ءس

الحل: $\int_{-١}^{٢}$(٣س^٢ – ٢س + ١)ءس = $(س^٣ - س^٢ + س)\Big|_{-١}^{٢}$

= (٨ – ٤ + ٢) – (-١-١-١) = ٩

مثال (٣): إذا كان $ق'(س) = ٢س^٣ + ٥س$ أحسب متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى ٣.

الحل: متوسط التغير = $\frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١}$

لكن $ق(٣) - ق(١) = \int_{١}^{٣} (٢س^٣ + ٥س)\, ءس$

$= \left. \frac{س^٤}{٢} + \frac{٥س^٢}{٢} \right|_{١}^{٣}$

$= (\frac{٨١}{٢} + \frac{٤٥}{٢}) - (\frac{١}{٢} + \frac{٥}{٢}) = ٦٣ - ٣ = ٦٠$

متوسط التغير = $\frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١} = \frac{٦٠}{٢} = ٣٠$

مثال (٤): إذا كان $\int_{٢}^{٤} (بس - ٧)\, ءس = ٣٤$، أجد قيمة الثابت ب.

الحل: $\int_{٢}^{٤} (بس - ٧)\, ءس = \left. (\frac{بس^٢}{٢} - ٧س) \right|_{٢}^{٤} = ٣٤$

$= (٨ب - ٢٨) - (٢ب - ١٤) = ٣٤$

$٦ب - ١٤ = ٣٤$

$٦ب = ٤٨$

$ب = ٨$

مثال (٥): إذا كان $\int_{٥}^{ب} ٦س\, ءس = -٦٣$، أجد قيمة/قيم الثابت ب.

الحل: $\int_{٥}^{ب} ٦س\, ءس = \left. ٣س^٢ \right|_{٥}^{ب} = -٦٣$

$٣ب^٢ - ٧٥ = -٦٣$

$ب^٢ = ٤$ لماذا؟

$ب = \pm ٢$

٤ - ٤ تمارين ومسائل

س١: أحسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{-١}^{٢} ٦\pi \, ءس$

ب) $\int_{٠}^{٢} (٥ - ٣س^{٢}) \, ءس$

جـ) $\int_{١}^{٣} (\frac{١}{س^{٢}} - \frac{١}{س^{٣}}) \, ءس$

د) $\int_{١}^{٨} \sqrt[٣]{س} \, ءس$

س٢: إذا كان $\int_{٣}^{٥} ب^{٢} \, ءس = ٣٢$ فما قيمة/ قيم الثابت ب ؟

س٣: إذا كان $\int_{-٢}^{م} (٣ - ٢س) \, ءس =$ صفراً، فما قيمة/ قيم الثابت م ؟

س٤: أحسب $\int_{٠}^{٢} (٢س - ١)^{٢} \, ءس$.

س٥: أجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتي:

أ) $ص = \int (٤س^{٣} + ٢س - ٥) \, ءس$

ب) $ص = \int_{٢}^{٧} (٤س^{٣} + ٢س - ٥) \, ءس$

خصائص التكامل المحدود
(Definite Integral Properties)

خاصية (١): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل فإن $\int_{أ}^{أ} ق(س)\, ءس = ٠$ لكل أ ∈ ح

فمثلاً: أ. $\int_{١}^{١} (٢س^{٢} + ٣س + ٢)\, ءس = ٠$ حسب الخاصية (١)

ب. $\int_{٢}^{٢} (\sqrt{س} + ٥)\, ءس = ٠$ حسب الخاصية (١)

نشاط ١

أكمل الجدول الآتي:

التكامل	قيمته	التكامل	قيمته
$\int_{١}^{٢} (س + ١)\, ءس$	$\frac{٥}{٢}$	$\int_{٢}^{١} (س + ١)\, ءس$	$\frac{-٥}{٢}$
$\int_{٣}^{٥} ٧\, ءس$	١٤	$\int_{٥}^{٣} ٧\, ءس$	
$\int_{٠}^{١} س^{٥}\, ءس$		$\int_{١}^{٠} س^{٥}\, ءس$	$-\frac{١}{٦}$

من الجدول ماذا نلاحظ ؟

خاصية (٢): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، فإن: $\int_{أ}^{ب} ق(س) ءس = - \int_{ب}^{أ} ق(س) ءس$

مثال (١): إذا علمت أن $\int_{1}^{2}$ ق(س) ءس = ٨ ، أحسب $\int_{2}^{1}$ ق(س) ءس ؟

الحل: $\int_{2}^{1}$ ق(س) ءس = - $\int_{1}^{2}$ ق(س) ءس = -٨ حسب الخاصية (٢)

مثال (٢): إذا كان $\int_{2}^{3}$ ق(س) ءس= -٣ ، أجد $\int_{3}^{2}$ -٢ق(س) ءس ؟

الحل: $\int_{3}^{2}$ -٢ق(س) ءس = -٢ $\int_{3}^{2}$ ق(س) ءس

= ٢ $\int_{2}^{3}$ ق(س) ءس لماذا؟

= ٢ (-٣) = -٦

نشاط ٢

أكمل الجدول الآتي:

التكامل	(١) قيمته	التكامل	(٢) قيمته	التكامل	(٣) قيمته	أكتب علاقة بين (١)،(٢)،(٣)
$\int_{1}^{2}$ ٥ ءس	٥	$\int_{2}^{5}$ ٥ ءس	١٥	$\int_{1}^{5}$ ٥ ءس	٢٠	٥+١٥= ٢٠
$\int_{0}^{2}$ س^{2} ءس	$\frac{٨}{٣}$	$\int_{2}^{4}$ س^{2} ءس		$\int_{0}^{4}$ س^{2} ءس	$\frac{٦٤}{٣}$	
$\int_{1}^{2}$ (س − ٣) ءس		$\int_{2}^{3}$ (س − ٣)ءس	-$\frac{١}{٢}$	$\int_{1}^{3}$ (س − ٣) ءس		

من الجدول أعلاه، ماذا نلاحظ؟

خاصية (٣): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، على [أ ، جـ] ، ب $\in$ [أ ، جـ] فإن:

$$\int_{أ}^{ب} \text{ق(س) ءس} + \int_{ب}^{جـ} \text{ق(س) ءس} = \int_{أ}^{جـ} \text{ق(س) ءس}$$ (خاصية الإضافة).

مثال (٣): إذا علمت أن $\int_{١}^{٢} \text{ق(س) ءس} = ٣$ ، $\int_{٢}^{٤} \text{ق(س) ءس} = -٩$ أجـد $\int_{١}^{٤} \text{ق(س) ءس}$ ؟

الحل: $\int_{١}^{٤} \text{ق(س) ءس} = \int_{١}^{٢} \text{ق(س) ءس} + \int_{٢}^{٤} \text{ق(س) ءس}$ حسب الخاصية (٣)

= (٣) + (- ٩) = -٦

مثال (٤): إذا علمت أن $\int_{١}^{٣} \text{ق(س) ءس} = ٢$ ، $\int_{٤}^{٣} \text{٥ق(س) ءس} = ١٥$ أجـد $\int_{١}^{٤} \text{-٢ق(س) ءس}$ ؟

الحل: $\int_{١}^{٤} \text{-٢ق(س) ءس} = -٢ \int_{١}^{٤} \text{ق(س) ءس}$

لكن $\int_{١}^{٤} \text{ق(س) ءس} = \int_{١}^{٣} \text{ق(س) ءس} + \int_{٣}^{٤} \text{ق(س) ءس}$

$\int_{٣}^{٤} \text{ق(س) ءس} = - \int_{٤}^{٣} \text{ق(س) ءس} = -٣$ لماذا؟

$\int_{١}^{٤} \text{ق(س) ءس} = ٢ + (-٣) = -١$ لماذا؟

$\int_{١}^{٤} \text{-٢ق(س) ءس} = -٢ \ (-١) = ٢$

خاصية (٤): إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل، على [أ ، ب] ، فإن:

$$\int_{أ}^{ب} \text{(ق(س) } \pm \text{ هـ(س)) ءس} = \int_{أ}^{ب} \text{ق(س) ءس} \pm \int_{أ}^{ب} \text{هـ(س) ءس}$$

مثال (٥): إذا كان $\int_{-١}^{٢} \text{ق(س) ءس} = -٥$ ، أجد $\int_{-١}^{٢} \text{(٣ق(س) + س + ٢) ءس}$ ؟

الحل: $\int_{-١}^{٢} \text{(٣ق(س) + س + ٢) ءس} = \int_{-١}^{٢} \text{٣ق(س) ءس} + \int_{-١}^{٢} \text{(س + ٢) ءس}$

$$= ٣\int_{-١}^{٢} \text{ق(س) ءس} + \left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{٢س}\right)\Big|_{-١}^{٢}$$

$$= ٣(-٥) + \left[\left(\frac{٤}{٢} + ٤\right) - \left(\frac{١}{٢} + ٢(-١)\right)\right]$$

$$= -١٥ + \left(٦ + \frac{٣}{٢}\right) = \frac{-١٥}{٢}$$

تمارين ومسائل

س١: أحسب $\int_{٢}^{٢} \text{(س}^{٢} \text{ − ٦س) ءس}$

س٢: أحسب التكاملات الآتية: أ) $\int_{٢}^{٣} \text{(س − ٦) ءس}$ ب) $\int_{٢}^{٥} \text{(س − ٦) ءس}$ جـ) $\int_{٣}^{٥} \text{(س − ٦) ءس}$

س٣: إذا كان $\int_{-١}^{٢} \text{ق(س) ءس} = -٣$ ، $\int_{٠}^{٢} \text{٢ق(س) ءس} = ٤$، أجد قيمة الآتي:

أ) $\int_{٠}^{٢} \text{-٣ق(س) ءس}$ ب) $\int_{-١}^{٠} \text{ق(س) ءس}$ جـ) $\int_{-١}^{٢} \text{(٣ق(س) + س) ءس}$

س٤: إذا كان $\int_{٢}^{٣} \text{٣ق(س) ءس} = ١٢$ ، $\int_{٢}^{٣} \text{-٢هـ(س) ءس} = ٦$ ، أجد قيمة:

$\int_{٢}^{٣} \text{(٥هـ(س) − ٣ق(س)) ءس}$

س٥: إذا كان $\int_{١}^{\text{م}} \text{(٢س + ٥) ءس} = ٠$ ، أجد قيمة/قيم الثابت م.

التكامل بالتعويض
(Integration by Substitution)

بعض الاقترانات لا يمكن تكاملها باستخدام القواعد التي درستها، وهذه الاقترانات يمكن تكاملها بطرق متعددة ومتنوعة، وسنتعرف في دراستنا لهذه الوحدة إلى طريقة التكامل بالتعويض على أنواع معينة من الاقترانات.

نشاط ١

أجد $\int (\text{س} - ٣)^{٢}\, \text{ءس}$

$\int (\text{س} - ٣)^{٢}\, \text{ءس} = \int (\qquad)\, \text{ءس}$ لماذا ؟

$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٩\text{س} + \text{جـ}$

وبالطريقة نفسها أجد $\int (٤\text{س} - ٩)^{٣}\, \text{ءس}$

لكن هل يمكن أن أجد $\int (٤\text{س} - ٩)^{١٠}\, \text{ءس}$ بسهولة بالطريقة نفسها ؟

يمكن إيجاد $\int (\text{س} - ٣)^{٢}\, \text{ءس}$ بطريقة أخرى، تسمى طريقة التكامل بالتعويض

الحل: أفرض أن $\text{ص} = (\text{س} - ٣)$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$ ، $\text{ءس} = \text{ءص}$ بالتعويض في التكامل

$\int (\text{س} - ٣)^{٢}\, \text{ءس} = \int \text{ص}^{٢}\, \text{ءص} = \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{س} - ٣)^{٣}}{٣} + \text{جـ}$

مثال (١): أجد $\int (\text{٣س} + ١)^{٩}\,\text{ءس}$

الحــل: أفرض أن ص = ٣س + ١ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣$ ، $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٣}$

أعوض في التكامل

$$\int (\text{٣س} + ١)^{٩}\,\text{ءس} = \int \text{ص}^{٩}\,\frac{\text{ءص}}{٣} = \frac{١}{٣}\int \text{ص}^{٩}\,\text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٣} \times \frac{\text{ص}^{١٠}}{١٠} + \text{جـ} = \frac{\text{ص}^{١٠}}{٣٠} + \text{جـ}$$

$$= \frac{(\text{٣س} + ١)^{١٠}}{٣٠} + \text{جـ}$$

مثال (٢): أجـد $\int_{٠}^{١} \text{س}(\text{٣س}^{٢} - ١)^{٣}\,\text{ءس}$

الحل: نفرض أن ص = $(\text{٣س}^{٢} - ١)$، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٦س}$ ومنها $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٦س}}$

أعوض في التكامل

$$\int \text{س}(\text{٣س}^{٢} - ١)^{٣}\,\text{ءس} = \int \text{س}\,\text{ص}^{٣}\,\frac{\text{ءص}}{\text{٦س}} = \frac{١}{٦}\int \text{ص}^{٣}\,\text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٦} \times \frac{\text{ص}^{٤}}{٤} + \text{جـ} = \frac{(\text{٣س}^{٢} - ١)^{٤}}{٢٤} + \text{جـ}$$

$$\int_{٠}^{١} \text{س}(\text{٣س}^{٢} - ١)^{٣}\,\text{ءس} = \left. \frac{(\text{٣س}^{٢} - ١)^{٤}}{٢٤} \right|_{٠}^{١}$$

$$= \frac{(٣ \times ١ - ١)^{٤}}{٢٤} - \frac{(٣ \times ٠ - ١)^{٤}}{٢٤} = \frac{١٥}{٢٤}$$

مثال (٣): أجـد $\int (\text{٢س} + \text{١})(\text{س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٥})^{\text{٣}}\, \text{ءس}$

الحل: أفرض أن $\text{ص} = (\text{س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٥})$ ، $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{٢س} + \text{١})$

أعوض في التكامل

$$\int (\text{٢س} + \text{١})(\text{س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٥})^{\text{٣}}\, \text{ءس} = \int (\text{٢س} + \text{١})(\text{ص})^{\text{٣}} \frac{\text{ءص}}{(\text{٢س}+\text{١})}$$

$$= \int \text{ص}^{\text{٣}}\, \text{ءص} = \frac{\text{ص}^{\text{٤}}}{\text{٤}} + \text{جـ} = \frac{(\text{س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٥})^{\text{٤}}}{\text{٤}} + \text{جـ}$$

٤ - ٦ تمارين ومسائل

أجـد التكاملات الآتية:

س١: $\int (\text{٢} - \text{٣س})^{\text{٣}}\, \text{ءس}$

س٢: $\int \dfrac{\text{٣}}{(\text{س} - \text{١})^{\text{٥}}}\, \text{ءس}$

س٣: $\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{٤}}\, \text{ءس}$ ، أ ، ب ثوابت

س٤: $\int \text{س}^{\text{٢}}(\text{س}^{\text{٣}} + \text{١})^{\text{٤}}\, \text{ءس}$

س٥: $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} (\text{٢س} - \text{٣})^{\text{٢}}\, \text{ءس}$

س٦: $\int_{\text{٠}}^{\text{١}} (\text{٢س} - \text{٥})(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٧})^{-\text{٢}}\, \text{ءس}$

س٧: $\int \sqrt{\text{٣س} - \text{١}}\, \text{ءس}$

س٨: $\int (\text{س} + \text{٢}) \sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤س}}\, \text{ءس}$

تطبيقات على التكامل المحدود
(إيجاد المساحات)

(Definite Integral Applications) (Areas)

في هذا الدرس سنستخدم التكامل المحدود لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات في فترة معينة، علماً بأن ق(س) ممثل بيانياً ويقع منحناه فوق محور السينات.

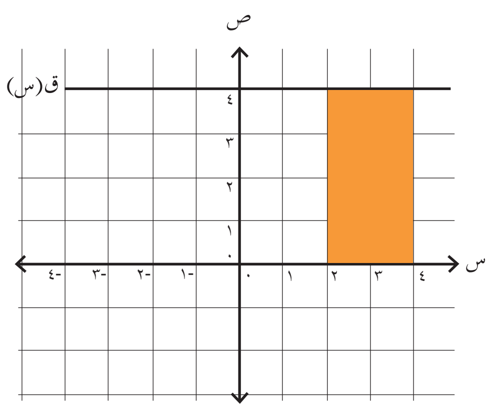
نظرية: إذا كان ق(س) اقتراناً موجباً (فوق محور السينات)، فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب تساوي $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس

مثال (١): أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٤ ومحور السينات والمستقيمين س = ٢، س = ٤ كما في الشكل المجاور.

الحل: $\int_{٢}^{٤}$ ٤ ءس = ٤س $\Big|_{٢}^{٤}$ = ٤×٤ − ٤×٢ = ٨ وحدات مربعة.

ألاحظ أن المنطقة المحصورة هي مستطيلة الشكل.

مساحة المستطيل = الطول × العرض = ٤ × ٢ = ٨ وحدات مربعة.



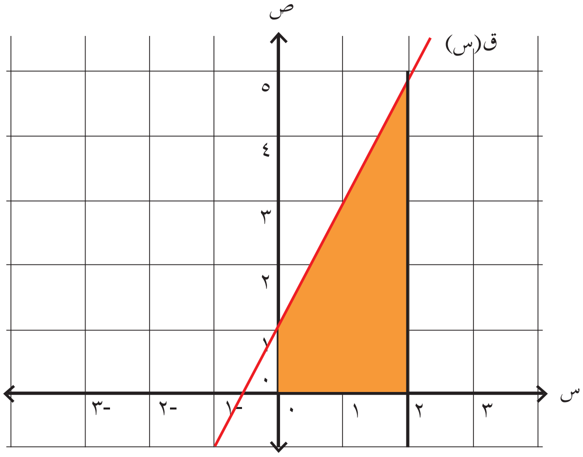
مثال (٢): أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٢س + ١ ومحور السينات، والمستقيمين س = ٠ ، س = ٢، ألاحظ الشكل المرسوم.

الحل: المساحة (م) المظللة في الشكل تساوي

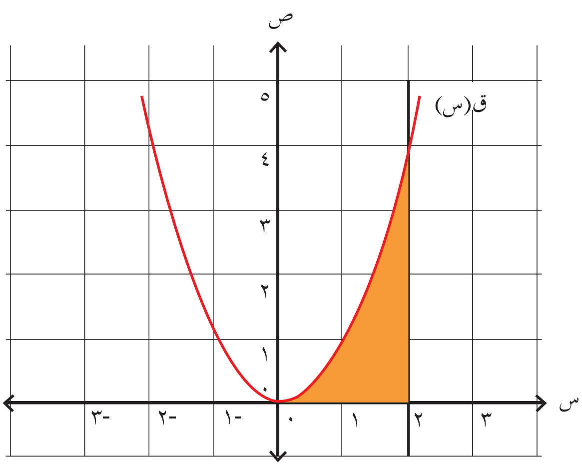
$$\text{م} = \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{٢س} + \text{١})\ \text{ءس} = (\text{س}^{\text{٢}} + \text{س}) \Big|_{\text{٠}}^{\text{٢}}$$

= (٤+٢) − (٠) = ٦ وحدات مربعة

هل يمكن حساب المساحة بطريقة أخرى؟



مثال (٣): أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س$^{\text{٢}}$ ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٢ ، ألاحظ الشكل المرسوم.



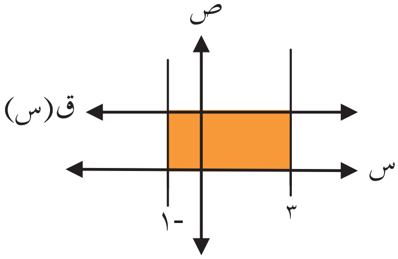
الحل: المساحة (م) المظللة في الشكل تساوي

$$\text{م} = \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{س}^{\text{٢}}\ \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٣}} \Big|_{\text{٠}}^{\text{٢}}$$

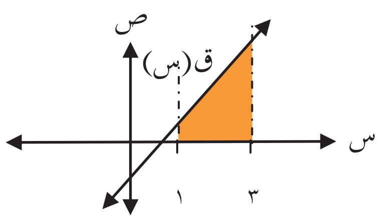
$$= \frac{\text{٨}}{\text{٣}} - \frac{\text{٠}}{\text{٣}} = \frac{\text{٨}}{\text{٣}} \ \text{وحدة مربعة}$$

هل يمكن حساب المساحة بطريقة أخرى؟

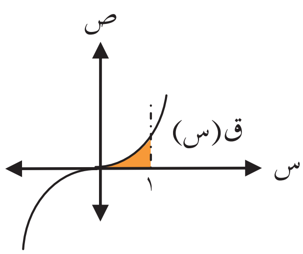
٤ - ٧ تمارين ومسائل



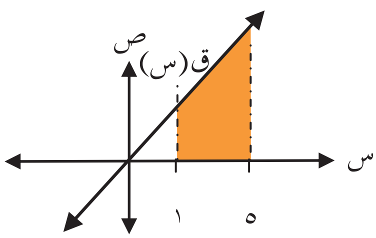
س١: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٣، ومحور السينات والمستقيمين س = -١ ، س = ٣



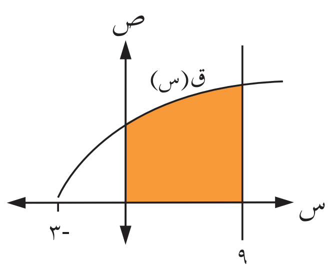
س٢: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٣س − ٢ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٣



س٣: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = $س^{٣}$ ، ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ١



س٤: إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = أس ومحور السينات والمستقيمين س = ١، س = ٥ تساوي ٨ فما قيمة الثابت أ ، أ > صفر.



س٥: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ك(س) = $\sqrt{٣س + ٩}$ ومحور السينات والمستقيمين س = صفر ، س = ٩.

الفائـــــدة

(Interest)

نشاط ١

يستثمر بعض الناس نقودهم عن طريق إيداعها في البنوك، حيث يقوم البنك باستثمارها في مشاريع تحقق لهم نسبة معينة من الأرباح، ويعطي فوائد للذين يدّخرون لديه بنسبة معينة، تسمى نسبة فائدة. وعندما يقترض أصحاب الأعمال من البنك، فإنه يأخذ منهم نسبة فائدة أيضاً مقابل ذلك.

فمثلاً، إذا أودع شخص مبلغ ٢٠٠ دينار في أحد البنوك، وكان هذا البنك يعطي فائدةً سنويةً نسبتها ٨٪ ، فما المبلغ الذي يقبضه الشخص من البنك أرباحاً عن المبلغ المودع؟ يقبض الشخص ٨ دنانير عن كل مائة دينار، لذا فإنه يقبض في نهاية العام ....

يسمى المبلغ ١٦ ديناراً الذي يقبضه في نهاية السنة الفائدة.

نشاط ٢

أم العبد امرأة فلسطينية زوجها أسير في سجون الاحتلال، لديها بنت وولد وتفكر كيف تؤمن لهما أقساط الدراسة الجامعية بعد ٦ سنوات، حيث إنها تمتلك مبلغ ٤٠٠٠ دينار ورثته عن أبيها، قررت فتح حساب بنكي لهما بمبلغ ٢٠٠٠ دينار، وأبلغها الموظف في البنك أنها ستحصل على ٢٠٠ دينار زيادة سنوياً:

١- ما مقدار الزيادة التي تحصل عليها أم العبد بعد ٦ سنوات؟

الزيادة بعد السنة الأولى : ٢٠٠ دينار.

الزيادة تكون ٦٠٠ بعد السنة ....

الزيادة بعد السنة السادسة :..............

٢- تسمى هذه الزيادة:................، النسبة المئوية للزيادة : ١٠٪ . لماذا؟

٣- جملة المبلغ الذي ستحصل عليه بعد ٦ سنوات: ....

٤- العوامل المؤثرة في الفائدة: الزمن، ....، ....

تعريف الفائدة (Interest):

هو المبلغ الذي يدفع مقابل استخدام المال، أو هي عائد استثمار مبلغ ما بمعدل معين لزمن معين. ويعبر عنه عادة بنسبة مئوية تسمى "سعر الفائدة" أو "معدل الفائدة" وهي نوعان:

الفائدة البسيطة: وهي الفائدة التي تحسب على أصل المبلغ في نهاية كل فترة زمنية.

الفائدة المركبة: وهي الفائدة التي تحسب على أصل المبلغ بعد إضافة الفائدة إلى الأصل في نهاية كل فترة زمنية، أي أنه بعد نهاية كل فترة زمنية يكون لدينا أصل جديد، وهذا الأصل الجديد هو أصل المبلغ السابق مضافاً إليه الفائدة من الفترة السابقة.

العوامل المؤثرة في حساب الفائدة، هي:

١- أصل المبلغ، ويرمز له بالرمز (م): وهو عبارة عن مبلغ القرض، أو المبلغ المستثمر.

٢- معدل الفائدة ويرمز لها بالرمز (ع): هو العائد من وحدة رأس المال (دينار) لكل وحدة زمن (سنة)[1].

٣- الفترة الزمنية ويرمز لها بالرمز (ن): وهي عبارة عن مدة القرض، أو مدة الاستثمار.

الفائدة البسيطة (Simple Interest):

تستخدم الفائدة البسيطة عند اقتراض الأموال، أو استثمارها لفترة زمنية قصيرة الأجل (عادة أقل من سنة)، وتحسب دائماً على أصل المبلغ عن كل وحدة زمنية، أي أنها لا تعتبر من فترة زمنية إلى أخرى عند ثبات أصل القرض، أو أصل المبلغ المستثمر.

تسمى هذه الفائدة بالفائدة البسيطة، وتحسب بالعلاقة:

ف = م × ع × ن

جملة المبلغ بفائدة بسيطة = المبلغ الأصلي + الفائدة البسيطة.

جـ = م + ف

حيث: (**ف**) هي الفائدة ،(م) أصل المبلغ، و(ع) معدل الفائدة، و(ن) الفترة الزمنية، أو المدة بالسنوات، وإذا كانت بالأشهر = عدد الأشهر ÷ ١٢

مثال (١): استثمر يامن مبلغ ١٠٠٠ دينار لمدة ٣ سنوات في أحد البنوك بمعدل فائدة سنوي قدره ٧٪ ، أجد مقدار الفائدة البسيطة، وجملة المبلغ.

الحل: المعطيات: م = ١٠٠٠ دينار ، ع = ٧٪ ، ن = ٣ سنوات.

ف = م × ع × ن = ١٠٠٠ × ٠,٠٧ × ٣ = ٢١٠ دنانير.

جملة المبلغ = المبلغ الأصلي + الفائدة البسيطة

جملة المبلغ = ١٠٠٠ + ٢١٠ = ١٢١٠ دنانير.

---

١ تم التعارف على كتابة معدل الفائدة في مقدار العائد لكل ١٠٠ وحدة من النقود / لكل وحدة زمن لذلك فإن معدل الفائدة يكتب كنسبة مئوية

مثال (٢): إذا كان العائد (الفائدة) من استثمار مبلغ تم استثماره لمدة ٤ سنوات هو ٤٨٠ ديناراً. أجد أصل المبلغ المستثمر، علماً بأن معدل الفائدة هو ٨٪ سنوياً.

الحل: المعطيات: **ن** = ٤ سنوات ، **ف** = ٤٨٠ ديناراً ، ع = ٨٪

ف = م × ع × **ن**

٤٨٠ = م × ٠,٠٨ × ٤

م = $\frac{٤٨٠}{٠,٣٢}$ = ١٥٠٠ دينار

نشاط ٣

أكمل الفراغ في الجدول الآتي:

	المبلغ	معدل الفائدة البسيطة	الزمن بالسنوات	الفائدة	الجملة
١	٤٠٠٠	١٢٪	٣		
٢		٦٪	٤	٣٦٠٠	
٣	٥٠٠٠	٧٪			٨٥٠٠
٤			٥		
المجموع	٣٠٠٠٠			٩٢٩٠	

أنواع الفائدة البسيطة:

إذا كانت مدة الإيداع بالأيام، نميز بين طريقتين لحساب الفائدة البسيطة:

١) الفائدة التجارية : (**ف**): حيث تعتبر عدد أيام السنة في الفائدة التجارية ٣٦٠ يوماً،

أي **ن** = المدة بالأيام ÷ ٣٦٠

٢) الفائدة الصحيحة ($\overline{\text{ف}}$): حيث تعتبر عدد أيام السنة في الفائدة الصحيحة [١] ٣٦٥ يوماً

أي **ن** = المدة بالأيام ÷ ٣٦٥

١ السنة الكبيسة عدد أيامها ٣٦٦ يوماً (سنقتصر في دراستنا على السنة العادية فقط).

مثال (٣): أجد قيمة كل من الفائدة التجارية والصحيحة المترتبة على مبلغ قدره ٢٠٠٠٠ دينار، استثمر بمعدل فائدة بسيطة ٦٪ سنوياً لمدة ٩٠ يوماً، علماً بأن السنة عادية. ماذا نستنتج ؟

الحل: الفائدة التجارية:

$$\text{ف} = \text{م} \times \text{ع} \times \text{ن}$$

$$\text{ف} = \text{٢٠٠٠٠} \times \text{٠,٠٦} \times \frac{\text{٩٠}}{\text{٣٦٠}} = \text{٣٠٠ دينار.}$$

الفائدة الصحيحة:

$$\overline{\text{ف}} = \text{م} \times \text{ع} \times \text{ن}$$

$$\overline{\text{ف}} = \text{٢٠٠٠٠} \times \text{٠,٠٦} \times \frac{\text{٩٠}}{\text{٣٦٥}} = \text{٢٩٥,٩ ديناراً.}$$

ألاحظ أن الفائدة الصحيحة اقل من الفائدة التجارية.

لذلك تستخدم البنوك الفائدة التجارية عند منح القروض، والفائدة الصحيحة عند فتح حسابات التوفير.

ملاحظة: يكتفى بالحل لأقرب ثلاث منازل عشرية.

٥ - ١ تمارين ومسائل

س١: أودعت عبير مبلغاً قدره ١٣٨٠٠ دينار في بنك لمدة ١٠ أشهر، بمعدل فائدة بسيطة ٤٪ سنوياً، أجد:

أ) مقدار الفائدة.

ب) الجملة البسيطة للمبلغ في نهاية المدة.

س٢: أجد مقدار المبلغ الذي يجب إيداعه في بنك لمدة ٨ سنوات، للحصول على جملة مقدارها ٥٦٠٠ دينار بمعدل فائدة بسيطة ٥٪.

س٣: أحسب عدد الأشهر اللازمة لاستثمار مبلغ قدره ٢٤٠٠٠ دينار، بمعدل فائدة بسيطة ٨٪ سنوياً ليعطي فائدة قدرها ٨٠٠ دينار.

س٤: اقترض تاجر من البنك مبلغ ١٢٠٠٠ دينار، بمعدل فائدة بسيطة مقدارها ١١٪ لمدة ٣ سنوات أحسب جملة المبلغ.

س٥: قامت فيروز باستثمار مبلغ ١٢٠٠٠ دينار، بمعدل فائدة بسيطة ٣٪ سنوياً من أصل المبلغ المستثمر. أجد:

أ) الفائدة التي تحصل عليها فيروز في ٣ أشهر.

ب) الفترة الزمنية اللازمة للحصول على عوائد قدرها ٢١٦٠ ديناراً.

س٦: أودع جورج مبلغ ٨٠٠٠ دينار لمدة ٢٤٠ يوماً، بمعدل فائدة بسيطة ١٢٪ سنوياً. أحسب الفائدة التجارية والصحيحة.

س٧: حصلت لبنى على فوائد من البنك قيمتها ٤٢٠ ديناراً مقابل استثمارها مبلغ ١٢٠٠٠ دينار في حساب الربح البسيط لمدة ٧ شهور. أجد معدل الفائدة البسيطة التي يمنحها البنك للبنى.

الفائـــدة المركبـــــة

(Compound Interest)

نشاط ١

تتنافس البنوك في جذب الإيداعات المالية للأفراد والشركات، وذلك للربح وزيادة رأس المال.

فاز فادي في إحدى المسابقات، وحصل على مبلغ ١٠٠٠٠ دينار، وذهب إلى أحد البنوك لاستثمار هذا المبلغ لمدة ٣ سنوات، فأخبره موظف البنك بأن لهذا المبلغ ربحين مختلفين في نهاية الثلاث سنوات، بفائدة واحدة ٦٪ تعجب فادي وتساءل عن الفرق في الربح:

١- ربح فادي بعد سنة ٦٠٠ دينار بحساب الربح البسيط.

٢- ربح فادي بعد ٣ سنوات .... بحساب الربح البسيط.

٣- ربح فادي بعد سنتين ١٢٠٠ دينار بحساب الربح البسيط، و ١٢٣٦ ديناراً بربح من نوع آخر. كم الفرق بين الربح في حسابين مختلفين...................

مفهوم الفائدة المركبة:

استعرضنا في الصف الحادي عشر مفهوم الفائدة المركبة وكيفية حسابها على الاستثمارات طويلة الآجال بشكل عام، وسوف نتعرف في هذا الدرس على تطبيقاتها الأخرى، وأنواعها.

مفهوم الفائدة المركبة: هي المردود المالي الناتج من استثمار مبلغ من المال خلال مدة زمنية محددة بمعدل فائدة معين، بحيث يضاف هذا المردود إلى المبلغ الأصلي في نهاية كل دورة زمنية، وتحسب جملة المبلغ بالفائدة المركبة حسب العلاقة:

$$جـ = أ\,(١+ع)^{ن}$$

$$\textbf{ف} = جـ - أ$$

أ: المبلغ الأصلي ، ن: المدة الزمنية ، ع: المعدل ، **ف**: الفائدة المركبة ، جـ: جملة المبلغ.

مثال(١): أودع مبلغ ٣٠٠٠٠ دينار في بنك لمدة ٧ سنوات بمعدل فائدة مركبة ٦٪ سنوياً. أجد:

١) جملة المبلغ. ٢) مقدار الفائدة المركبة.

جـ = أ (١+ع)^{ن}

جـ = ٣٠٠٠ (١+ ٠,٠٦)^{٧} = ٣٠٠٠ × ١,٥٠٣ = ٤٥١٠,٨,٩ دينار

ف = جـ - أ

ف = ٤٥١٠٨,٩ - ٣٠٠٠٠ = ١٥١٠٨,٩ دنانير.

مثال(٢): ما المبلغ الذي استثمره فادي لمدة ٦ سنوات، في بنك يعطي فائدة مركبة بمعدل ٩٪ سنوياً، فأعطى مبلغاً جملته ١٦٧٧١٠ دنانير.

جـ = أ (١+ع)^{ن}

١٦٧٧١٠ = أ (١,٠٩)^{٦}

أ = $\frac{\text{١٦٧٧١٠}}{(\text{١,٠٩})^{\text{٦}}}$ = ٩٩٩٩٩,٩٩ ≈ ١٠٠٠٠٠ دينار

مثال(٣): يوفر نزار مبلغ ١٠٠٠ دينار في أحد البنوك، بفائدة مركبة ٦٪ سنوياً، إذا بلغت جملة المبلغ ٢٤٠٠ دينار. أجد الفترة الزمنية التي استثمر فيها المبلغ.

جـ = أ (١+ع)^{ن}

٢٤٠٠ = ١٠٠٠(١,٠٦)^{ن} ومنها ٢,٤ = (١,٠٦)^{ن}

وباستخدام الآلة الحاسبة العلمية نأخذ لوغاريتم الطرفين:

لـو٢,٤ = **لـو**(١,٠٦)^{ن} ومنها ن = $\frac{\text{لـو ٢,٤}}{\text{لـو ١,٠٦}}$ = ١٥,٠٢سنة

إضافة الفائدة أكثر من مرة في العام:

عند إضافة الفائدة أكثر من مرة في العام، يكون قانون الجملة المستخدم في هذه الحالة، هو:

جـ = أ (١+$\frac{\text{ع}}{\text{ر}}$)$^{\text{ن ر}}$، حيث ر: عدد مرات إضافة الفائدة

مثال (٤): أحسب رأس المال الناتج من توظيف مبلغ ٣٠٠٠ دينار في بنك يعطي فائدة مركبة معدلها ٨٪ سنوياً لمدة ٩ سنوات، وتضاف الفائدة مرتين في العام، ثم أحسب الفائدة المركبة.

الحل: جـ = أ (١+$\frac{\text{ع}}{\text{ر}}$)$^{\text{ن ر}}$

جـ = ٣٠٠٠ (١+ $\frac{\text{٠,٠٨}}{\text{٢}}$)$^{\text{٩×٢}}$ = ٣٠٠٠ (١,٠٤)$^{\text{١٨}}$ = ٦٠٧٧,٤٥ ديناراً.

الفائدة المركبة = جـ - أ = ٦٠٧٧,٤٥ - ٣٠٠٠ = ٣٠٧٧,٤٥ ديناراً.

نشاط ٢

أكمل الفراغ في الجدول الآتي:

	المبلغ	المعدل	المدة بالسنوات	الجملة	الفائدة
أ	٢٠٠٠٠	٤٪ سنوياً		٢٩٦٠٤ ,٨٨	
ب		٧٪ كل ٦ شهور	٦,٥ سنة	٣٦١٤٧,٦٨	٢١١٤٧,٦٨
ج	٨٠٠٠	١١,٥٪ سنوياً		١٩١١١,٢٤	
د	١٠٠٠٠	٣,٧٪ كل ٣ شهور			١٠٦٨١,١٧

٥ - ٢ تمارين ومسائل

س١: أودعت جمعية الأمل للمكفوفين ٨٠٠٠ دينار في بنك، بحساب فائدة مركبة معدلها السنوي ٩٪ أجد جملة المبلغ بعد ٦ سنوات.

س٢: أودعت سعاد مبلغ ٥٠٠٠ دينار في البنك، بحساب فائدة مركبة معدلها ٧٫٥٪ سنوياً. أجد عدد السنوات التي تلزم حتى تصبح جملة المبلغ ٧١٧٨٫١٤٦٦ ديناراً .

س٣: أودع غسان ٤٠٠٠٠ دينار في بنك بفائدة مركبة بمعدل ما وفي نهاية ٨ سنوات بلغت الفوائد المستحقة له ١٥٦٥٧,٨٥ ديناراً. أجد معدل الفائدة المركبة السنوي.

س٤: أحسب رأس المال الناتج من توظيف مبلغ ١٥٠٠٠ دينار في بنك، يعطي فائدة مركبة معدلها ٧٪ سنوياً لمدة ٥ سنوات، وتضاف الفائدة مرتين في العام، ثم أحسب الفائدة المركبة.

س٥: اقترض ماجد مبلغ ٨٠٠٠ دينار من البنك بمعدل فائدة مركبة ٨٪ سنوياً، وبعد مدة زمنية كان المبلغ المطلوب منه ١٤٨٠٧,٤٤ دنانير، أجد مدة الاستثمار لهذا المبلغ.

س٦: أودع رامي مبلغ ٥٠٠٠ دينار في بنك بمعدل فائدة مركبة ١٢ ٪ سنوياً ولمدة ٣ سنوات، فإذا علمت أن الفوائد تضاف كل ٣ شهور. أجد جملة الوديعة.

ورقة عمل

س١: إذا علمت أن $\text{ق}'(\text{س}) = ٤\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٢\text{س}$، ق(٠) = ٣ أجد ق(١).

س٢: إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة $\text{ق}'(\text{س}) = ٣ - ٢\text{س}$ ما قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن منحنى ق(س) يمر بالنقطة (١، ٦).

س٣: إذا كان $\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\, \text{ءس} = ٧$ ، $\int_{١}^{٣} \text{هـ}(\text{س})\, \text{ءس} = -٤$ ، ما قيمة $\int_{٣}^{١} (٢\text{ق}(\text{س}) - ٥\text{هـ}(\text{س}) + ٢)\, \text{ءس}$ ؟

س٤: أودعت فداء مبلغ ٥٠٠٠ دينار في البنك بمعدل فائدة مركبة ١٢٪ سنوياً، أحسب مبلغ الفائدة المستحقة لها بعد ٤ سنوات، إذا كانت الفوائد تضاف كل شهر؟

س٥: أجد المبلغ الذي تصبح جملته ٧١٧٦٫٨٨ ديناراً في نهاية ٣ سنوات، بمعدل فائدة مركبة ٦٪ سنوياً تضاف كل شهرين.

نموذج اختبار

س١: أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١) إذا كان $\text{ق(س)} = \int (\text{٢س} + \text{١})\, \text{ءس}$ فما قيمة $\text{ق}^{/}(\text{٢})$؟

أ) صفر　　ب) ٢　　جـ) ٥　　د) ٦

٢) ما الاقتران الذي يمثل اقتراناً أصلياً للمشتقة $\text{ق}^{/}\text{(س)} = \text{٤س}^{\text{٢}} + \text{٦س} + \text{٢}$ ؟

أ) $\text{ق(س)} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}\text{س}^{\text{٣}} + \text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{١}$

ب) $\text{ق(س)} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}\text{س}^{\text{٣}} + \text{٦س}^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{١}$

جـ) $\text{ق(س)} = \text{٨س} + \text{٦}$

د) $\text{ق(س)} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}\text{س}^{\text{٣}} + \text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٢}$

٣) إذا كان $\int \text{ق}^{/}\text{(س)}\, \text{ءس} = \text{٣س} - \text{٤س}^{\text{٢}} + \text{٢}$، ما قيمة $\text{ق}^{/}(\text{١})$ ؟

أ) -٨　　ب) -٥　　جـ) ١　　د) صفر

٤) ما هو $\int \text{س}\, \sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٢}}}\, \text{ءس}$؟

أ) $\text{س}^{\frac{\text{٥}}{\text{٣}}} + \text{جـ}$　　ب) $\frac{\text{٣}}{\text{٥}}\text{س}^{\frac{\text{٥}}{\text{٣}}} + \text{جـ}$　　جـ) $\text{س}^{\frac{\text{٨}}{\text{٣}}} + \text{جـ}$　　د) $\frac{\text{٣}}{\text{٨}}\text{س}^{\frac{\text{٨}}{\text{٣}}} + \text{جـ}$

٥) إذا كان $\int_{\text{٢}}^{\text{٥}} \text{ق}^{/}\text{(س)}\, \text{ءس} = \text{١٢}$، وكان ق(٥) = ٢ق(٢)، ما قيمة ق(٢) ؟

أ) ١٢　　ب) ٥　　جـ) ٤　　د) ٢

٦) إذا كان $\text{هـ(س)} = \int_{\text{٠}}^{\text{٣}} (\text{٢س} + \text{٣س}^{\text{٢}} + \text{١})\, \text{ءس}$، ما قيمة $\text{هـ}^{/}(\text{٢})$؟

أ) صفر　　ب) ٣　　جـ) ٨　　د) ١٥

٧) إذا استثمر مبلغ قدره ٨٢٠٠٠ دينار، بمعدل ٥٪ سنوياً، فما الفائدة البسيطة بعد ٦ سنوات:

أ) ٢٤٢٠٠　　ب) ٢٤٩٠٠　　جـ) ٢٤١٠٠　　د) ٢٤٦٠٠

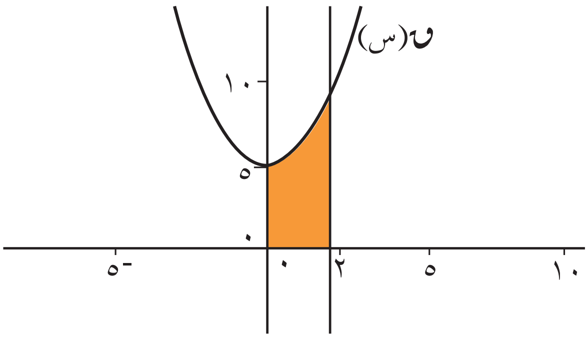
٨) استثمر مبلغ قدره ٥٠٠٠ دينار بمعدل ٨٪ سنوياً، فما الجملة البسيطة للمبلغ بعد ١٠ سنوات:

أ) ٩٠٠٠　　ب) ٥٤٠٠　　جـ) ٩٤٠٠　　د) ٩٥٠٠

٩) إذا بلغت الفائدة البسيطة لمبلغ ٨٠٠ دينار ٨٠ ديناراً، فإن معدل الفائدة يساوي:

أ) ٥٪　　ب) ١٨٪　　جـ) ١٠٪　　د) ١٥٪

س٢: أجد $\int (\text{٢س} + ١) \sqrt[٣]{(\text{س}^{٢} + \text{س} + ٤)^{٢}}\; \text{ءس}$.



س٣: أجد المساحة المحصورة بين منحنى
ق(س) = $\text{س}^{٢}$ + ٥، ومحور السينات
والمستقيمين س = ٠ ، س = ٢

س٤: اقترضت رتيل من بنك مبلغ ٨٠٠٠ دينار لمدة ١٢٠ يوماً بمعدل ١٢٪ سنوياً. أحسب الفائدة البسيطة التجارية والصحيحة.

س٥: حصل أحد التجار من البنك على فوائد قيمتها ٨٤٠ ديناراً مقابل مبلغ ٢٤٠٠٠ دينار، أودعه في البنك لمدة سنتين أحسب معدل الفائدة البسيطة التي حسبها البنك؟