١١

بسم الله الرحمن الرحيم

دولــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيـــــات

الفرع العلمي والصناعي

الرزمة التعليمية
٢٠٢٤

دولــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
فاكس 2983250-2-970+ | هاتف 2983280-2-970+

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 - رام الله - فلسطين
pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

المحتويات

النتاجات

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الرزمة التعليمية المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المتجهات والعمليات عليها في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. تحديد النقاط في الفراغ وإيجاد المسافة بين نقطتين وإحداثيات المنتصف بين نقطتين.
٢. إجراء العمليات على المتّجهات في المستوى وطرق تمثيلها.
٣. تطبيقات فيزيائية وحياتية على المتجهات.
٤. توظيف المتجهات في تطبيقات فيزيائية وهندسية وحياتية.
٥. تنمية القدرة على التعبير والدقة في استخدام المصطلحات الهندسية.
٦. التعرف إلى أنواع العبارات الرياضية، وأدوات الربط بينها.
٧. التعرف إلى جداول الصواب، وتوظيفها في إثبات تكافو العبارات.
٨. حلّ نظام مكون من ثلاث معادلات خطّيّة.
٩. حلّ نظام من معادلتين إحداهما خطّيّة، والأخرى تربيعيّة.
١٠. حلّ نظام من معادلتين تربيعيتين.
١١. حلّ معادلات أسّيّة، ولوغاريتمية.
١٢. حلّ معادلات تتضمن القيمة المطلقة.
١٣. حلّ نظام من متباينتين خطّيتين بمتغيرين.
١٤. التعرف الى مفهوم المتتالية ومفهوم المتسلسلة .
١٥. التعرف إلى المتتالية الحسابية والمتسلسلة الحسابية .
١٦. التعرف إلى المتتالية الهندسية والمتسلسلة الهندسية.
١٧. استنتاج الحدّ العـــام لكل من المتتاليتين الحسابية والهندسية.
١٨. إيجاد مجموع (ن) من حدود المتتـاليتين الحسابية والهندسية.
١٩. توظيف قوانين المتتاليات والمتسلسلات في مسائل حياتية.
٢٠. التعرف على النهاية من جهة اليسار، والنهاية من جهة اليمين.
٢١. إيجاد نهايات الاقتران متعدد القاعدة عند نقاط التحول.
٢٢. إيجاد نهايات الاقترانات الكسرية .
٢٣. التعرف على نهايات الاقترانات الدائرية.
٢٤. التعرف على اتصال اقتران عند نقطة.
٢٥. البحث في اتصال اقتران على مجاله.
٢٦. تطبيق نظريات الاتصال على اقترانات مختلفة.

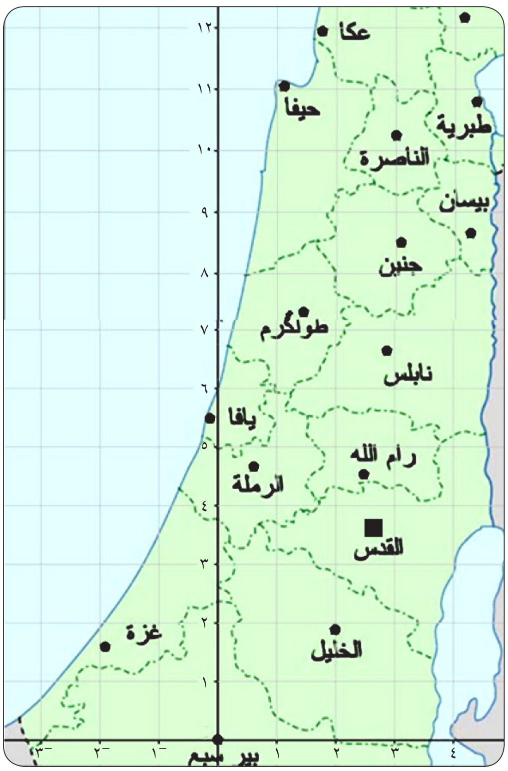
١ - ١ الإحداثيات الدّيكارتية في الفراغ ثلاثي الأبعاد Cartesian Coordinates in Space

أتذكر أنّ : المسافة بين النقطتين أ $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، ب $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$

$$\text{أب} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$$

وإحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة أب = $\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} \right)$

نشاط ١: بالاعتماد على الخريطة الآتية إذا مثلنا موقع مدينة رام الله بالنقطة أ (٢,٥ ، ٤,٥) وموقع مدينة غزة بالنقطة ب (⁻٢ ، ١,٥). أجد المسافة بين المدينتين. (ملاحظة : كل وحدة تعادل ١٠كم والإحداثيات تقريبية).



أب= ______________________

لاحظ أنّ إحداثيات موقع مدينة نابلس (٣ ، ٦,٦)

وإحداثيات موقع مدينة الناصرة (٣ ، ١٠,٢)

بالاعتماد على قانون إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة، أجد إحداثيات موقع مدينة جنين والتي تقع تقريبا في منتصف المسافة بين نابلس والناصرة.

إحداثيات موقع مدينة جنين =

(____________ ، ____________)

أقارن الإجابة بالرجوع إلى الخريطة.

(____________ ، ____________)

نشاط ٢: إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث نقاط في الفراغ ، وكانت جـ تقع في منتصف $\overline{\text{أب}}$ بحيث أن
أ(١٢، $^-$٤ ، ٨) ، جـ($^-$٤ ، ١ ، ٥) أجد:

١ إحداثيات ب   ٢ طول $\overline{\text{أب}}$

الحل : ١ نفرض إحداثيات ب (س ، ص ، ع)

فيكون $\frac{\text{س} + ١٢}{٢} = {}^-٤$ ومنها س = ______

وبنفس الطريقة ص= ______ و ع = ______

٢ أب = $\sqrt{\text{\_\_\_\_\_\_} + \text{\_\_\_\_\_\_} + \text{\_\_\_\_\_\_}}$

مثال ١ : إذا كانت أ(٢س ، ٢س ، ٥) ، ب($^-$١ ، $^-$٢، ٠) وكان أب= ٥ $\sqrt{٢}$ أجد قيم س.

الحل : $(\text{أب})^٢ = (٢\text{س} + ١)^٢ + (٢\text{س} + ٢)^٢ + ٢٥ = ٥٠$ (لماذا ؟)

ومنها ينتج $٤\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ١ + ٤\text{س}^٢ + ٨\text{س} + ٤ + ٢٥ = ٥٠$

$٨\text{س}^٢ + ١٢\text{س} - ٢٠ = ٠$

ومنها ينتج : $٢\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ٥ = ٠$

ومنها $(٢\text{س} + ٥)(\text{س} - ١) = ٠$

إذن $\text{س} = \frac{-٥}{٢} ، ١$

تمارين ومسائل ١-١

١ أجد النقاط الآتية في الفراغ، ثم أجد بعد النقطة جـ عن المستويات س ص ، س ع ، ص ع

١ أ (٢ ، ٣ ، ٠)

٢ ب (٠ ، ٠ ، $^-$٢)

٣ جـ ($^-$٣ ، ٢ ، ٤).

٢ أ ب جـ مثلث فيه أ (١ ، ٣ ، ٢) ، جـ ($^-$١ ، ٣ ، ٢)

فإذا كانت النقطة د (س ، $^-$٢ ، س - ٢) هي إحداثيات منتصف $\overline{\text{أب}}$

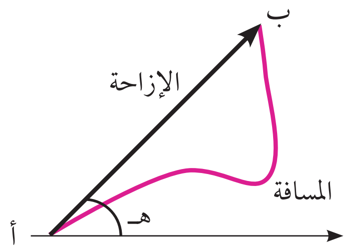
وكان (جـ د) = $\sqrt{٤٢}$ وحدة أجد إحداثيات النقطة ب حيث س > ٠

١ - ٢ المتجهات في المستوى Vectors in Plane

أتذكّر أن: المسافة المقطوعة هي مجموع المسافات التي يسيرها الجسم من نقطة البداية إلى نقطة النهاية أما الإزاحة فهي كمية متجهه تحدد بعنصرين هما:

١ طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة البداية ونقطة النهاية.

٢ الزاوية التي تصنعها القطعة المستقيمة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (اتجاه الحركة).



في الشكل الآتي المسافة المقطوعة هي طول المسار باللون الأحمر، أما الإزاحة فهي تحدد بطول القطعة أب والتي تصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها هـ واتجاه الحركة هو من أ إلى ب.

أتعلم: تقسم الكميات إلى نوعين كميات متجهة تتحدد بالمقدار والاتجاه، وكميات قياسية (غير متجهة) تحدد بالمقدار فقط.

المتجه يحدد بالمقدار والاتجاه ويمكن تمثيله هندسيا في المستوى بقطعة مستقيمة موجهة اتجاهها من نقطة البداية إلى نقطة النهاية وطولها يمثل مقدار المتجه، ويرمز للمتجه بالرمز $\overleftarrow{\text{أب}}$، بحيث تكون نقطة البداية هي أ (أ$_١$ ، أ$_٢$) ونقطة النهاية هي ب(ب$_١$ ، ب$_٢$) أو بالرمز $\overleftarrow{\text{م}}$ ، ويرمز لطول المتجه بالرمز $|\overleftarrow{\text{أب}}|$.

ولتسهيل تمثيل المتجهات وإجراء العمليات عليها فإنّنا نمثل المتجه في ما يسمى الوضع القياسي، بحيث نجعل نقطة البداية (٠ ، ٠) ونقطة النهاية جـ (ب$_١$ – أ$_١$ ، ب$_٢$ – أ$_٢$)

ويكون $|\overleftarrow{\text{أب}}| = \sqrt{(\text{ب}_١ - \text{أ}_١)^٢ + (\text{ب}_٢ - \text{أ}_٢)^٢}$

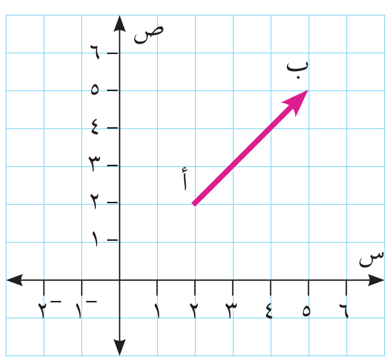
نشاط ١: في الشكل المجاور إحداثيات نقطة البداية هي ________

إحداثيات نقطة النهاية هي ____________

طول المتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$ = ____________

قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = ___________

أمثل المتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$ في الوضع القياسي



تعريف: يتساوى المتجهان $\overleftarrow{م_{١}}$ ، $\overleftarrow{م_{٢}}$ إذا كان لهما نفس المقدار ونفس الاتجاه أي أنهما يمثلان بنفس الزوج المرتب في الوضع القياسي.

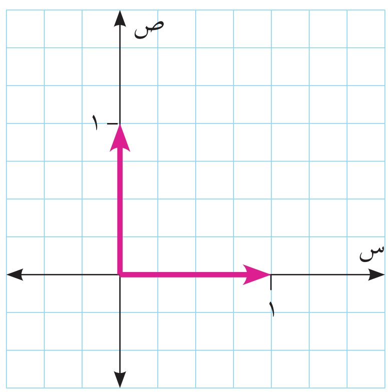
متجهات خاصة:

١ المتجه الصفري: وهو المتجه الذي طوله صفر وحدة واتجاهه غير معين ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{٠}$.

٢ متجه الوحدة: وهو المتجه الذي طوله وحدة واحدة.

٣ متجها الوحدة الأساسيان: $\overleftarrow{و_{١}}$ وهو متجه الوحدة السّيني، ويمثل بالزوج المرتب (١ ، ٠).

$\overleftarrow{و_{٢}}$ وهو متجه الوحدة الصّادي، ويمثل بالزوج المرتب (٠ ، ١).



مثال ١ : إذا كانت أ (⁻٥ ، ٢) ، ب (١ ، ٣) ، جـ (١ ، ٤)

١ أمثّل $\overleftarrow{أب}$ في الوضع القياسي.

٢ أكتب $\overleftarrow{أب}$ بدلالة متجهي الوحدة.

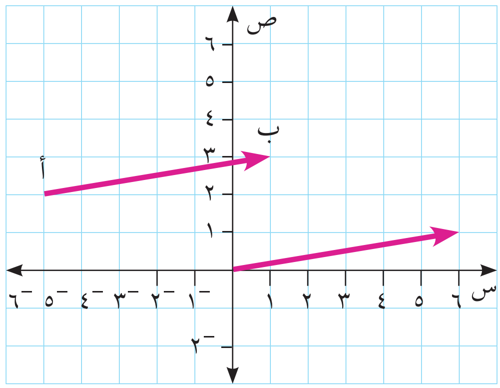
٣ أجد قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\overleftarrow{أب}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٤ أجد إحداثيات النقطة د بحيث إنّ $\overleftarrow{أب}$ = $\overleftarrow{دجـ}$.

الحل :

١ الزوج المرتب الذي يمثل $\overleftarrow{أب}$ = ب − أ = (١ ، ٣) − (⁻٥ ، ٢) = (٦ ، ١)

٢ $\overleftarrow{أب}$ = ٦ $\overleftarrow{و_{١}}$ + $\overleftarrow{و_{٢}}$



٣ ظاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = $\frac{١}{٦}$

ومنها هـ تساوي تقريبا ١٠°

٤ بما أنّ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = $\overleftarrow{\text{د جـ}}$

إذن: ب − أ = جـ − د

(٦ ، ١) = (١ ، ٤) − د

ومنها د (−٥ ، ٣)

تمارينُ ومسائلُ ١-٢:

١ إذا كانت أ (−٢ ، ٣) ، ب (٢ ، ٥) ، جـ (٤ ، ٣) ثلاث نقاط في المستوى

أ أمثل المتجهين $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين

ب أجد طول كل من: $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$.

٢ إذا كان $\overleftarrow{\text{م}}_١$ = $\overleftarrow{\text{م}}_٢$ وكان $\overleftarrow{\text{م}}_١$ = (٢س + ٣ ، ص − ٢) ، $\overleftarrow{\text{م}}_٢$ = (ص ، س + ٣)

أجد قيم س و ص.

١ - ٣ العمليات على المتجهات Operations on Vectors

أولاً- جمع المتجهات جبرياً:

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{١} ، \text{أ}_{٢})$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{١} ، \text{ب}_{٢})$ متجهين في الوضع القياسي، فإنّ حاصل جمع المتجهين هو المتجه $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_{١} + \text{ب}_{١} ، \text{أ}_{٢} + \text{ب}_{٢})$.

مثال ١ : إذا كانت أ (١ ، ٣) ، ب(−١ ، ٢) ، جـ(٢ ، −١) أجد بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

١ $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}}$

٢ $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{جـب}}$

الحل :

١ $\overleftarrow{\text{أب}} = \text{ب} - \text{أ} = (-١ ، ٢) - (١ ، ٣) = (-٢ ، -١)$

$\overleftarrow{\text{ب جـ}} = \text{جـ} - \text{ب} = (٢ ، -١) - (-١ ، ٢) = (٣ ، -٣)$

$\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} = (-٢ ، -١) + (٣ ، -٣) = (١ ، -٤) = \overleftarrow{\text{و}_{١}} + -٤ \overleftarrow{\text{و}_{٢}}$

٢ $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{جـب}} = (١ ، ٣) + (-٣ ، ٣) = (-٢ ، ٦) = -٢ \overleftarrow{\text{و}_{١}} + ٦ \overleftarrow{\text{و}_{٢}}$

ثانياً - ضرب المتجه بعدد حقيقي

تعريف: إذا كان $\overleftarrow{م}$ متجهاً غير صفري ، وكان أ $\in$ ح*
فإنّ أ $\overleftarrow{م}$ متجه يوازي $\overleftarrow{م}$ طوله = | أ . $\overleftarrow{م}$ | = | أ | | $\overleftarrow{م}$ |
ويكون في نفس اتجاه $\overleftarrow{م}$ إذا كانت أ موجبة وعكس اتجاه $\overleftarrow{م}$ إذا كانت أ سالبة.

مثال ٢ : إذا كان $\overleftarrow{م}$ = (٢ ، ٤) أجد كلاً من المتجهات الآتية :

① ٢ $\overleftarrow{م}$ ، $\frac{-١}{٢}$ $\overleftarrow{م}$ ② أجد | ٢ $\overleftarrow{م}$ | ، | $\frac{-١}{٢}$ $\overleftarrow{م}$ |

الحل : ① ٢ $\overleftarrow{م}$ = ٢(٢ ، ٤) = (٤ ، ٨)

$\frac{-١}{٢}$ $\overleftarrow{م}$ = $\frac{-١}{٢}$ (٢ ، ٤) = (-١ ، -٢)

② | ٢ $\overleftarrow{م}$ | = $\sqrt{١٦ + ٦٤}$ = $\sqrt{٨٠}$

| $\frac{-١}{٢}$ $\overleftarrow{م}$ | = $\sqrt{١ + ٤}$ = $\sqrt{٥}$

تعريف: إذا كان $\overleftarrow{م}$ متجهاً غير صفري، فإنّ متجه الوحدة باتجاه $\overleftarrow{م}$ هو $\hat{م}$ حيث $\hat{م}$ = $\frac{\overleftarrow{م}}{|\overleftarrow{م}|}$

مثال ٣ : إذا كان $\overleftarrow{م}$ = -٣ $\overleftarrow{و_٢}$ + ٤ $\overleftarrow{و_١}$ أجد متجه وحدة باتجاه $\overleftarrow{م}$

الحل : | $\overleftarrow{م}$ | = ٥ وحدات (لماذا؟)

متجه الوحدة باتجاه $\overleftarrow{م}$ = $\hat{م}$ = $\frac{\overleftarrow{م}}{|\overleftarrow{م}|}$ = ($\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{-٣}{٥}$) (تحقق أن طوله = ١ وحدة)

نشاط ١: إذا كان $\overleftarrow{م}_{١} = ٣\,\overleftarrow{و}_{١} - ٤\,\overleftarrow{و}_{٢}$ وكان أ(٢ ، −١) ، ب(٦ ، ٢) أجد ما يلي:

١ $\overleftarrow{أب}$ في الوضع القياسي = ____________

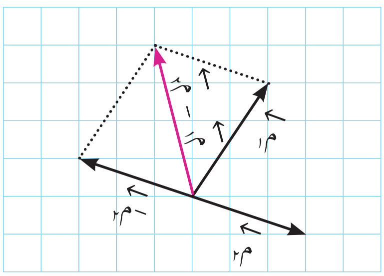
٢ $\overleftarrow{م}_{١} + \overleftarrow{أب} =$ ____________

٣ $\dfrac{\overleftarrow{م}_{١}}{|\overleftarrow{م}_{١}|} =$ ____________

ثالثاً- طرح المتجهات:

لطرح متجهين فإنّنا نستخدم الخاصية الآتية:

$$\overleftarrow{م}_{١} - \overleftarrow{م}_{٢} = \overleftarrow{م}_{١} + (-\overleftarrow{م}_{٢})$$



الشكل المجاور يوضح عملية طرح متجهين.

نشاط ٢: إذا كان $\overleftarrow{م}_{١} = (-٢ ، ٥)$ ، $\overleftarrow{م}_{٢} = (٣ ، ٤)$ فإنّ $\overleftarrow{م}_{٢} - ٢\,\overleftarrow{م}_{١} =$ (______ ، ______)

الخواصّ الأساسية للعمليات على المتجهات:

إذا كان $\overleftarrow{م}_{١}$ ، $\overleftarrow{م}_{٢}$ ، $\overleftarrow{م}_{٣}$ ثلاثة متجهات في المستوى وكانت أ ، ب ∈ ح فإنّ:

١ $\overleftarrow{م}_{١} + \overleftarrow{م}_{٢} = \overleftarrow{م}_{٢} + \overleftarrow{م}_{١}$ (الخاصية التبديلية)

٢ $(\overleftarrow{م}_{١} + \overleftarrow{م}_{٢}) + \overleftarrow{م}_{٣} = \overleftarrow{م}_{١} + (\overleftarrow{م}_{٢} + \overleftarrow{م}_{٣})$ (الخاصية التجميعية)

٣ $\overleftarrow{م}_{١} + \overleftarrow{٠} = \overleftarrow{٠} + \overleftarrow{م}_{١} = \overleftarrow{م}_{١}$ (العنصر المحايد)

٤ $\overleftarrow{م}_{١} + (-\overleftarrow{م}_{١}) = (-\overleftarrow{م}_{١}) + \overleftarrow{م}_{١} = \overleftarrow{٠}$ (النظير الجمعي)

٥ $أ(\overleftarrow{م}_{١} + \overleftarrow{م}_{٢}) = أ\,\overleftarrow{م}_{١} + أ\,\overleftarrow{م}_{٢}$

٦ $(أ + ب)(\overleftarrow{م}_{١}) = أ\,\overleftarrow{م}_{١} + ب\,\overleftarrow{م}_{١}$

٧ $|أ\,\overleftarrow{م}_{١}| = |أ|\,|\overleftarrow{م}_{١}|$

مثال ٤ : إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (-٢ ، ٤)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (٦ ، ٢)$، أجد المتجه $\overleftarrow{\text{س}}$ الذي يحقق المعادلة الآتية:

$٢ \overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{أ}} = ٣ \overleftarrow{\text{ب}}$

الحل : بإضافة $\overleftarrow{\text{أ}}$ إلى طرفي المعادلة تصبح $٢ \overleftarrow{\text{س}} = ٣ \overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{أ}}$

ثم نضرب المعادلة في $\frac{١}{٢}$ فتصبح $\overleftarrow{\text{س}} = \frac{١}{٢} (٣ \overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{أ}})$

ومنها $\overleftarrow{\text{س}} = (٨ ، ٥)$

تمارينُ ومسائلُ ١-٣

١. إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (-٣ ، ٥)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = ٣ \overleftarrow{\text{و}}_{١} + ٤ \overleftarrow{\text{و}}_{٢}$ ، أكتب $-٥ \overleftarrow{\text{أ}} + ٢ \overleftarrow{\text{ب}}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.

٢. إذا كانت أ(س ، -٢) ، ب(٥ ، س) أجد قيمة/ قيم س التي تجعل طول المتجه $\overleftarrow{\text{أب}} = ٥$ وحدات

٣. أحل المعادلة المتجهية الآتية حيث $\overleftarrow{\text{أ}} = (٣ ، -٥)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (٢ ، -٦)$

$٤ \overleftarrow{\text{س}} - ٢ \overleftarrow{\text{أ}} = ٣ \overleftarrow{\text{ب}}$

٤. إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (-٢ ، ٦)$ أجد:

أ. متجه طوله ٥ وحدات وعكس اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$

ب. متجه طوله ٥ أمثال $\overleftarrow{\text{أ}}$ وبنفس اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$

١ - ٤ ضرب المتجهات Product of Vectors الضرب (القياسي)

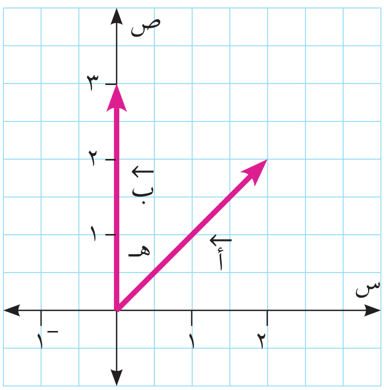
تعريف : إذا كان $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين ، فإنّ الضرب القياسي لهذين المتجهين هو $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}$
حيث $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} = |\overleftarrow{أ}|\,|\overleftarrow{ب}|$ جتا هـ حيث هـ قياس الزاوية الصغرى المحصورة بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ حيث هـ $\in [\cdot ، \pi]$.

مثال ١ : إذا كان $\overleftarrow{أ} = (٢ ، ٢)$، $\overleftarrow{ب} = (\cdot ، ٣)$، أجد $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب}$ باستخدام تعريف الضرب الداخلي للمتجهات.

الحل : بتمثيل المتجهين هندسياً في المستوى ، فإنّ قياس الزاوية المحصورة بين المتجه $\overleftarrow{أ}$ والاتجاه الموجب لمحور السينات يساوي ٤٥° لماذا؟ ومنها ينتج أن: هـ = ٤٥°

$\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} = |\overleftarrow{أ}|\,|\overleftarrow{ب}|$ جتا ٤٥°

$= \sqrt{٨} \times ٣ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٦$



نشاط ١ : ما قيمة ❶ $\overleftarrow{و_١} . \overleftarrow{و_٢}$ ❷ $\overleftarrow{و_٢} . \overleftarrow{و_٢}$ ❸ $\overleftarrow{و_١} . -٢\overleftarrow{و_٢}$

الحل :

١) $\overleftarrow{و_١} . \overleftarrow{و_٢} = |\overleftarrow{و_١}|\,|\overleftarrow{و_٢}|$ جتا ٩٠° = ____________

٢) $\overleftarrow{و_٢} . \overleftarrow{و_٢} =$ ____________

٣) $\overleftarrow{و_١} . -٢\overleftarrow{و_٢} =$ ____________

خصائص الضرب (القياسي) الداخلي:

إذا كان $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{جـ}$ متجهاتٍ غيرَ صفريةٍ و كان د $\in$ ح*، فإنّ

1. $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{أ} = |\overleftarrow{أ}|^{٢}$ لماذا ؟
2. $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{أ}$ (الخاصية التبديلية) لماذا؟
3. $\overleftarrow{أ} \cdot (\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{جـ}) = (\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}) + (\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{جـ})$ (التوزيع من اليمين)
4. $(\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{جـ}) \cdot \overleftarrow{أ} = (\overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{أ}) + (\overleftarrow{جـ} \cdot \overleftarrow{أ})$ (التوزيع من اليسار)
5. د $(\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}) = ($د $\overleftarrow{أ}) \cdot \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{أ} \cdot ($د $\overleftarrow{ب})$ لكل د $\in$ ح*

نظرية : إذا كان $\overleftarrow{أ} = (أ_{١} ، أ_{٢})$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_{١} ، ب_{٢})$ فإنّ $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = أ_{١}ب_{١} + أ_{٢}ب_{٢}$

نتيجة: يكون المتجهان غير الصفريين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}$ = صفرًا

مثال ٤ : أبين أن: $جتا^{٢} هـ_{١} + جتا^{٢} هـ_{٢} + جتا^{٢} هـ_{٣} = ١$

الحل : $جتا^{٢} هـ_{١} + جتا^{٢} هـ_{٢} + جتا^{٢} هـ_{٣} = (\frac{١}{٢})^{٢} + (٠)^{٢} + (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢} = ١$

تمارينُ و مسائلُ ١ - ٤

1. أجد ما يلي :
   - أ) $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}$ علما بأن: $\overleftarrow{أ} = (٥ ، ٣)$ ، $\overleftarrow{ب} = (-١ ، ٢)$
   - ب) $\overleftarrow{و_{١}} \cdot \overleftarrow{و_{٣}}$
2. أجد قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين (١ ، ٤) ، (٣ ، ١٢)
3. أجد قيمة س :

إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (جتاس ، –جاس)، $\overleftarrow{ب}$ = (جتاس ، ١+ جاس)، وكان $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$، س $\in$]٠ ، π[.

١ – ٥ العبارة الرياضية، ونفيها (Mathematical Statement and Contrapositive Statements)

أولاً: العبارة الرياضية

العبارة الرياضية : جملة خبرية (إما أن تكون صائبةً، أو خاطئةً، ولا تكون كليهما).

ولكل عبارة رياضية قيمة صواب: إما صائبة ويرمز لها بالرمز (ص) وإما خاطئة ويرمز لها بالرمز (خ).

مثال ١ : أقرأ ما يأتي، وأبيّن أيّاً منها يمثل عبارة رياضية؟

١ ياسر عرفات أول رئيس لمنظمة التحرير الفلسطينية.

٢ ما أجمل بحر غزة !

٣ الأرض تدور حول الشمس.

٤ ما ارتفاع جبل جرزيم؟

٥ زويل عالم كيمياء مصري.

٦ ١ عدد أولي.

٧ فدوى طوقان شاعرة فلسطينية.

٨ استمع لنصيحتي.

الحل :

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
عبارة	ليست عبارة	عبارة	ليست عبارة	عبارة	عبارة	عبارة	ليست عبارة

نشاط ١: أكتب قيم صواب العبارات الرياضية الواردة في الجدول الآتي*:

الرقم	العبارة الرياضية	قيمة الصواب
١	لُقِّب الخليفة عمر بن الخطاب رضي الله عنه بالفاروق	ص
٢	أعلى جبل في الوطن العربي هو جبل النبي شعيب في اليمن	
٣	نظم سميح القاسم قصيدة الأرض	
٤	مارك زوكربيرج مؤسس موقع فيس بوك	
٥	يقبل العدد ٢٢٥ القسمة على ٣ دون باقٍ	ص
٦	ق(٢) هو أحد أصفار الاقتران ق(س) = س^{٣} – ٨	خ

ولتسهيل التعامل مع العبارات الرياضية، فإنه بإمكاننا إعطاء العبارة الرياضية أحد الرموز الهجائية، فيمكن أن نرمز للعبارة الرياضية «النيل أطول نهر في العالم» بالرمز «ف» ونكتب ف: النيل أطول نهر في العالم.

* يمكن الحصول على بعض المعلومات بالرجوع إلى الشبكة العنكبوتية

ثانياً: نفي العبارة الرياضية

يقول الشاعر: وليــس عتــابُ النــاسِ للمــرءِ نافعــاً إذا لم يكــن للمــرءِ لُــبٌّ يعاتبــه

تتعدد في اللغة العربية أدوات النفي، مثل: ليس، لا، لم وغيرها، وبهذه الأدوات يمكن أن ننفي العبارة الرياضية، فنفي العبارة الرياضية ف: النيل أطول نهر في العالم هو: النيل ليس أطول نهر في العالم، وتكتب رمزياً ~ ف: ونفي العبارة الرياضية ن: **ط** $\subseteq$ **ص**، هو ~ ن : **ط** $\nsubseteq$ **ص**.

أفكر وأناقش: ما العلاقة بين قيمة صواب العبارة الرياضية ف، وقيمة صواب نفيها؟

مثال ٢ : أنفي كل عبارة من العبارات الرياضية الآتية، دون استخدام «ليس صحيحاً أن»:

١ منير نايفة عالم ذرة فلسطيني
٢ ٩١ عدد أولي
٣ $\sqrt[٣]{١٥}$ عدد غير حقيقي
٤ ٧ أحد عوامل ٨٣
٥ ٢ $\leq$ −٧
٦ $\frac{٢}{٣} > \frac{٣}{٢}$

الحل :

العبارة الرياضية	منير نايفة عالم ذرة فلسطيني	٩١ عدد أولي	$\sqrt[٣]{١٥}$ عدد غير حقيقي	٧ أحد عوامل ٨٣	٢ $\leq$ −٧	$\frac{٢}{٣} > \frac{٣}{٢}$
نفيها	منير نايفة ليس عالم ذرة فلسطيني	٩١ عدد غير أولي	$\sqrt[٣]{١٥}$ عدد حقيقي	٧ ليس أحد عوامل ٨٣	٢ > −٧	$\frac{٢}{٣} \leq \frac{٣}{٢}$

تمارين ومسائل ١-٥

١ أبيّن فيما إذا كانت الجمل الآتية تمثل عبارات رياضية أم لا؟

أ) يقع المسجد الأقصى في القدس. ب) سبسطية بلدة أثرية. جـ) $٢^{٣} = ٣^{٢}$

د) $٢س^{٢} + ص^{٢} = ١$ تمثل معادلة دائرة. هـ) يا طلبتي الأعزاء. و) سجّل أنا عربي.

٢ أبيّن قيم الصواب لكل من العبارات الرياضية الآتية:

١ منحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{س}$ متماثل حول نقطة الأصل.

٢ $\sqrt{٤٥} > \sqrt[٣]{١٣٥}$

٣ ق(س) = $س^{٢}$ اقتران فردي.

٤ العدد $٢^{١٠}$ من مضاعفات العدد ٣٢

٥ الصفر عدد نسبي.

٦ المستقيم الذي معادلته س = ٢ يعامد المستقيم الذي معادلته ص = $\frac{١}{٢}$

٣ أنفي العبارات الرياضية الواردة في السؤال السابق.

١ - ٦ جداول الصواب، وأدوات الربط (Truth Tables and Connection Tools)

العبارة الرياضية المركبة: هي عبارة رياضية تتكون من عبارتين رياضيتين، أو أكثر تربط بينها أدوات ربط مثل (و) ، (أو) ، (إذا كان ... فإن ...) ، (...إذا وفقط إذا ...).

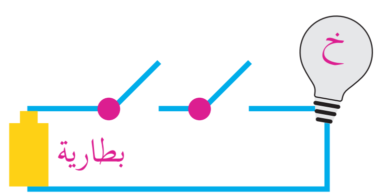
❶ أداة الربط (و) (and)

يرمز لأداة الربط (و) بالرمز ∧ .

جدول الصواب للعبارة الرياضية: ف ∧ ن يمكن تمثيله بالجدول التالي:

ف	ن	ف ∧ ن
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	خ

أفكر وأناقش: ما أوجه الشبه بين قيم الصواب الممكنة للعبارة الرياضية ف ∧ ن
وإمكانات تشغيل الدارة الكهربائية ذي المفتاح المزدوج الممثلة بالشكل المجاور؟



نشاط ١: أكتب قيمة الصواب لكل من العبارات الرياضية المركبة الآتية في المكان المخصص، موضحاً السبب:

١ العسل مفيد لصحة الإنسان، والنحلة حشرة مفيدة للبيئة.
ألاحظ أن مركبتي العبارة صحيحتان، وأداة الربط هي (و) لذا فالعبارة المركبة صحيحة.

٢ الأسد مفترس، والحمامة جارحة ________

٣ (٢ ∈ ح) ∧ (٢ < -٥) (خ) لأن ٢ ∈ ح صائبة ، ٢ < -٥ خاطئة ∴ ص ∧ خ هو خ

٤ ($٢^{٣}$ = ٨) ∧ $لـو_{٢}$ (٨) = ٣ ________

٥ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ = $\sqrt{٣}$) ∧ (ظا $\frac{\pi}{٤}$ = $\sqrt{٣}$) ________

٢ **أداة الربط (أو) (or)**

يرمز لأداة الربط (أو) بالرمز (٧)

جدول الصواب للعبارة الرياضية: ف ٧ ن يمكن تمثيله بالجدول التالي:

ف	ن	ف ٧ ن
ص	ص	ص
ص	خ	ص
خ	ص	ص
خ	خ	خ

مثال ١ : أوضح قيم صواب العبارات الرياضية المركبة الآتية:

١ المثلث مجسم أو الإسطوانة شكل مستوٍ.

٢ ($\varnothing \supset$ {٠}) أو (٢ $\not\ni$ {٢٣})

٣ (مجموع قواسم العدد ١٨ > ٤٠) أو ٧ تقسم على ٢٨ دون باقٍ.

الحل : ألاحظ الجدول

رقم العبارة	المركبة الأولى ف	المركبة الثانية ن	ف ٧ ن
١	خ	خ	خ
٢	ص	ص	ص
٣	خ	خ	خ

تمارين و مسائل ١-٦

١ لتكن ف: النيون من العناصر النبيلة ، ن: الكبريت فلز

أعبر عن العبارات الرياضية الرمزية الآتية بالكلمات، وأبيّن قيمة صواب كل منها:

أ ف $\wedge$ ~ن   ب ~ف $\wedge$ ~ن   جـ ~ف $\vee$ ن

٢ أبين قيمة صواب كل من العبارات الرياضية المركبة الآتية:

أ يحدث الخسوف للشمس و يحدث الكسوف للقمر

ب م (٢ ، ٥) تحقق ص = ٢س + ١ أو ك ($^-$٢ ، $^-$١) تقع في الربع الثالث في المستوى الديكارتي

جـ ($\sqrt{٢}$ $\in$ ح) و (π عدد نسبي)

٣ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

- ما العبارة الرياضية الصحيحة فيما يأتي؟

أ) $^-$٣ عدد غير صحيح $\vee$ $\sqrt{٢}$ عدد غير نسبي.

ب) $^-$٣ عدد غير صحيح $\vee$ $\sqrt{٢}$ عدد نسبي.

جـ) $^-$٣ عدد غير صحيح $\wedge$ $\sqrt{٢}$ عدد نسبي.

د) $^-$٣ عدد غير صحيح $\wedge$ $\sqrt{٢}$ عدد غير نسبي.

١ - ٧ أدوات الربط الشرطية (Conditional Connection Tools)

أولاً: أداة الربط: (إذا كان ... فإن ...) (If... then...)

تسمى أداة الربط (إذا كان... فإن ...) أداة الشرط ويرمز لها بالرمز ($\leftarrow$)

جدول الصواب للعبارة الرياضية: ف $\leftarrow$ ن يمكن تمثيله بالجدول التالي:

ف	ن	ف $\leftarrow$ ن
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	ص
خ	خ	ص

ويلاحظ أن العبارة الرياضية الشرطية ف $\leftarrow$ ن تكون خاطئة في الحالة الوحيدة، عندما تكون مقدمتها صائبة وتاليها خاطئاً .

نشاط ١: أكتب قيم صواب كل من العبارات الرياضية الآتية في المكان المخصص، وأبيّن السبب:

١ إذا كان وادي الباذان يقع في نابلس فإن سلفيت محافظة الزيتون.

وادي الباذان في نابلس عبارة صائبة،

وكذلك سلفيت محافظة الزيتون ∴ ص $\leftarrow$ ص هو .....

٢ للمثلث متساوي الساقين محورا تماثل إذن مجموع قياسات زواياه = ١٨٠° ______ .

٣ (إذا كان الصفر حلاً للمعادلة س^{٢} = س) فإن ($٤^{-\frac{١}{٢}} = ٢$) ______ .

الصفر حل للمعادلة س^{٢} = س صائبة، $٤^{-\frac{١}{٢}} = ٢$ خاطئة (لماذا؟) ∴ ص $\leftarrow$ خ هو ___ .

ثانياً: أداة الربط (... إذا وفقط إذا...) (If and only if...)

يرمز لهذه الأداة بالرمز ($\leftrightarrow$) وتسمى أداة الشرط الثنائية وتقرأ ف إذا وفقط إذا ن

جدول الصواب للعبارة الرياضية: ف $\leftrightarrow$ ن يمكن تمثيله بالجدول التالي:

ف	ن	ف $\leftrightarrow$ ن
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	ص

مثال ١ : أبين قيم الصواب للعبارات الرياضية الآتية:

١ الوسط الحسابي $\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$ إذا وفقط إذا $\sum$ س = ن × $\bar{س}$.

٢ قطرا المستطيل متعامدان إذا وفقط إذا كانت زواياه قوائم.

٣ ٢ + ٣ < ١٠ إذا وفقط إذا كان ٥١ عدداً أولياً.

٤ $\sqrt{٤}$ = ± ٢ ↔ |–٤| = ٤

٥ الحرم الإبراهيمي في الخليل إذا وفقط إذا كانت كنيسة المهد في القدس.

الحل : ١ ، ٣ صائبتان ، ٢ ، ٤ ، ٥ خاطئة.

تمارين ومسائل ١-٧

١ لتكن ف : الوتر أطول أضلاع المثلث قائم الزاوية

ن : مجموع قياسات زوايا الشكل الخماسي الداخلية = ٥٤٠°

أعبر عما يأتي بالكلمات:

١ ف ← ن ٢ ~ ن ← ~ ف ٣ ~ ف ↔ ن

٢ أبين قيم الصواب لكل مما يأتي:

١ إذا كان الصفر عدداً فردياً فإن الواحد عدد أولي.

٢ إذا كان ١٠٠ أحد قوى العشرة فإما –٣ < –٢ أو [٣ ,١] = ٣

٣ إذا كان ٥ من عوامل العدد ٢٠ فإنه (٥ × ٤ = ٢٠) و (٢٠ ÷ ٥ = ٤)

٤ ٢ + –٥ = ٣ و –٨ عدد زوجي إذن ٥ × –٦ = ٣٠

٣ أصمم جدول الصواب لكل من العبارات الرياضية الآتية:

١ (ف ← ن) ∧ ~ ف ٢ (~ ف ∨ ن) ← (ف ∧ ~ ن) ٣ ~ (ف ← ن) ∧ ~ م

تمارينُ عامّةٌ

١ أضعْ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي:

١ ما المسافة بين النقطة أ(٤ ، ٣ ، ٢) والمستوى س ع ؟

أ) ٤ ب) ٣ جـ) ٢ د) ١

٢ ما قياس الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ = (٢ ، ١) $\overleftarrow{ب}$ = (-١ ، ٢)؟

أ) ٩٠° ب) ٠ جـ) ١٨٠ د) ٤٥

٣ ما قيمة س التي تجعل المتجهين الآتيين في نفس الاتجاه؟ $\overleftarrow{أ}$ = (٢ ، س) $\overleftarrow{ب}$ = (٤ ، ٦)

أ) ٠ ب) ٣ جـ) -٣ د) ١

٤ إذا كانت أ(-٥ ، ٤ ، ٢) وكانت جـ(٦ ، ٣ ، ٤) تقع في منتصف $\overline{أب}$ ، فما إحداثيات النقطة ب؟

أ) $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{٧}{٢} ، ٣\right)$ ب) (٧ ، ١٠ ، ١٠)

جـ) (١٣ ، ١ ، ٤) د) (١٧ ، ٢ ، ٦)

٥ ما قيمة م الموجبة التي تجعل المتجهين التاليين متعامدين ؟

$\overleftarrow{أ}$ = (م ، ٣) ، $\overleftarrow{ب}$ = (م + ١ ، -٤)

أ) ٦ ب) ٢ جـ) ٤ د) ٣

٦ إذا كان | $\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{ب}$ | = | $\overleftarrow{أ}$ | + | $\overleftarrow{ب}$ | ، ($\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين غير صفريين) فما العبارة الصائبة؟

أ) $\overleftarrow{أ}$ و $\overleftarrow{ب}$ متعامدين ب) $\overleftarrow{أ}$ و $\overleftarrow{ب}$ في نفس الاتجاه

جـ) $\overleftarrow{أ}$ و $\overleftarrow{ب}$ عكس الاتجاه د) $\overleftarrow{أ}$ و $\overleftarrow{ب}$ متجها وحدة

٧ إذا كانت ف عبارةً رياضيةً صائبةً، ن عبارةً رياضيةً صائبةً، ما العبارة الرياضية المركبة الصائبة فيما يأتي؟

أ) ف ← ~ن ب) ن ← ~ف جـ) ف ∧ ~ن د) ف ∨ ~ن

٨ ما نفي العبارة الرياضية (٣ + ٤ ≠ ٧) ∧ (٥ ≥ ١) ؟

أ) (٣ + ٤ = ٧) ∨ (٥ ≥ ١) ب) (٣ + ٤ = ٧) ∨ (٥ < ١)

جـ) (٣ + ٤ ≠ ٧) ∨ (٥ ≥ ١) د) (٣ + ٤ = ٧) ∨ (٥ > ١)

٩ ما الجملة التي تمثل عبارة رياضية فيما يأتي؟

أ) عدد يقل عن س بـ ١ ب) يا عالماً بحالي جـ) شكراً لك د) الصفر عدد زوجي.

١٠ ما العبارة الرياضية الصائبة فيما يأتي؟

أ) −٣ ∈ ص ← ٣ عدد نسبي　　　　ب) −٣ ∈ ص ↔ −٣ ∉ ح

جـ) −٣ ∈ ص ↔ −٣ > −٥　　　　د) −٣ ∈ ص ∧ −٣ ∉ ح

٢ ما قياس الزوايا الاتجاهية للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (١ ، ٠) على الترتيب؟

٣ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (س، $\sqrt{٧٥}$) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (س ، ٠) س > ٠، أجد قيم س بحيث أن الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{\text{أ}}$ و $\overleftarrow{\text{ب}}$ تساوي ٦٠°.

٤ إذا كانت الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ تساوي ٦٠° وكان | $\overleftarrow{\text{أ}}$ | = ٤ ، | $\overleftarrow{\text{ب}}$ | = ١٠

أجد: أ $\overleftarrow{\text{أ}}$. $\overleftarrow{\text{ب}}$　　ب | $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ |　　جـ | $\overleftarrow{\text{أ}}$ − $\overleftarrow{\text{ب}}$ |

ورقة عمل (١)

١ أ نقطة تقع على محور س ، ب نقطة تقع على محور ص ، جـ نقطة تقع على محور ع ، وكانت د ، هـ ، و تمثل إحداثيات المنتصف للقطع المستقيمة الثلاث $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ أ}}$ على الترتيب بحيث إنّ د (٢، −٤ ، ٠)، هـ (٠ ، −٤ ، ٤)، ما إحداثيات النقطة و؟

٢ أجد قياس الزاوية التي يصنعها كل من المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (−٣، ٣) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٢$\sqrt{\text{٣}}$ ، ٢) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، ثم أجد قياس الزاوية المحصورة بينهما.

٣ إذا كان المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (م ، −٢) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (ن ، ٢ن)
أجد م ، ن علماً بأن ٢ $\overleftarrow{\text{أ}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (١٩ ، −٢)

٤ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (١ ، ٦) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (ك ، ٣) ، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ = (ك − م ، ك + م) وكان $\overleftarrow{\text{أ}}$ // $\overleftarrow{\text{ب}}$ أجد:

أ ٢ |$\overleftarrow{\text{جـ}}$|^{٢} − ٤ $\overleftarrow{\text{ب}}$. $\overleftarrow{\text{ب}}$

ب (٤ $\overleftarrow{\text{ب}}$. $\overleftarrow{\text{جـ}}$) $\overleftarrow{\text{أ}}$

٥ استخدم الضرب الداخلي لإثبات نظرية فيثاغوروس.

٦ إذا كانت م: محمود درويش شاعر، ن: ناجي العلي رسام كاريكاتير، ع: عارف العارف مؤرخ
أعبر بالرموز عن العبارات الرياضية الآتية:

١ إذا كان محمود درويش شاعراً فإن ناجي العلي رسام كاريكاتير.

٢ ناجي العلي رسام كاريكاتير إذا وفقط إذا كان عارف العارف مؤرخاً.

٣ إذا كان محمود درويش شاعراً وعارف العارف مؤرخاً فإن ناجي العلي رسام كاريكاتير.

٤ إما عارف العارف مؤرخ أو محمود درويش شاعر إذن ناجي العلي رسام كاريكاتير.

نموذج اختبار

س١: أضعْ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي:

١ ما المسافة بين النقطة أ(٤ ، ٣ ، ٢) والمستوى س ع ؟

أ) ٤ ب) ٣ جـ) ٢ د) ١

٢ ما قيمة س التي تجعل المتجهين الآتيين في نفس الاتجاه؟ $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، س) $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٤ ، ٦)

أ) ٠ ب) ٣ جـ) -٣ د) ١

٣ إذا كانت ف عبارةً رياضيةً صائبةً، ن عبارةً رياضيةً صائبةً، ما العبارة الرياضية المركبة الصائبة فيما يأتي؟

أ) ف ← ~ن ب) ن ← ~ف جـ) ف $\wedge$ ~ن د) ف $\vee$ ~ن

٤ ما نفي العبارة الرياضية (٣ + ٤ $\neq$ ٧) $\wedge$ (٥ $\geq$ ١) ؟

أ) (٣ + ٤ = ٧) $\vee$ (٥ $\geq$ ١) ب) (٣ + ٤ = ٧) $\vee$ (٥ $<$ ١)

جـ) (٣ + ٤ $\neq$ ٧) $\vee$ (٥ $\geq$ ١) د) (٣ + ٤ = ٧) $\vee$ (٥ $>$ ١)

س٢: أبين قيمة صواب كل من العبارات الرياضية المركبة الآتية:

أ يحدث الخسوف للشمس و يحدث الكسوف للقمر

ب م (٢ ، ٥) تحقق ص = ٢س + ١ أو ك (-٢ ، -١) تقع في الربع الثالث في المستوى الديكارتي

جـ ($\sqrt{٢}$ $\ni$ ح) و (π عدد نسبي)

س٣: إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = $\overleftarrow{\text{و}}$١ - $\overleftarrow{\text{و}}$٢ $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهاً بدايته: (٠، -٤)، ونهايته: (-١، -٦) $\overleftarrow{\text{جـ}}$ متجه ضعفي المتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$ وعكسه في الاتجاه، جد ما يأتي: متجه طوله ٣ وحدات باتجاه المتجه ($\overleftarrow{\text{أ}}$ + ٢$\overleftarrow{\text{جـ}}$)

س٤: حل المعادلة المتجهة: ٢$\overleftarrow{\text{س}}$ + ٣$\overleftarrow{\text{ب}}$ - $\overleftarrow{\text{أ}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{جـ}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{و}}$٢

٢ - ١ حل نظام مكون من ثلاث معادلات خطّيّة Solving of Linear System of Three Variables

نشاط ١: سافر خالد مع أبيه لزيارة عمه في الأردن، وأثناء الزيارة تعرّف على ابن عمه رامي. سأل خالد والده كم عمر ابن عمي رامي، فقال الأب: يا بنيّ: إنه يكبرك بأربع سنوات، كما أن خمسة أمثال عمره مضافاً إلى مثليْ عمرك، يساوي عمر جدك وهو٨٣ سنة.

الحل : إذا فرضنا أن عمر خالد س سنة، وعمر رامي ص سنة.

أتحقق أن ص = س+ ٤ و ٥ص + ٢س = ٨٣

ثم أحل النظام بإحدى الطرق التي تعلمتها، وأتحقق أن عمر رامي يساوي ١٣ سنة، وعمر خالد يساوي ٩ سنوات.

نشاط ٢: ينتج مصنع ألبان في مدينة طوباس ثلاثة أحجام من عبوات اللبن (الصغيرة، والمتوسطة والكبيرة) فإذا كان مجموع أثمان عبوة واحدة من كل حجم يساوي ٩ دنانير، ومجموع أثمان علبتين من الحجم الصغير وعلبة من الحجم المتوسط يقل بمقدار دينار عن مثليْ ثمن علبة من الحجم الكبير، وكان مجموع أثمان ثلاثة علب من الحجم الصغير وعلبة من الحجم المتوسط، يزيد عن ثمن علبة من الحجم الكبير بمقدار ٥ دنانير. أجد سعر كل حجم من العبوات.

الحل : نفرض أن ثمن الحجم الصغير س والمتوسط ص والكبير ع فيكون:

س + ص + ع = ٩ .... (١) (لماذا؟)

٢س + ص − ٢ع = −١ .... (٢) (لماذا؟)

٣س + ص − ع = ٥ .... (٣) (لماذا؟)

بطرح (١) من (٢) ينتج   س – ٣ع = – ١٠ .... (٤)

بطرح (٣) من (٢) ينتج   –س – ع = –٦ .... (٥)

أجد قيم س و ع ثم أتحقق أن ع = ٤ دنانير ، س = ٢ دينار، ثم أجد قيمة ص من إحدى المعادلات السابقة، وأتحقق أن ص = ٣ دنانير.

تمارين ومسائل ٢- ١:

١ أحل النظام الآتي: ٧س + ٥ص – ٣ع = –٨ ، ٣س – ٥ص + ٢ع = –٤ ، ع + ٥س + ٣ص = ٠

٢ تعرض إحدى شركات الاتصالات الخليوية الفلسطينية ثلاثة عروض، فإذا اشترك شخص في العروض الثلاثة معا، فإنه يحصل على ٤٥٠ دقيقةً مجانيةً، وإذا اشترك في العرضيْن الأول والثاني، فإنه يحصل على ٢٥٠ دقيقةً مجانيةً، وإذا اشترك في العرضيْن الثاني والثالث، فإنه يحصل على ٣٥٠ دقيقةً مجانيةً. أجد عدد الدقائق المجانية لكل عرض.

٢ - ٢ حلّ نظام من معادلتين في متغيرين: إحداهما خطيّة، والأخرى تربيعيّة
Solving of System with Linear and Quadratic Equations of Two Variables

نشاط ١: الحرم الإبراهيمي مكان مقدس للمسلمين، وهو مبني من حجارة كبيرة (أنظر الشكل المجاور) فإذا كان طول أحد الحجارة يزيد عن عرضه بمقدار ٦ متر تقريباً، وطول قطره يساوي $\sqrt{٥٧}$ متراً تقريباً.

أفرض أن طول الحجر س وعرضه ص

س = ص + ٦ (لماذا؟)

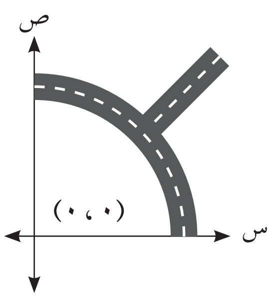
س^٢ + ص^٢ = ٥٧ (لماذا؟)

(ص+٦)^٢ + ص^٢ = ٥٧

باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية، والآلة الحاسبة، أتحقق أن طوله يساوي ٤,٧م تقريباً، وعرضه يساوي ٤,١م تقريباً.

نشاط ٢: شارعان أحدهما على شكل منحنى معادلته ٣س^٢ + ٤ص^٢ = ٢٨ والآخر مستقيم معادلته ٢ص = س + ٢ يلتقيان في مفترق طرق. أجد إحداثيي نقطة التقاطع. على اعتبار أن مركز الشارع المنحني هو (٠ ، ٠)

(انظر الشكل المجاور) (الوحدات بالكيلومتر)



٣ س^٢ + ٤ص^٢ = ٢٨

٢ص = س+٢ ينتج أن س = ٢ص −٢

٣(٢ص − ٢)^٢ + ٤ص^٢ = ٢٨

ومنها ينتج أن ٢ص^٢ − ٣ص −٢ = ٠

(٢ص + ١) (ص − ٢) = ٠

أجد قيم ص و س ثم أتحقق أن نقطة التقاطع هي (٢ ، ٢)

تمارين ومسائل ٢-٢:

١ أحلّ النظام الآتي: س + ص = ٥ ، ٣س^٢ − ٢ص^٢ = ١٩

٢ سجادة مستطيلة الشكل طولها يزيد عن عرضها بمقدار متر واحد، وقطرها يساوي $\sqrt{١٣}$ متراً، أجد أطوال أبعادها.

٢ - ٣ حلّ نظام مكون من معادلتين تربيعيتين في متغيرين
Solving of System with Two Quadratic Equations with Two Variables

مثال ١ : بركة سباحة سطحها بيضاوي يحيط بها ممر صغير معادلته ٢س^{٢} + ٣ص^{٢} = ٦٩ فإذا قسمت إلى ثلاث مناطق (منطقتي أ و جـ للأطفال، والمنطقة ب للكبار) فإذا حددت المناطق بحبال تقع على منحنى العلاقة س^{٢} − ص^{٢} = ١٢ كما في الشكل المجاور. أجد نقط تقاطع الحبال مع أطراف البركة على اعتبار أن مركز البركة هو نقطة الأصل.

الحل : لإيجاد نقط تقاطع الحبال مع أطراف البركة نحل النظام:

٢س^{٢} + ٣ص^{٢} = ٦٩ ... (١)

س^{٢} − ص^{٢} = ١٢ ... (٢)

٣س^{٢} − ٣ ص^{٢} = ٣٦ (لماذا؟)

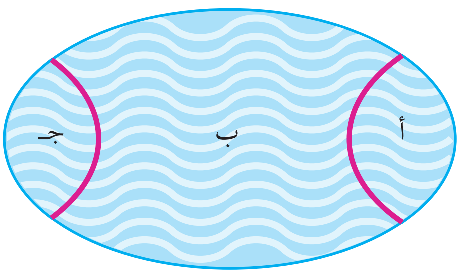
٥س^{٢} = ١٠٥

ومنها س = ± $\sqrt{٢١}$

∴ ص^{٢} = ٢١ − ١٢ = ٩

ومنها ص = ± ٣

∴ نقط التقاطع هي (± $\sqrt{٢١}$ ، ± ٣)



مثال ٢ : النقطة و(س ، ص) تتحرك في المستوى، بحيث يتحدد موقعها حسب العلاقتين الآتيتين:

س = ٣جتا ن ، ص = ٤ جا ن.

أجد نقط تقاطع مسار هذه النقطة مع منحنى العلاقة ١٦س^{٢} −٩ص^{٢} = ١٤٤

الحل : $\frac{\text{س}}{٣}$ = جتان ، كذلك $\frac{\text{ص}}{٤}$ = جان بتربيع المعادلتين وجمعهما ينتج أن:

$\frac{\text{س}^{٢}}{٩}$ + $\frac{\text{ص}^{٢}}{١٦}$ = جتا^{٢}ن + جا^{٢}ن = ١ (لماذا؟)

١٦س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ١٤٤ .... (١)

١٦س^{٢} − ٩ص^{٢} = ١٤٤ ....(٢)

٣٢س^{٢} = ٢٨٨ ومنها ينتج أن س = ± ٣ ، ص = ٠

أي أن نقطتي التقاطع هما (± ٣ ، ٠)

تمارين ومسائل ٢-٣:

١ أحل أنظمة المعادلات الآتية:

أ $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠$

$٢س^{٢} - ص^{٢} = ٨$

ب $س^{٢} + ٢ص^{٢} - ٤١ = ٠$

$٢س^{٢} - ص^{٢} = ٢$

٢ أجد نقطة/ نقط تقاطع المنحنى الذي معادلته $(س - ٣ص)^{٢} + (س + ٣ص)^{٢} = ٢٢$ مع المنحنى الذي معادلته $س^{٢} - ٤ص^{٢} = {}^{-}٢$

أولاً: حل معادلات أسّيّة:

مثال ١ : أحل المعادلة الأسّيّة الآتية : $٤^{٣س} = ٨^{(س+١)}$

الحل : $٢^{٦س} = ٢^{٣س+٣}$ (لماذا؟)

ومنها ٦س = ٣س + ٣

وينتج أن س = ١ (أتحقق من صحة النتيجة)

نشاط ١: أحل المعادلة $٩^{٢س-٦} - ١ = ٠$

$٩^{٢س-٦} = ١$

إذن ٢س − ٦ = ٠ (لماذا؟)

س = ٣

نشاط ٢: أحل المعادلة $\frac{٨ \times ١٠^{٣س}}{٢ \times ١٠^{٥س}} = ٤ \times ١٠^{٤}$

أختصر وأتحقق من أن: $١٠^{-٢س} = ١٠^{٤}$ وأن س = −٢

مثال ٢ : إذا كان ق(س) = $٤^{س} - ٢^{(س+١)}$، وكان ق(ب) = ٤٨ أجد قيمة ب

الحل : ق(ب) = ٤٨

$٤^{ب} - ٢^{(ب+١)} = ٤٨$

ومنها $٤^{ب} - ٢^{(ب+١)} - ٤٨ = ٠$

ومنها $٢^{(٢ب)} - ٢ \times ٢^{(ب)} - ٤٨ = ٠$

$(٢^{ب} - ٨)(٢^{ب} + ٦) = ٠$

ومنها ينتج أن ب = ٣ (لماذا؟)

ثانياً: حل معادلات لوغاريتمية

أناقش: أقارن بين حل المعادلة $٥^{س} = ٢٥$ والمعادلة $٥^{س} = ١٠$

حل المعادلات الأسّيّة بالطرق العادية ليس سهلاً دائماً؛ لذلك نلجأ إلى استخدام اللوغاريتمات لحل المعادلات الأسّيّة، ففي النشاط السابق لحل المعادلة $٥^{س} = ١٠$ نأخذ اللوغاريتم العادي (الأساس ١٠) للطرفين فينتج أن:

لـو$(٥^{س})$ = لـو(١٠) = ١ (لماذا؟) ومنها ينتج أن س لـو٥ = ١ (لماذا؟) ومنها س = $\frac{١}{لـو٥} \approx ١,٤٣$

مثال ٣ : أحل المعادلة الآتية: $لـو_{٣} س + لـو_{٣}(س + ٦) = ٣$

الحل : $لـو_{٣}(س^{٢} + ٦س) = ٣$

ومنها ينتج أن $س^{٢} + ٦س - ٢٧ = ٠$ (لماذا؟)

$(س + ٩)(س - ٣) = ٠$

ومنها ينتج أن $س = -٩$ (مرفوض. لماذا؟) أو $س = ٣$ (مقبول)

نشاط ٣: أحلّ المعادلة الآتية: $٢(لـو_{٢} س)^{٢} - ٥ لـو_{٢} س - ٣ = ٠$

إرشاد: أفرض $ص = لـو_{٢} س$ ثم أحل المعادلة الناتجة

وأتحقق من أن $س = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ أو $س = ٨$

مثال ٤ : أحلّ المعادلة الآتية: $لـو ٥س - لـو(س-١) = لـو س$

الحل : $لـو ٥س - لـو(س-١) = لـو س$

$لـو \frac{٥س}{س - ١} = لـو س$

ومنها ينتج أن $\frac{٥س}{س - ١} = س$

ومنها ينتج أن $س^{٢} - س = ٥س$

$س^{٢} - ٦س = ٠$

ومنها ينتج أن $س = ٠$ (مرفوض. لماذا؟) أو $س = ٦$ (مقبول)

تمارين ٢ -٤:

١ أحلّ كلاً من المعادلتين الآتيتين:

أ $٤^{س^{٢}} - ٨^{س} = ٠$

ب $هـ^{٢س} - ٥ \times هـ^{س} + ٦ = ٠$ ، حيث هـ العدد النيبيري

٢ أحلّ المعادلة الآتية: $لـو_{٢} س - لـو_{٢}(س - ٤) = ٣$

٣ أحلّ المعادلتين الآتيتين: ١) $٢ لـو_{٢} س + لـو_{٢} ١٦ = ٢$ ٢) $(لـوس)^{٢} = لـوس^{٢}$

٤ إذا كان $ق(س) = لـو_{٢} س^{٣}$ ، وكان $هـ(س) = ٥ - لـو_{٢} س^{٢}$ أجد نقطة تقاطع المنحنيين.

٢ - ٥ حلّ معادلات تتضمن القيمة المطلقة Solving Equations with Absolute Value

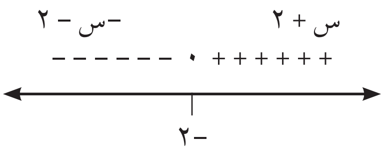
نشاط ١: أحل المعادلة الآتية: |٦ − ٢س| = ١٦

٦ − ٢س = ١٦ ....(١) أو ٦ − ٢س = ⁻١٦ ....(٢) (لماذا؟)

من (١) − ٢س = ١٠ ومنها س = ⁻٥ . أتحقق من (٢) أن س = ١١

أفكر وأناقش : ما العلاقة بين |أ − ب| و |ب − أ|

مثال ١ : أحلّ المعادلة الآتية : |س + ٢| = ٣س − ١٢



الحل : بإعادة تعريف |س + ٢| والاستعانة بخط الأعداد

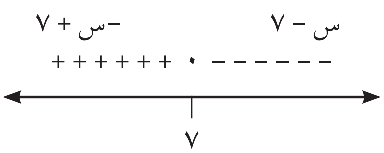
عندما س < −٢ ، تكون − س − ٢ = ٣س − ١٢

ومنها س = $\frac{٥}{٢}$ ترفض (لماذا؟)

عندما س ≤ −٢، تكون س + ٢ = ٣س − ١٢

ومنها س = ٧ تقبل (لماذا؟)

نشاط ٢: أحلّ المعادلة الآتية: |٧ − س| = س − ٧



٧ − س = ٠ ومنها س = ٧

عندما س≤ ٧ تكون س −٧ = س −٧،

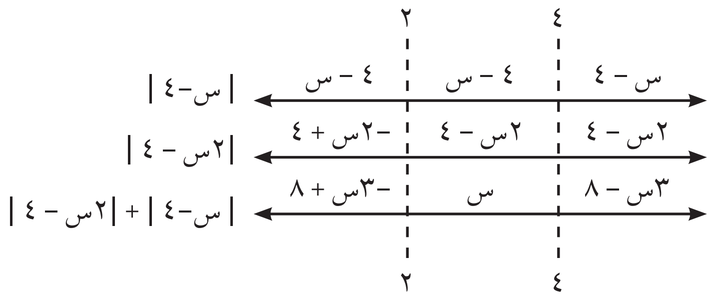
ما مجموعة الحل في هذه الحالة؟

عندما س ≥ ٧ تكون ٧ − س = س −٧،

ما مجموعة الحل في هذه الحالة؟

أتحقق أن مجموعة الحل هي س ∈ [٧ ، ∞[

مثال ٢ : أحلّ المعادلة الآتية: | س−٤ | + |٢س − ٤ | = ٤



عندما س ≥ ٢ تكون − ٣س + ٨ = ٤ ومنها س = $\frac{٤}{٣}$ (أتحقق من ذلك)

عندما ٤ ≤ س ≤ ٢ ينتج أن س = ٤ (أتحقق من ذلك)

وعندما س ≤ ٤ تكون ٣س −٨ = ٤ وينتج س = ٤

إذن الحل النهائي س = ٤ أو س = $\frac{٤}{٣}$

تمارين ومسائل ٢-٥:

١ أحلّ المعادلات الآتية:

أ |٦ − ٥ س| = ٨

ب ٥ $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤}$ − ١١ = ٤

٢ إذا كان ٥ أمثال العدد أ يبعد عن العدد ٧ بمقدار ٨ وحدات ما قيمة أ ؟

٣ أحلّ المعادلة الآتية:

$\sqrt{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٩}$ = |٩ − ٢س|

ورقة عمل (٣)

١ قذف جسم راسيا الى أعلى من سطح بناية حسب العلاقة ف = أ ن + ب $ن^{٢}$ + جـ، حيث ف بالامتار، ن بالثواني ، فإذا رصد شخص ذلك الجسم من أسفل البناية فوجد أن ارتفاعه بعد ثانية ٤٥م، وبعد ثانيتين ٦٠م، وبعد ٣ ثواني ٦٥م، أجد السرعة الابتدائية (أ) ، التسارع (٢ب) ، ارتفاع البناية (جـ).

٢ أجد نقطة تقاطع المستقيم ٢س + ٣ص = ٦ مع المنحنى $(٢س + ص)^{٢} + (٢س - ص)^{٢} = ٨$

٣ أجد نقطة/ نقط تقاطع المنحنى الذي معادلته $(س - ٣ص)^{٢} + (س + ٣ص)^{٢} = ٢٢$ مع المنحنى الذي معادلته $س^{٢} - ٤ص^{٢} = -٢$

٤ أحلّ المعادلة الآتية:

$|٤ - س| = ٦ - |س + ٢|$

٥ إذا كان ق(س): $٢جا^{٢}س - ٣جاس + ١ = صفر$، هـ(س) $ظا^{٢}س - \sqrt{٣}\ ظاس = \frac{-٢}{٣}$ ،
س ∈ [٠ ، ٢π] ، أجد مجموعة حل ق(س) ∧ هـ(س).

٦ إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة أعداد حقيقية، أثبت أن: $أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢} \geq أب + أجـ + ب جـ$.

نموذج اختبار

س١: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما حل المتباينة $|٢س - ٣| \geqslant ٧$ ؟

أ)]-٢، ٥[ب)]-∞ ، -٥]∪[٥، ∞[ج) [-٢، ٥] د) [-١٠، ١٠]

٢ أي مما يأتي يمثل نقطة تقاطع المستقيم س + ص = ٣ مع المنحنى $س^{٢} - ص^{٢} = ١٥$ ؟

أ) (٤، -١) ب) (-١، ٤) ج) (٢، ١) د) (-٤، ٧)

٢ أكتب ما يأتي باستخدام مفهوم القيمة المطلقة «المسافة بين ثلاثة أمثال س والعدد ٢».

أ) $|٢س - ٣|$ ب) $|٣س - ٢|$ ج) $|٣س + ٢|$ د) $٣|س| - ٢$

٣ عند حلّ نظام خطّي مكوّن من ٣ معادلات، كانت مجموعة الحل هي{(-٣ ، ١ ، ع)} ، وكانت إحدى المعادلات هي س- ص + ٣ع = ٨ . ما قيمة ع ؟

أ) ٤ ب) -٤ ج) $\frac{١}{٣}$ د) ١

س٣: أ) حل المعادلة: $٢^{٢س} - ٢^{س+٣} = -١٢$

ب) عددان موجبان مجموع مربعيهما ١٠٠، ويزيد ضعفا مربع أحدهما عن مربع الآخر بمقدار ٨ ما العددان؟

س٤: إذا كانت ك، ل، م، ثلاثة أعداد صحيحة موجبة، وكان باقي قسمة ك على م = باقي قسمة ل على م، أثبت أن ك - ل يقبل القسمة على م.

س٥: حل المعادلة الآتية: $(لـو\,س)^{٢} + لـو\,س^{٢} = (لـو\,٢)^{٢} - ١$

س٦: نافذة على شكل مستطيل طولها يزيد عن عرضها بمقدار متر واحد، فإذا كان طول قطرها يساوي $\sqrt{٥}$ متراً. يراد تركيب ألومنيوم للنافذة بسعر المتر المربع ٦٠ ديناراً. أجد تكلفة الألومنيوم.

٣ - ١ المتتاليات Sequences

تعريف: **المتتالية هي اقتران مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية (ط) ، أو مجموعة جزئية منها على صورة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن }، ومداه مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية (ح).**
وتقسم المتتاليات إلى نوعين: منتهية عندما يكون فيها المجال مجموعة جزئية من ط على الصورة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن }، وغير منتهية عندما يكون المجال ط.
ويرمز للحدّ الأول بالرمز $ح_١$ والحدّ الثاني بالرمز $ح_٢$ وهكذا...،
يرمز للحدّ الذي ترتيبه ن بالرمز $ح_ن$ ويسمى الحدّ العام (الحدّ النوني).

مثال ١ : إذا كان الحدّ العام للمتتالية $ح_ن = ن^٣ + ١$

١ أكتب الحدود الخمسة الأولى من هذه المتتالية.

٢ أكتب الحدّ العاشر من المتتالية.

الحل :

١ بتعويض قيم ن = ١، ٢، ٣، ٤، ٥ في الحدّ العام نحصل على:

$ح_١ = ١^٣ + ١ = ٢$ ، $ح_٢ = ٢^٣ + ١ = ٩$ ، $ح_٣ = ٢٨$ ، $ح_٤ = ٦٥$ ، $ح_٥ = ١٢٦$

٢ $ح_{١٠} = ١٠^٣ + ١ = ١٠٠١$

نشاط ١: أجد الحدّ العام للمتتاليات.

١ ٣، ٧، ١١، .....

٢ ١، $\frac{١}{٨}$، $\frac{١}{٢٧}$، .....

٣ ١١، ١٠١، ١٠٠١

بالربط بين قيمة كل حدّ وترتيبه، أجد:

١ $ح_١ = ٣ = (٤ \times ١) - ١$

$ح_٢ = ٧ = (٤ \times ٢) - ١$

$ح_٣ = ١١ = (٤ \times ٣) - ١$

فيكون $ح_ن = ٤ن - ١$

٢ $ح_١ = ١ = \frac{١}{٣^١}$ ، $ح_٢ = \frac{١}{٨} = \frac{١}{٣^٢}$ ، $ح_٣ = \frac{١}{٢٧} =$ ....

فيكون $ح_ن =$ ....

٣ $ح_ن =$ ....

مثال ٢ : أكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتالية التي فيها:

$ح_١ = ٢$ ، $ح_٢ = ٣$ ، $ح_{ن+٢} = ح_ن \times ح_{ن+١}$

الحل : $ح_١ = ٢$ ، $ح_٢ = ٣$ معطى

عندما ن = ١ ، $ح_٣ = ح_١ \times ح_٢ = ٢ \times ٣ = ٦$

وعندما ن = ٢ ، $ح_٤ = ح_٢ \times ح_٣ = ٣ \times ٦ = ١٨$

تمارين و مسائل ٣ - ١

١ أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتاليات الآتية:

أ $ح_ن = ٥ ن^٢ - ٩$

ب $ح_١ = ٣$ ، $ح_٢ = -١$ ، $ح_{ن+٢} = ح_{ن+١} \times ح_ن \quad \forall ن \in ص^+$

٢ أكتب الحدّ العام لكل من المتتاليات الآتية:

أ $\frac{٢}{١}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٥}{٤}$ ، .....

ب ٢ ، ٩ ، ٢٨ ، ....

جـ ٤ ، −٨ ، ١٦ ، −٣٢ ، ..... ، −١٢٨

٣ في المتتالية التي حدّها العام هو $ح_ن = ٣ \times ٢^{(ن-٥)}$ ، أبين أن:

$(ح_٥)^٢ = ح_٢ \times ح_٨$

نشاط ١: تعتبر الحديقة المنزلية جزءاً من حياة المواطن الفلسطيني، و لتعميق قيم حب الأرض والانتماء لها، طلب أبو حسن من ابنه حسن استثمار وقته في العطلة الصيفية بزراعتها بأنواع الخضراوات المختلفة، على أن يكافئه بثلاثة دنانير في اليوم الأول، و ٥ دنانير في اليوم الثاني، و ٧ دنانير في اليوم الثالث وهكذا لمدة أسبوع. يمكن كتابة المبالغ على شكل متتالية، و هي ....

أما الحدّ العام للمبالغ $ح_ن$ = ...

وبعد أن أنهى حسن مهمته، قام بكتابة مبالغ المكافآت التي حصل عليها بالصورة الآتية:

٣ + ٥ + ٧ + ٩ + ١١ + ١٣ + ١٥ ، إن كتابة هذه المكافآت بهذه الصورة يسمى متسلسلة.

ويمكن كتابة هذا المجموع باستخدام الرمز $\sum$ ويقرأ (مجموع) حيث يمكننا كتابة هذه المتسلسلة على الصورة الآتية $\sum_{ر = ١}^{٧} (٢ر + ١)$

ألاحظ أن هذه المتسلسلة منتهية، وعدد عناصر ها ٧.

ويمكن التعبير عن المتسلسلة −١ + ٦ + ٢٥ + ٦٢ + ... على الصورة

$\sum_{ر = ١}^{\infty} (ر^٣ - ٢)$ حيث ر $\in$ ط ، وهي متسلسلة غير منتهية.

مثال ١ : أجد مفكوك المتسلسلة الآتية $\sum_{ر = ١}^{٤} (٣ر + ١)$:

الحل : عندما ر = ١ ، $ح_١$ = ٣ × ١ + ١ = ٤

عندما ر = ٢ ، $ح_٢$ = ٣ × ٢ + ١ = ٧ وهكذا

$\sum_{ر = ١}^{٤} (٣ر + ١)$ = ٤ + ٧ + ١٠ + ١٣

نشاط ٢: أكتب كلاً من المتسلسلات الآتية باستخدام الرمز ($\sum$)

١ ٥ + ١٠ + ١٥ + ... + ١٥٠

٢ ٢ + ١٦ + ٥٤ + ١٢٨ + ٢٥٠

٣ ١ × ٢ + ٢ × ٣ + ٣ × ٤ + ...

١ ٥ × ١ + ٥ × ٢ + ٥ × ٣ + ... + ٥ × ٣٠

ألاحظ أن ن = ٣٠ ، $ح_ر$ = ٥ ر فتكون المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٣٠}$ ٥ ر

٢ ن = ٥ ، $ح_ر$ = ... فتكون المتسلسلة ....

٣ ن = ... ، $ح_ر$ = ... فتكون المتسلسلة ....

مثال ٢ : أجد مجموع المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٥}$ (٢ $ر^٢$ + ١)

الحل : $\sum_{ر=١}^{٥}$ (٢ $ر^٢$ + ١) = ٣ + ٩ + ١٩ + ٣٣ + ٥١

ومنها مجموع المتسلسلة = ١١٥

خصائص المجموع $\sum$

١ $\sum_{ر=١}^{ن}$ أ = أن ، ∀ أ ∈ ح

٢ $\sum_{ر=١}^{ن}$ أ $س_ر$ = أ $\sum_{ر=١}^{ن}$ $س_ر$ ، أ ∈ ح

٣ $\sum_{ر=١}^{ن}$ ($س_ر$ ± $ص_ر$) = $\sum_{ر=١}^{ن}$ $س_ر$ ± $\sum_{ر=١}^{ن}$ $ص_ر$

أتعلم:

١ $\sum_{ر=١}^{ن}$ ر = $\frac{ن (ن + ١)}{٢}$

٢ $\sum_{ر=١}^{ن}$ $ر^٢$ = $\frac{ن (ن + ١) (٢ن + ١)}{٦}$

مثال ٣ : إذا كان $\sum_{ر=١}^{١٠} (ر^{٢} + أ\,ر - ٧) = ٤٢٥$ ، أجد قيمة أ.

الحل : باستخدام خصائص المجموع ($\sum$)

$$\sum_{ر=١}^{١٠} (ر^{٢} + أ\,ر - ٧) = \sum_{ر=١}^{١٠} ر^{٢} + أ \times \sum_{ر=١}^{١٠} ر - \sum_{ر=١}^{١٠} ٧ = ٤٢٥$$

$$= \frac{ن\,(ن+١)\,(٢ن+١)}{٦} + أ \times \frac{ن\,(ن+١)}{٢} - ٧ \times ن = ٤٢٥$$

بتعويض ن = ١٠ ينتج:

$$\frac{١٠\,(١٠+١)\,(٢\times١٠+١)}{٦} + أ \times \frac{١٠\,(١٠+١)}{٢} - ٧ \times ١٠ = ٤٢٥$$

$$\Leftarrow \quad ٣٨٥ + ٥٥\,أ - ٧٠ = ٤٢٥$$

$$\Leftarrow \quad ٥٥\,أ = ١١٠ ، \quad أ = ٢$$

تمارين و مسائل ٣ - ٢

١ أكتب كلا من المتسلسلات الآتية، باستخدام رمز المجموع ($\sum$)

أ $ك^{٣} + ك^{٦} + ك^{٩} + ...$

ب $\frac{٣}{٤} + \frac{٤}{٥} + \frac{٥}{٦} + ... + \frac{١٠٠}{١٠١}$

٤ أجد مجموع المتسلسلات الآتية:

أ $\sum_{ر=١}^{٣} (ر^{٢} + ٢ر + ٥)$

ب $\sum_{ر=١}^{٨٥} (-١)^{ر}$

جـ $\dfrac{\sum_{ر=١}^{٤٠} ر^{٢}}{\sum_{ر=١}^{٤٠} ٢ر}$

د $\sum_{ر=١}^{٤٠} \frac{ر}{٢}$

٣ - ٣ المتتاليات الحسابية (العددية) Arithmetic Sequences

تعريف: المتتالية الحسابية: هي المتتالية التي يكون فيها الفرق بين أي حدّ والحد السابق له مباشرة، يساوي مقداراً ثابتاً، يسمى أساس المتتالية الحسابية، ويرمز له بالرمز(د).

نشاط ١: أميز المتتاليات الحسابية من غيرها فيما يأتي:

١ ٣، ٥، ٧، ٩، ١١

٢ ٨، ٤، ٢، ١

٣ ١ ، −١، ١، −١، ١

٤ المتتالية التي حدّها النوني $ح_ن$ = ٣ن + ١

١ المتتالية حسابية، لأن ٥ − ٣ = ٧ − ٥ = ٩ − ٧ = ٢ = د

٢ ليست حسابية، لأن ٤ − ٨ ≠ ٢ − ٤

٣ ليست حسابية، لأن ....

٤ حدود المتتالية، هي: ..... ، ...... ، .... ، .... وهي متتالية ....

الحدّ العام للمتتالية الحسابية:

الحدّ العام للمتتالية الحسابية هو : $ح_ن$ = أ + (ن−١) د ، حيث أ : الحدّ الأول، د : الأساس

مثال ١ : أجد الحدّ العاشر في المتتالية الحسابية التي حدّها الأول = ٥ وأساسها = ٢

الحل : أ = ٥ ، د = ٢

$ح_ن$ = أ + (ن − ١) د

$ح_{١٠}$ = أ + ٩ د

= ٥ + ٩ × ٢ = ٢٣

مثال ٢ : متتالية حسابية حدّها الثالث يساوي ٥ وحدها التاسع يساوي ١٧

١ أكتب حدود هذه المتتالية.

٢ هل العدد ٣٠٠ أحد حدود هذه المتتالية؟

الحل :

١ $ح_{٣} = ٥ \quad \Leftarrow \quad أ + ٢ د = ٥ \quad .... \quad (١)$

$ح_{٩} = ١٧ \quad \Leftarrow \quad أ + ٨ د = ١٧ \quad .... \quad (٢)$

بطرح المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن ٦د = ١٢ ومنها د = ٢

بالتعويض في المعادلة (١) عن قيمة (د) ينتج أن أ = ١

∴ المتتالية هي ١ ، ٣ ، ٥ ، ....

أفكر بطرق أخرى للحل.

٢ أفرض أن $ح_{ن} = أ + (ن - ١) د = ٣٠٠$

$١ + (ن - ١) \times ٢ = ٣٠٠$

$١ + ٢ن - ٢ = ٣٠٠ \quad \Leftarrow \quad ٢ن = ٣٠١$ بالقسمة على ٢ ينتج أن:

$ن = ١٥٠ \frac{١}{٢}$ ، ألاحظ أن $ن \notin ط$ ، ومنها ٣٠٠ ليست أحد حدود المتتالية.

تمارين ومسائل ٣ - ٣

١ متتالية حسابية فيها $ح_٤ = -٣٣$ ، $ح_٩ = -١٣$

أجد: أ حدود المتتالية.

ب رتبة أول حدّ موجب فيها.

٢ متتالية حسابية مجموع حدّيها الثاني والثالث ١٥٢ وحدّها السادس يزيد عن حدّها الثامن بمقدار ٨، أكتب حدود هذه المتتالية الحسابية.

٣ إذا كوّنت الأعداد ٧ ، س ، .... ، ١٠س + ٩ ، ١٢٣ متتالية حسابية، أجد:

أ قيمة س

ب عدد حدود هذه المتتالية.

٣ - ٤ مجموع المتسلسلة الحسابية Arithmetic Series Sum

أتعلم: مجموع أول ن حدٍ من حدود المتسلسلة الحسابية التي حدّها الأول (أ) وحدّها الأخير (ل)

هو $جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$

ويمكن استنتاج صورة أخرى للمجموع، وذلك بوضع ل = أ + (ن – ١) د

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١) د]$

مثال ١ : أجد مجموع أول ١٥ حدّاً من المتسلسلة ٢٠ + ١٦ + ١٢ + ...

الحل : أ = ٢٠ ، د = ١٦ – ٢٠ = –٤ ، ن = ١٥

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (٢أ + (ن - ١) \times د)$

$= \frac{١٥}{٢} (٤٠ + ١٤ \times -٤) = -١٢٠$

مثال ٢ : أجد قيمة $\sum_{ر=١}^{٦٠} (١٠ - ر)$

الحل : المجموع = (١٠ – ١) + (١٠ – ٢) + (١٠ – ٣) + ... + (١٠ – ٦٠)

= ٩ + ٨ + ٧ + ... + (–٥٠)

أ = ٩ ، ل = –٥٠ ، ن = ٦٠

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$

$= \frac{٦٠}{٢} \times (٩ - ٥٠) = ٣٠ \times -٤١ = -١٢٣٠$

مثال ٣ : إذا كان مجموع أول ن حدٍّ من حدود متسلسلة حسابية يعطى بالعلاقة $جـ_ن = ن \times (٢ن + ١)$

أجد هذه المتسلسلة.

الحل : $ح_١ = جـ_١ = ١ \times (٢ + ١) = ٣$ (لماذا؟)

$ح_٢ = جـ_٢ - جـ_١ = ٢ \times ٥ - ٣ = ٧$

أ = ٣ ، د = ٧ − ٣ = ٤

المتسلسلة، هي: ٣ + ٧ + ١١ + ...

تمارين ومسائل ٣ - ٤

١ أجد مجموع أول ٢٠ حدًّ من المتسلسلة ٣٠ + ٢٧ + ٢٤ + ...

٢ متسلسلة حسابية حدّها الأول ٧ و حدّها الأخير (−١٢) و مجموع حدودها (−٥٠) أجد المتسلسلة.

٣ متسلسلة حسابية تتكون من ٢٥ حدّاً، حدّها الأوسط يساوي ٣٨، ومجموع الحدود الثلاثة الأخيرة منها يساوي ٢١٣. أجد المتسلسلة، وأجد مجموعها.

٣ - ٥ المتتالية الهندسية Geometric Sequence

تعريف: تسمى المتتالية متتاليةً هندسيةً،إذا كانت النسبة بين كل حدّ والحدّ السابق له مباشرة، تساوي مقداراً ثابتاً، ويسمى المقدار الثابت أساس المتتالية الهندسية، ويرمز له بالرمز (ر).
ويمكن كتابة حدود المتتالية الهندسية التي حدّها الأول (أ) وأساسها (ر) على الصورة
أ ، أ ر ، أ $ر^٢$ ، ٠٠٠٠٠٠٠ ، وعليه، فإن الحدّ العام يعطى بالقاعدة: $ح_ن$ = أ $ر^{ن-١}$

نشاط ١: أميز المتتالية الهندسية عن غيرها من المتتاليات الآتية، ثم أكتب الحدّ العام للمتتالية الهندسية منها:

١) ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ٠٠٠٠٠٠

٢) ٣٢ ، ٨ ، ٢ ، ٠٠٠٠٠٠

٣) ١ ، ٤ ، ٦ ، ٠٠٠٠٠٠٠

٤) س ، $س^٣$ ، $س^٥$ ، ٠٠٠٠٠ : س ≠ ٠

١) ألاحظ أن $\frac{٦}{٢} = \frac{١٨}{٦} = ٣$ إذن المتتالية هندسية، الحد العام $ح_ن$ = ...

٢) .... ، الحد العام $ح_ن$ = ...

٣) ألاحظ أن $\frac{٤}{١} \neq \frac{٦}{٤}$ المتتالية ليست هندسية.

٤) ....

مثال ١ : أجد الحدّ السادس من المتتالية الهندسية ٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ....

الحل : أ = ٥ ، ر = $\frac{١٠}{٥}$ = ٢ ، $ح_٦$ = ٥ × $٢^٥$ = ١٦٠

مثال ٢ : إذا كان ١٥٣٦ هو أحد حدود المتتالية الهندسية : ٣ ، ٦ ، ١٢ ،... فما رتبة هذا الحدّ؟

الحل : أ = ٣ ، ر = $\frac{٦}{٣}$ = ٢ ، ح$_{ن}$ = ١٥٣٦ ، ن = ؟

ح$_{ن}$ = أ ر$^{ن-١}$

١٥٣٦ = ٣ × ٢$^{ن-١}$ بالقسمة على ٣ ⇐ ٢$^{ن-١}$ = ٥١٢ ∴ ٢$^{ن-١}$ = ٢^{٩} .

ومنها ن − ١ = ٩ ∴ ن = ١٠

مثال ٣ : إذا كانت س + ٣ ، ٤ ، س − ٣ تكون متتالية هندسية: فما قيمة / قيم س؟

الحل : $\frac{٤}{س + ٣}$ = $\frac{س - ٣}{٤}$ ⇐ (س − ٣)(س + ٣) = ١٦

س^{٢} − ٩ = ١٦ ⇐ س^{٢} = ٢٥ ، س = ± ٥

تمارين ومسائل ٣ - ٥

١ أجد الحدّ السابع من المتتالية الهندسية ٣ ، −٩ ، ٢٧ ، ....

٢ متتالية هندسية مجموع حدّيها الأول والثاني ١٢ ، ومجموع حدّيها الثالث والرابع يساوي ١٠٨ . أجد هذه المتتالية.

أتعلم: **مجموع أول ن حدٍ من حدود متسلسلة هندسية حدّها الأول أ ، وأساسها ر يعطى بالقاعدة:**

$جـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$، **حيث ل الحدّ الأخير.**

ألاحظ أنه يمكن كتابة: $جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ ، $ر \neq ١$ **بالصورة الآتية:**

$جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ، $ر \neq ١$ **(لماذا؟)**

مثال ١ : أجد مجموع أول ٨ حدود من حدود المتتالية الهندسية : ٢ ، ٦ ، ١٨ ،.......

الحل : أ = ٢ ، ر = ٣ ، ن = ٨

$جـ_٨ = \frac{٢ \times (١ - ٣^٨)}{١ - ٣} = ٦٥٦٠$

مثال ٢ : متتالية هندسية حدّها الخامس ١٦ ، وحدّها الثامن ١٢٨ ، أجد:

١ المتتالية.

٢ مجموع الحدود السبعة الأولى منها.

الحل :

١ $ح_٥ = ١٦$ ، $أ ر^٤ = ١٦$ .... (١)

$ح_٨ = ١٢٨$ ومنها $أ ر^٧ = ١٢٨$ .... (٢)

وبقسمة (٢) على (١) ينتج أن: $\frac{أ ر^٧}{أ ر^٤} = \frac{١٢٨}{١٦} \Leftarrow ر^٣ = ٨$ ومنها ر = ٢

بالتعويض في المعادلة (١) ينتج أن ١٦ أ = ١٦ ومنها أ = ١

المتتالية هي ١ ، ٢ ، ٤ ،..............

٢ $جـ_٧ = \frac{١ \times (١ - ٢^٧)}{١ - ٢} = \frac{١ \times (١ - ١٢٨)}{-١} = ١٢٧$

تمارين ومسائل ٣ - ٦

١ إذا كان الحدّ الأول من متسلسلة هندسية = ١ ، والحدّ الأخير = ٦٤ ، ومجموع حدودها = ٨٥ ، أجد أساسها.

٢ أجد $\sum_{ر=١}^{١٠} ٣^{ر-٨}$

ورقة عمل (١)

١ أجد أساس المتتالية الهندسية التي حدّها الأول = ٣ ، وحدّها الأخير ١٥٣٦ و مجموع حدودها ٣٠٦٩

٢ أجد مجموع ٢٥ حداً الأولى من المتتالية التي حدها العام $ح_ن$ =

$$\begin{cases} ٢ن + ١ \quad ، \quad ن \in \{١ ، ٣ ، ٥ ، \dots\} \\ ٥ن + ١ \quad ، \quad ن \in \{٢ ، ٤ ، ٦ ، \dots\} \end{cases}$$

اختبار الوحدة

س١: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١- ما عدد حدود المتتالية الهندسية: ٨١، ٢٧، ٩، ....، $\frac{١}{٨١}$ ؟

أ) ٨. ب) ٩. جـ) ١٠. د) ١٧.

٢- إذا كان $جـ_ن = (ن^٢ + ٢ن)$ يمثل مجموع ن حداً الأولى في متتالية حسابية، فإن قيمة الحد الخامس عشر تساوي:

أ) ٢٥٥. ب) ٣٣. جـ) ٣١. د) ٢٢٤.

٣- ما الحد العام للمتتالية ١ ، -١ ، ١ ، -١ ، ..... ؟

أ) $ح_ن = (-١)^{ن+١}$. ب) $ح_ن = ن^ن$. جـ) $ح_ن = (-ن)^ن$. د) $ح_ن = (-١)^ن$

س٢: قطعة نقود غير منتظمة، احتمال ظهور الصورة على وجهها العلوي عند إلقائها يساوي ثلاثة أمثال احتمال ظهور الكتابة، تم إلقاؤها مع قطعة نقد منتظمة مرةً واحدةً، فإذا كان المتغير العشوائي ق يمثل عدد الصور الظاهرة على الوجه العلوي، أحسب التوقع للمتغير العشوائي ق .

س٤:

أ) متتالية هندسية مجموع حدّيها الأول والثاني ١٢، ومجموع حدّيها الثالث والرابع يساوي ١٠٨. أجد هذه المتتالية.

ب) أجد $\sum_{ر=١}^{١٠} ٣^{ر-٨}$

٤ - ١ نهاية الاقتران عند نقطة ونظريات في النهايات

تعريف: إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً بجوار العدد أ *، وكانت قيم ق(س) تقترب من العدد ل كلما اقتربت قيم س من العدد أ من جهة اليسار ومن جهة اليمين، فإن نهاية الاقتران ق(س) عندما س تقترب من العدد أ تساوي ل. ويعبر عن ذلك رياضياً على النحو الآتي: $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ل.

أتعلم:

١ $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) تعني أن س ≠ أ وإنما س عدد إما أن يكون أقل من العدد أ بمقدار صغير جداً وتسمى النهاية في هذه الحالة النهاية من جهة اليسار، وتكتب رياضياً على النحو: $\lim_{س \leftarrow أ^-}$ ق(س).
أو أن يكون أكبر من العدد أ بمقدار صغير جداً، تسمى النهاية في هذه الحالة النهاية من جهة اليمين، وتكتب رياضياً على النحو: $\lim_{س \leftarrow أ^+}$ ق(س)

٢ حتى تكون $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) موجودة يجب أن تكون $\lim_{س \leftarrow أ^-}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow أ^+}$ ق(س)

٣ لإيجاد $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) ليس من الضروري أن يكون ق(س) معرفاً عند س = أ وإنما يجب أن يكون ق(س) معرفاً بجوار العدد أ.

نظرية (١):

- إذا كان ق(س) اقتراناً كثير حدود فإن $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ق(أ)
- إذا كان ق(س) = $\frac{ك(س)}{هـ(س)}$ اقتراناً نسبياً فإن $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = $\frac{ك(أ)}{هـ(أ)}$ ، هـ(أ) ≠ ٠

مثال ١ : أجد نهاية كل مما يأتي:

١ $\lim_{س \leftarrow ٢}$ (س^٣ − ٢س + ٥)

٢ $\lim_{س \leftarrow ٥} \frac{س^٣ - س + ٤}{س + ٣}$

الحل :

١ $\lim_{س \leftarrow ٢}$ (س^٣ − ٢س + ٥) = ٨ − ٤ + ٥ = ٩

٢ $\lim_{س \leftarrow ٥} \frac{س^٣ - س + ٤}{س + ٣} = \frac{١٢٥ - ٥ + ٤}{٨} = \frac{٣١}{٢}$

نشاط ١ : إذا كانت $\lim_{س \leftarrow أ}$ (أس + ٣أ) = ١٠ ، أجد قيمة / قيم أ.

$\lim_{س \leftarrow أ}$ (أس + ٣أ) = ... = ١٠

إذن أ^٢ + ٣أ − ١٠ = ٠ ، ومنها أ = ...

نظرية (٢): إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ ق(س) = ل ، $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ هـ(س) = م ، ل ، م $\in$ ح فإن:

- $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ (ق ± هـ)(س) = $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ ق(س) ± $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ هـ(س) = ل ± م
- $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ ك ق(س) = ك $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ ق(س) = ك ل ، حيث ك $\in$ ح
- $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ (ق × هـ)(س) = $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ ق(س) × $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ هـ(س) = ل × م
- $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} ق(س)}{\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} هـ(س)} = \frac{ل}{م}$ ، م $\neq$ ٠
- $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ $(ق(س))^{ن}$ = $(\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} ق(س))^{ن}$ = $ل^{ن}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب
- $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ $(ق(س))^{\frac{١}{ن}}$ = $(\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} ق(س))^{\frac{١}{ن}}$ = $(ل)^{\frac{١}{ن}}$ بشرط أن ل > ٠ عندما ن عدد زوجي

مثال ٢ : إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ ق(س) = ٣ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ هـ(س) = $^{-}$٢ أجد قيمة ما يأتي:

١ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ (٣ق + ٥هـ)(س)

٢ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} (\frac{ق(س)}{هـ(س)})$

٣ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ (٢ق(س) − $هـ^{٣}$(س) + $س^{٢}$)

٤ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \sqrt{ق(س) + ٦}$

الحل :

١ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ (٣ق + ٥هـ)(س) = ٣ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ ق(س) + ٥ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ هـ(س) = ٩ − ١٠ = $^{-}$١

٢ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} (\frac{ق(س)}{هـ(س)}) = \frac{٣}{^{-}٢}$ (لماذا؟)

٣ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ (٢ق(س) − $هـ^{٣}$(س) + $س^{٢}$)

= ٢ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ ق(س) − $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ $هـ^{٣}$(س) + $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ $س^{٢}$ = ١٨

٤ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \sqrt{ق(س) + ٦} = \sqrt{٣ + ٦}$ = ٣ (لماذا؟)

مثال ٣ : أجد قيمة ما يأتي:

١ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \sqrt{س^{٢} - س}$

٢ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ $(س^{٢} - س - ٣)^{٥}$

الحل :

١ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \sqrt{س^{٢} - س} = \sqrt{\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}(س^{٢} - س)} = \sqrt{٣^{٢} - ٣} = \sqrt{٦}$

٢ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ $(س^{٢} - س - ٣)^{٥}$ = $(\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}(س^{٢} - س - ٣))^{٥}$ = $^{-}$١

أتعلم: نقاط التحول: وهي النقاط التي تتغير قاعدة الاقتران في جوارها، وفي هذه الحالة نجد النهاية من اليمين ومن اليسار.

نشاط ٢: إذا كان ق(س) = [$-\frac{١}{٢}$ س + ٢] ، س ∈ [−٢ ، ٤] ، أجد:

١ $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) ٢ $\lim\limits_{س \leftarrow -١}$ ق(س) ٣ $\lim\limits_{س \leftarrow ٤}$ ق(س)

أعيد تعريف ق(س) وأكتبه على صورة اقتران متعدد القاعدة على النحو الآتي:

$$ق(س) = \begin{cases} ٣ & ، \quad س = -٢ \\ ٢ & ، \quad -٢ < س \le ٠ \\ ١ & ، \quad ٠ < س \le ٢ \\ ٠ & ، \quad ٢ < س \le ٤ \end{cases}$$

١ لإيجاد $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) ألاحظ أن ق(س) يغير قاعدته في جوار س = ٢ (نقطة تحول) لذلك أجد النهاية من اليسار واليمين: $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) = ١ ، بينما $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^+}$ ق(س) = ...

بما أن $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) ≠ $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^+}$ ق(س) ، إذن $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) =..................

٢ $\lim\limits_{س \leftarrow -١}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow -١}$ .... = ... (ألاحظ أن س = −١ هي نقطة داخلية، وليست نقطة تحول)

٣ $\lim\limits_{س \leftarrow ٤}$ ق(س) = ... (ألاحظ أن س = ٤ هي نقطة طرفية)

أتعلم: إذا كان ق(س) = جاس ، فإن $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = جا أ

إذا كان ق(س) = جتاس ، فإن $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = جتا أ

نشاط ٣: أجد قيمة ما يأتي:

١ $\lim\limits_{س \leftarrow ٠}$ (٥جتاس + ٢جا٢س) ٢ $\lim\limits_{س \leftarrow \pi}$ (جا^٢ س − جتا٤س)

الحل :

١ $\lim\limits_{س \leftarrow ٠}$ (٥جتاس + ٢جا٢س) = ٥جتا ٠ + ٢جا(٢ × ٠) = ...

٢ $\lim\limits_{س \leftarrow \pi}$ (جا^٢ س − جتا٤س) = ...

تمارين ومسائل ٤ - ١

١ إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س) = -٢ ، $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ هـ(س) = ١ أجد قيمة ما يأتي:

أ $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \frac{س\ ق(س)}{٢هـ(س)}$

ب $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ (ق(س) + ٢س)^{٥}

جـ $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \sqrt{٣ق(س) + ١٠}$

٢ أجد قيمة ما يأتي:

أ $\lim\limits_{س \leftarrow -٢} \frac{س^{٢} + س}{٢س^{٢} + ٣}$

ب $\lim\limits_{ص \leftarrow -١} \frac{\sqrt{ص^{٢} + ٣}}{٢ص^{٢} - ١}$

جـ $\lim\limits_{ع \leftarrow ١}$ (ع جتاπع + جا٢ π ع)

د $\lim\limits_{س \leftarrow ٥} |س^{٢} - ٦س + ٥|$

٣ إذا كان ق(س) = [$\frac{١}{٣}$ س + ١] أجد ما يأتي:

أ $\lim\limits_{س \leftarrow -٢}$ ق(س)

ب $\lim\limits_{س \leftarrow ٣}$ (ق(س) +٢س)

٥ إذا كان ق(س) = أس^{٢} + ٣س - ٢أ ، $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = ١٠ ، أجد $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ (ق(س) + ٣).

٦ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أس^{٢} + ٢س + ٣ &، \quad س \leq ٢ \\ ٢س + ١٠أ &، \quad س > ٢ \end{cases}$

أجد قيمة أ علماً بأن $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) موجودة.

للبحث في نهاية الاقتران ق(س)= $\frac{ك(س)}{هـ(س)}$ عندما س تقترب من أ ، والذي يعطي بالتعويض المباشر الصورة غير المعينة $\frac{\cdot}{\cdot}$ ، أبسط الاقتران بعدة طرق منها التحليل إلى العوامل أو الضرب بالمرافق، أو توحيد المقامات، ومن ثم أجد قيمة النهاية المطلوبة.

مثال ١ : أجد $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\frac{\cdot}{\cdot}$ لذلك أبحث عن قيمة هذه النهاية:

$$\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢} = \underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س + ٢} = \underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} (س - ٢) = -٤$$

نشاط ١: أجد:

١ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^٢ - ٣س}{س - ٣}$

٢ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{س^٢ + س - ٢}{١ - س}$

٣ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^٣ - ٨}{٢س^٢ - ٨}$

٤ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^٤ - ٨١}{س - ٣}$

١ التعويض المباشر يعطي ....

$$\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^٢ - ٣س}{س - ٣} = \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} .... = ...$$

٢ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{س^٢ + س - ٢}{١ - س} = \underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{(س - ١)(س + ٢)}{١ - س} = ... = -٣$ (لماذا؟)

٣ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^٣ - ٨}{٢س^٢ - ٨} = \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{٢(س - ٢)(س + ٢)} = ...$

٤ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^٤ - ٨١}{س - ٣} = \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{(س^٢ - ٩)(س^٢ + ٩)}{س - ٣} = ...$

نشاط ٢: أجد $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} \frac{س^٤ - أ^٤}{س - أ}$

$$\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} \frac{س^٤ - أ^٤}{س - أ} = ... = ٤أ^٣$$

تمارين ومسائل ٤ - ٢

١ أجد كلاً من النهايات الآتية:

أ $\lim\limits_{س \leftarrow -٢} \frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٤}$

ب $\lim\limits_{س \leftarrow ٥} \frac{س^٢ - ٧س + ١٠}{٥ - س}$

جـ $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٣ - ٥س^٢ + ٦س}{س - ٣}$

د $\lim\limits_{س \leftarrow ٥} \frac{\sqrt{٢س + ٦} - ٤}{٢س - ١٠}$

٢ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س - ٨}{س - ٢} &، \quad س < ٢ \\ \frac{أس^٢ + س - ٤}{س^٢ + ١} &، \quad س > ٢ \end{cases}$

أجد قيمة أ التي تجعل $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} ق(س)$ موجودة.

٤ – ٣ نهاية الاقتران عندما س ← ± ∞ : Limits at Infinity

نظرية: ① إذا كان ق(س) = $\frac{أ}{س}$ ، س ≠ ٠ فإن $\lim_{س \to \pm\infty}$ ق(س) = ٠

② إذا كان ق(س) = جـ فإن $\lim_{س \to \pm\infty}$ ق(س) = جـ

مثال ١ : أجد ما يأتي:

① $\lim_{س \to \infty} \frac{-٥}{س^٣}$ ② $\lim_{س \to \infty} ٧$

الحل : ① $\lim_{س \to \infty} \frac{-٥}{س^٣} = ٠$ ② $\lim_{س \to \infty} ٧ = ٧$

مثال ٢ : أجد $\lim_{س \to \infty}$ (س^٣ – ٢س + ٥)

الحل : $\lim_{س \to \infty}(س^٣ - ٢س + ٥) = \lim_{س \to \infty} س^٣(١ - \frac{٢}{س^٢} + \frac{٥}{س^٣}) = \infty(١ - ٠ + ٠) = \infty$

مثال ٣ : أجد ما يأتي:

① $\lim_{س \to \infty} \frac{٥س^٢ + ٣س + ٥}{س^٢ + ٣}$ ② $\lim_{س \to -\infty} \frac{س^٣ + س^٢ - ٢}{١ - س^٢}$

③ $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٢ + س - ٨}{س^٣ + ٢س - ٥}$

الحل : ① $\lim_{س \to \infty} \frac{٥س^٢ + ٣س + ٥}{س^٢ + ٣} = \lim_{س \to \infty} \frac{س^٢(٥ + \frac{٣}{س} + \frac{٥}{س^٢})}{س^٢(١ + \frac{٣}{س^٢})} = \frac{(٥ + ٠ + ٠)}{(١ + ٠)} = ٥$

② $\lim_{س \to -\infty} \frac{س^٣ + س^٢ - ٢}{١ - س^٢} = \lim_{س \to -\infty} \frac{س^٣(١ + \frac{١}{س} - \frac{٢}{س^٣})}{س^٢(\frac{١}{س^٢} - ١)} = \infty$ (لماذا؟)

③ $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٢ + س - ٨}{س^٣ + ٢س - ٥} = \lim_{س \to \infty} \frac{س^٢(١ + \frac{١}{س} - \frac{٨}{س^٢})}{س^٣(١ + \frac{٢}{س^٢} - \frac{٥}{س^٣})} =$ صفر

تمارين ومسائل ٤ - ٣

١ أجد ما يأتي :

أ $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} (س^٤ - ٧١س + ١٥)$

ب $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} (\frac{س^٢ - ٢}{س - ١} - \frac{س + ٢}{س + ١})$

٢ إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} (\frac{(أ - ٢) س^٤ + ٣س^٢ + ٢س - ١}{ب س^٢ + ٣س + ٣}) = -١$ ، أجد قيم أ ، ب .

٤ – ٤ الاتصال Continuity

تعريف: إذا كان ق(س) اقتراناً ، أ عدداً حقيقياً ينتمي لمجال ق(س)، فإن ق(س) اقتران متصل عند س = أ إذا كان:

1. ق(س) معرفاً عند س = أ
2. $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نها}}$ ق(س) موجودة كعدد حقيقي.
3. $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نها}}$ ق(س) = ق(أ)

مثال ١ : إذا كان ق(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٤}{\text{س} - ١}$ ، س ≠ ١ ، أبحث في اتصال ق(س) عند س = ٣ ، س = ١

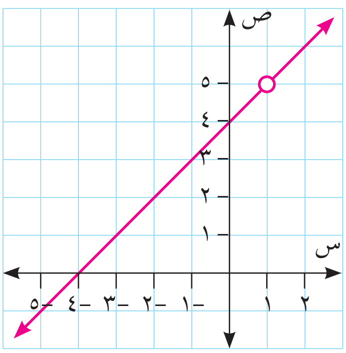
الحل : عندما س = ٣، ق(٣) = $\dfrac{(٣)^{٢} + ٣(٣) - ٤}{٣ - ١}$ = ٧ ، $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}$ ق(س) = $\dfrac{(٣)^{٢} + ٣(٣) - ٤}{٣ - ١}$ = ٧

$\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}$ ق(س) = ق(٣) ، إذن ق(س) متصل عند س = ٣

ق(س) غير معرف عند س = ١

إذن ق(س) غير متصل عند س = ١

(ألاحظ أن $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}}$ ق(س) موجودة).



مثال ٢ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{س} - ٣ & ، \quad \text{س} < ١ \\ \sqrt{\text{س}^{٣} - \text{س} + ١} & ، \quad ١ \leq \text{س} \leq ٣ \\ ٥ & ، \quad \text{س} > ٣ \end{cases}$

أبحث في اتصال ق(س) عندما س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ .

الحل :

1. عندما س = ٠ ، ق(٠) = ٠ + ٠ − ٣ = −٣ ،

$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}}$ ق(س) = $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}}$ (س^{٢} + س − ٣) = −٣

ق(٠) = $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}}$ ق(س) ، إذن ق(س) متصل عند س = ٠

٢ عندما س = ١ (ألاحظ أن س = ١ نقطة تحول)،

$$\text{ق}(١) = \sqrt{١^{٣} - ١ + ١} = ١$$

$$\underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نهــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نهــا}}\ (\text{س}^{٢} + \text{س} - ٣) = -١$$

$$\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نهــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نهــا}}\ \sqrt{\text{س}^{٣} - \text{س} + ١} = ١$$

$$\underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نهــا}}\ \text{ق}(\text{س}) \neq \underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نهــا}}\ \text{ق}(\text{س})$$

$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}}\ \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة ، إذن ق(س) منفصل عند س = ١

٣ عند س = ٢

$$\text{ق}(٢) = \sqrt{٢^{٣} - ٢ + ١} = \sqrt{٧}$$

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}}\ \sqrt{٢^{٣} - ٢ + ١} = \sqrt{٧}$$

$\text{ق}(٢) = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}}\ \text{ق}(\text{س})$ ، إذن ق(س) متصل عند س = ٢

٤ عند س = ٣ (ألاحظ أنه عند س = ٣ يوجد نقطة تحول)

$$\text{ق}(٣) = \sqrt{٣^{٣} - ٣ + ١} = ٥$$

$$\underset{\text{س}\to ٣^{-}}{\text{نهــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٣^{-}}{\text{نهــا}}\ \sqrt{\text{س}^{٣} - \text{س} + ١} = ٥$$

$\underset{\text{س}\to ٣^{+}}{\text{نهــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٣^{+}}{\text{نهــا}}\ ٥ = ٥$ ، إذن $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٥$

$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(٣)$ ، إذن ق(س) متصل عند س = ٣

٥ عندما س = ٥

$\text{ق}(٥) = ٥$ ، $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهــا}}\ ٥ = ٥$

$\text{ق}(٥) = \underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهــا}}\ \text{ق}(\text{س})$ إذن ق(س) متصل عند س = ٥

أتعلم: **إذا كان ق(س) اقتراناً متعدد القاعدة، ويغير قاعدته عند س = أ**
فإن ق(س) متصل عند س = أ ، إذا كان $\underset{\text{س}\to \text{أ}^{-}}{\text{نهــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to \text{أ}^{+}}{\text{نهــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{أ})$

نشاط ١: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{|س^٢ - س - ٢|}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ ٣ & ، س = ٢ \end{cases}$ ، أبحث في اتصال ق(س) عندما س = ٢

أعيد تعريف ق(س) وأكتبه على صورة اقتران متعدد القاعدة على النحو الآتي:

ق(س) = ...

ق(٢) = ...

$\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) = ... ، $\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ ق(س) = ...، إذن $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) ....

ق(٢) .... $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) ، ومنها ....

مثال ٣: إذا كان ق(س) = س + $[\frac{س}{٢}]$ ، س ∈ [-٢، ٤[أبحث في اتصال ق(س) عند س = -١ ، ٢.

الحل : أعيد تعريف ق(س)، وأكتب ق(س) على صورة اقتران متعدد القاعدة على النحو الآتي:

ق(س) = $\begin{cases} س - ١ & ، -٢ \leq س < ٠ \\ س & ، ٠ \leq س < ٢ \\ س + ١ & ، ٢ \leq س < ٤ \end{cases}$

١ عندما س = -١

ق(-١) = -١ - ١ = -٢ ، $\lim_{س \leftarrow -١}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow -١}$ (س - ١) = -٢

ق(-١) = $\lim_{س \leftarrow -١}$ ق(س) ، إذن ق(س) متصل عند س = -١

٢ عندما س = ٢ (ألاحظ أن س = ٢ نقطة تحول)

ق(٢) = ٢ + ١ = ٣

$\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ س = ٢ ، إذن ق(س) منفصل عند س = ٢ (لماذا؟)

ماذا ألاحظ في سلوك الإقتران عند س = ٢ ؟

نظرية: **إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين عند س = أ ، فإن كلاً من الاقترانات الآتية:**

متصلة عند س = أ :

١ **(ق ± هـ)(س)** ٢ **(ق × هـ)(س)**

٣ **ك × ق(س) ، حيث ك عدد ثابت.** ٤ **$(\frac{ق}{هـ})$ (س) ، بشرط أن هـ (أ) ≠ ٠**

٥ **$\sqrt[ن]{ق(س)}$: بشرط أن ق(أ) > ٠ ، إذا كانت ن زوجية (لماذا؟)**

أتعلم:

١ **إذا كان ق(س) اقتراناً كثير حدود فإن ق(س) اقتران متصل ∀ س ∈ ح.**

٢ **إذا كان ق(س) اقتراناً نسبياً فإن ق(س) اقتران متصل ∀ س ∈ ح – {أصفار المقام} .**

٣ **إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً ∀ س ∈ ح فإن $ق^{ن}$(س) اقتران متصل ∀ س ∈ ح ، ن عدد صحيح موجب.**

٤ **إذا كان ق(س) = جاس فإن ق(س) اقتران متصل ∀ س ∈ ح.**

٥ **إذا كان ق(س) = جتاس فإن ق(س) اقتران متصل ∀ س ∈ ح.**

٦ **إذا كان ق(س) = |هـ(س)|، فإن ق(س) اقتران متصل ∀ س ∈ ح ، عندما هـ(س) متصل.**

مثال ٤ : أبحث في اتصال كل من الاقترانات الآتية:

١ ق(س) = $س^٢$جتاس – $(\frac{س + ٣}{س^٢ + ٤})$

٢ ك(س) = ٥ + |$س^٢$– س – ١٢|

الحل :

١ ق(س)= $س^٢$جتاس – $(\frac{س + ٣}{س^٢ + ٤})$ متصل ∀ س ∈ ح لأنه حاصل طرح اقترانين متصلين.
($س^٢$ اقتران متصل ∀ س ∈ ح لأنه كثير حدود، جتاس اقتران متصل ∀ س ∈ ح، $س^٢$جتاس متصل لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين، $(\frac{س + ٣}{س^٢ + ٤})$ متصل ∀ س ∈ ح لأنه اقتران نسبي والمقام لا يساوي صفراً).

٢ ك(س) = ٥ + |$س^٢$– س – ١٢| متصل ∀ س ∈ ح لأنه حاصل جمع اقترانين متصلين.
(٥ اقتران متصل ∀ س ∈ ح لأنه اقتران ثابت، |$س^٢$– س – ١٢| اقتران متصل ∀ س ∈ ح لأنه اقتران قيمة مطلقة لاقتران كثير حدود متصل ∀ س ∈ ح)

أتعلم: إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على [أ، ب] فإن:

ق(س) اقتران متصل ∀ س ∈ [أ ، ب] إذا كان:

- ق(س) اقتراناً متصلاً عند كل نقطة في] أ ، ب[
- ق(س) متصلاً عند س = أ من جهة اليمين.
- ق(س) متصلاً عند س = ب من جهة اليسار.

مثال ٥ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} - ١ & ، \quad -١ \leq \text{س} < ٠ \\ \text{جتا}(٢\pi \text{س}) & ، \quad ٠ \leq \text{س} < ٢ \\ ١٠ & ، \quad \text{س} = ٢ \end{cases}$

أبحث في اتصال ق(س) في [-١ ، ٢]

الحل :

١ عندما -١ ≤ س < ٠ ، ق(س) = س^{٢} - ١ متصل لأنه كثير حدود.

٠ < س < ٢ ، ق(س) = جتا(٢ πس) متصل لأنه اقتران جتا س.

٢ عندما س = ٢، (نقطة طرفية) : ق(٢) = ١٠

$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢^-}$ ق(س) = ١، ومنها ق(٢) ≠ $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢^-}$ ق(س)

ومنها ق(س) منفصل عند س = ٢ من جهة اليسار.

٣ عندما س = ٠، (نقطة تحول) : ق(٠) = ١ ، $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠^+}$ ق(س)= $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠^+}$ جتا(٢ πس) = ١

$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠^-}$ ق(س) = $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠^-}$ (س^{٢} - ١) = -١، ومنها ق(س) منفصل عند س = صفر

إذن ق(س) متصل ∀ س ∈ [-١ ، ٢[- {صفر} (ق(س) غير متصل على [-١ ، ٢])

تمارين ومسائل ٤ - ٤

١ أبحث في اتصال كل من الاقترانات الآتية عند النقطة المطلوبة:

أ ق(س) = |س^{٢} + ٢س − ٨| + ٢س ، عندما س = ٢

ب ق(س) = س^{٢} × [س − ٢ , ٠] ، عندما س = − ٨ , ٠

٢ إذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\text{٥س} + ١} - ٤}{\text{س} - ٣} & \text{، س} \neq ٣ \\ ٢ & \text{، س} = ٣ \end{cases}$$

، أبحث في اتصال ق(س) عندما س = ٣.

٣ أبحث في اتصال كل من الاقترانات الآتية على مجالها:

أ ق(س) = جا٢س + |٣س − ٣| ، س $\in$ ح.

ب ق(س) = [١ − $\frac{\text{س}}{٣}$] ، س $\in$ [−٣ ، ٥].

٤ إذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} \text{س}^{٢} + ٣ & \text{، } -١ \leq \text{س} < ١ \\ \text{أس} + ٢ & \text{، } ١ \leq \text{س} < ٣ \\ \dfrac{\text{ب س} + ٢}{\text{س} + ١} & \text{، } ٣ \leq \text{س} < ٥ \end{cases}$$

أجد قيم أ ، ب التي تجعل ق(س) متصلاً على مجاله.

تمارين عامة

١ أضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ إذا كانت $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} (٣\text{ق(س)} - ٢\,\text{س}) = ٢$، ما قيمة $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{ق(س)}$؟

أ) -٢ ب) -١ ج) ١ د) ٢

٢ إذا كان $\text{ق}(-٢) = ٣$ ، $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} = -٥$ ، ما قيمة $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} ٣\text{ق}(\text{س} - ٣)$؟

أ) -١٥ ب) -٦ ج) ٣ د) ٩

٣ إذا كان $\text{ق(س)} = \text{س}^{٢} - ١$، $\text{هـ(س)} = \frac{١}{\text{س} - ١}$ ، ما قيمة $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} (\text{ق} \times \text{هـ})(\text{س})$؟

أ) كمية غير معرفة ب) -١ ج) ٢ د) ٥

٤ ما قيمة $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا} \frac{\pi}{٢}}{\pi}$ ؟

أ) -١ ب) π ج) $\frac{١}{\pi}$ د) ١

٥ ما قيمة $\underset{\text{س} \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س}^{٣} - ٥}{\text{س}^{٣} + ٣}$ ؟

أ) $-\infty$ ب) ٣ ج) ٥ د) ∞

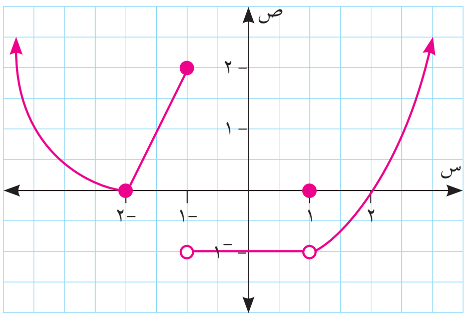
٢ إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{\text{س}^{٢} - (٣ - ٢\text{ب})\,\text{س} - ٦\text{ب}}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} \neq ٣ \\ ١١ & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$

اقتراناً متصلاً على ح أجد قيمة/ قيم ب.

٣ إذا كانت $\underset{\text{س} \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}{\text{أ}\,\text{س}^{٢}\,(\text{س} + ١)^{\text{ن}}} = -٢$ ، أجد قيم كل من أ ، ن .

ورقة عمل (٤)

١ إذا كانت $\lim\limits_{س \to -\infty} \frac{(س^{٢} + ١)^{٢}}{أ س^{٢} (س + ١)^{ن}} = -٢$ ، أجد قيم كل من أ ، ن .



٢ يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ق(س) المعرف على ح، بالاعتماد عليه أجيب عن الأسئلة الآتية:

أ أجد الإحداثيات السينية لنقاط انفصال ق(س).

ب هل ق(س) متصل على [-٢ ، -١] ، ولماذا؟

جـ هل ق(س) متصل [-١ ، ∞ [، ولماذا؟

د هل ق(س) متصل]-∞ ، -٢] ، ولماذا؟

هـ هل ق(س) متصل على مجاله، ولماذا؟

نموذج امتحان الفصل الثاني

س١: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١- إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على ع، وكانت $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ (٥ق(س+٢) −٢س) = ١٨ فإن ق(٣) تساوي:

أ) ٨ , ٤ .   ب) ٢٠ .   جـ) ٤ .   د) ٢ , ٣ .

٢- الاقتران ق(س) = [س+٤ , ٠] متصل عند س تساوي:

أ) صفر.   ب) ٦ , ٠ .   جـ) ٦ , ١ .   د) −٤ , ٠ .

٣- $\underset{\text{س}\leftarrow -\infty}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}^٢ - ٢)(٢\text{س} + ٣)}{\text{س}^٢ - ٤\text{س}^٣}$ يساوي:

أ) −٥ , ٠ .   ب) ٥ , ٠ .   جـ) ∞ .   د) صفر

٤- $\underset{\text{س}\leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \frac{|\text{س}^٢ - ٩|}{\text{س} - ٣}$:

أ) ٦ .   ب) −٦ .   جـ) صفر.   د) غير موجودة.

س٢: أبحث في اتصال كل من الاقترانات الآتية على مجالها:

أ) ق(س) = جا٢س + |٣س − ٣| ، س ∈ ح.

ب) ق(س) = $[١ - \frac{\text{س}}{٣}]$ ، س ∈ [−٣ ، ٥].

ملحق قوانين رياضية:

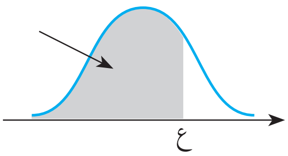
❶
- $جا^2 س + جتا^2 س = 1$
- $ظا^2 س + 1 = قا^2 س$
- $1 + ظتا^2 س = قتا^2 س$

❷
- $جا(\pi - س) = جاس$
- $جا(\pi + س) = - جاس$
- $جا(- س) = - جاس$

❸
- $جتا(\pi - س) = - جتاس$
- $جتا(\pi + س) = - جتاس$
- $جتا(- س) = جتاس$

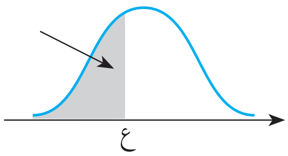
❹
- $ظا(\pi - س) = - ظاس$
- $ظا(\pi + س) = ظاس$
- $ظا(- س) = - ظاس$

❺
- $جا(2س) = 2 جاس جتاس$
- $جتا(2س) = \begin{cases} جتا^2 س - جا^2 س \\ 1 - 2 جتا^2 س \\ 2 جا^2 س - 1 \end{cases}$



تابع جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩
١,٥	٠,٩٣٣٢	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٩٤	٠,٩٤٠٦	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤٤١
١,٦	٠,٩٤٥٢	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٩٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٤٥
١,٧	٠,٩٥٥٤	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٩٩	٠,٩٦٠٨	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦٣٣
١,٨	٠,٩٦٤١	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٩٩	٠,٩٧٠٦
١,٩	٠,٩٧١٣	٠,٩٧١٩	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٦٧
٢,٠	٠,٩٧٧٢	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨١٢	٠,٩٨١٧
٢,١	٠,٩٨٢١	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٧
٢,٢	٠,٩٨٦١	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٩٠
٢,٣	٠,٩٨٩٣	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٨	٠,٩٩٠١	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩١١	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١٦
٢,٤	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٦
٢,٥	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٥٢
٢,٦	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٤
٢,٧	٠,٩٩٦٥	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٤
٢,٨	٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٨١
٢,٩	٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦
٣,٠	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠
٣,١	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣
٣,٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥
٣,٣	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٧
٣,٤	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٨
٣,٥	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨
٣,٦	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩
٣,٧	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩



ملحق: جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
−٣,٧	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١
−٣,٦	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١
−٣,٥	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢
−٣,٤	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٢
−٣,٣	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٣
−٣,٢	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥
−٣,١	٠,٠٠١٠	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧
−٣,٠	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١٠	٠,٠٠١٠
−٢,٩	٠,٠٠١٩	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٧	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٤	٠,٠٠١٤
−٢,٨	٠,٠٠٢٦	٠,٠٠٢٥	٠,٠٠٢٤	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٢	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢٠	٠,٠٠١٩
−٢,٧	٠,٠٠٣٥	٠,٠٠٣٤	٠,٠٠٣٣	٠,٠٠٣٢	٠,٠٠٣١	٠,٠٠٣٠	٠,٠٠٢٩	٠,٠٠٢٨	٠,٠٠٢٧	٠,٠٠٢٦
−٢,٦	٠,٠٠٤٧	٠,٠٠٤٥	٠,٠٠٤٤	٠,٠٠٤٣	٠,٠٠٤١	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٣٩	٠,٠٠٣٨	٠,٠٠٣٧	٠,٠٠٣٦
−٢,٥	٠,٠٠٦٢	٠,٠٠٦٠	٠,٠٠٥٩	٠,٠٠٥٧	٠,٠٠٥٥	٠,٠٠٥٤	٠,٠٠٥٢	٠,٠٠٥١	٠,٠٠٤٩	٠,٠٠٤٨
−٢,٤	٠,٠٠٨٢	٠,٠٠٨٠	٠,٠٠٧٨	٠,٠٠٧٥	٠,٠٠٧٣	٠,٠٠٧١	٠,٠٠٦٩	٠,٠٠٦٨	٠,٠٠٦٦	٠,٠٠٦٤
−٢,٣	٠,٠١٠٧	٠,٠١٠٤	٠,٠١٠٢	٠,٠٠٩٩	٠,٠٠٩٦	٠,٠٠٩٤	٠,٠٠٩١	٠,٠٠٨٩	٠,٠٠٨٧	٠,٠٠٨٤
−٢,٢	٠,٠١٣٩	٠,٠١٣٦	٠,٠١٣٢	٠,٠١٢٩	٠,٠١٢٥	٠,٠١٢٢	٠,٠١١٩	٠,٠١١٦	٠,٠١١٣	٠,٠١١٠
−٢,١	٠,٠١٧٩	٠,٠١٧٤	٠,٠١٧٠	٠,٠١٦٦	٠,٠١٦٢	٠,٠١٥٨	٠,٠١٥٤	٠,٠١٥٠	٠,٠١٤٦	٠,٠١٤٣
−٢,٠	٠,٠٢٢٨	٠,٠٢٢٢	٠,٠٢١٧	٠,٠٢١٢	٠,٠٢٠٧	٠,٠٢٠٢	٠,٠١٩٧	٠,٠١٩٢	٠,٠١٨٨	٠,٠١٨٣
−١,٩	٠,٠٢٨٧	٠,٠٢٨١	٠,٠٢٧٤	٠,٠٢٦٨	٠,٠٢٦٢	٠,٠٢٥٦	٠,٠٢٥٠	٠,٠٢٤٤	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٣٣
−١,٨	٠,٠٣٥٩	٠,٠٣٥١	٠,٠٣٤٤	٠,٠٣٣٦	٠,٠٣٢٩	٠,٠٣٢٢	٠,٠٣١٤	٠,٠٣٠٧	٠,٠٣٠١	٠,٠٢٩٤
−١,٧	٠,٠٤٤٦	٠,٠٤٣٦	٠,٠٤٢٧	٠,٠٤١٨	٠,٠٤٠٩	٠,٠٤٠١	٠,٠٣٩٢	٠,٠٣٨٤	٠,٠٣٧٥	٠,٠٣٦٧
−١,٦	٠,٠٥٤٨	٠,٠٥٣٧	٠,٠٥٢٦	٠,٠٥١٦	٠,٠٥٠٥	٠,٠٤٩٥	٠,٠٤٨٥	٠,٠٤٧٥	٠,٠٤٦٥	٠,٠٤٥٥
−١,٥	٠,٠٦٦٨	٠,٠٦٥٥	٠,٠٦٤٣	٠,٠٦٣٠	٠,٠٦١٨	٠,٠٦٠٦	٠,٠٥٩٤	٠,٠٥٨٢	٠,٠٥٧١	٠,٠٥٥٩
−١,٤	٠,٠٨٠٨	٠,٠٧٩٣	٠,٠٧٧٨	٠,٠٧٦٤	٠,٠٧٤٩	٠,٠٧٣٥	٠,٠٧٢١	٠,٠٧٠٨	٠,٠٦٩٤	٠,٠٦٨١
−١,٣	٠,٠٩٦٨	٠,٠٩٥١	٠,٠٩٣٤	٠,٠٩١٨	٠,٠٩٠١	٠,٠٨٨٥	٠,٠٨٦٩	٠,٠٨٥٣	٠,٠٨٣٨	٠,٠٨٢٣
−١,٢	٠,١١٥١	٠,١١٣١	٠,١١١٢	٠,١٠٩٣	٠,١٠٧٥	٠,١٠٥٦	٠,١٠٣٨	٠,١٠٢٠	٠,١٠٠٣	٠,٠٩٨٥
−١,١	٠,١٣٥٧	٠,١٣٣٥	٠,١٣١٤	٠,١٢٩٢	٠,١٢٧١	٠,١٢٥١	٠,١٢٣٠	٠,١٢١٠	٠,١١٩٠	٠,١١٧٠
−١,٠	٠,١٥٨٧	٠,١٥٦٢	٠,١٥٣٩	٠,١٥١٥	٠,١٤٩٢	٠,١٤٦٩	٠,١٤٤٦	٠,١٤٢٣	٠,١٤٠١	٠,١٣٧٩
−٠,٩	٠,١٨٤١	٠,١٨١٤	٠,١٧٨٨	٠,١٧٦٢	٠,١٧٣٦	٠,١٧١١	٠,١٦٨٥	٠,١٦٦٠	٠,١٦٣٥	٠,١٦١١
−٠,٨	٠,٢١١٩	٠,٢٠٩٠	٠,٢٠٦١	٠,٢٠٣٣	٠,٢٠٠٥	٠,١٩٧٧	٠,١٩٤٩	٠,١٩٢٢	٠,١٨٩٤	٠,١٨٦٧
−٠,٧	٠,٢٤٢٠	٠,٢٣٨٩	٠,٢٣٥٨	٠,٢٣٢٧	٠,٢٢٩٦	٠,٢٢٦٦	٠,٢٢٣٦	٠,٢٢٠٦	٠,٢١٧٧	٠,٢١٤٨
−٠,٦	٠,٢٧٤٣	٠,٢٧٠٩	٠,٢٦٧٦	٠,٢٦٤٣	٠,٢٦١١	٠,٢٥٧٨	٠,٢٥٤٦	٠,٢٥١٤	٠,٢٤٨٣	٠,٢٤٥١
−٠,٥	٠,٣٠٨٥	٠,٣٠٥٠	٠,٣٠١٥	٠,٢٩٨١	٠,٢٩٤٦	٠,٢٩١٢	٠,٢٨٧٧	٠,٢٨٤٣	٠,٢٨١٠	٠,٢٧٧٦
−٠,٤	٠,٣٤٤٦	٠,٣٤٠٩	٠,٣٣٧٢	٠,٣٣٣٦	٠,٣٣٠٠	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٢٨	٠,٣١٩٢	٠,٣١٥٦	٠,٣١٢١
−٠,٣	٠,٣٨٢١	٠,٣٧٨٣	٠,٣٧٤٥	٠,٣٧٠٧	٠,٣٦٦٩	٠,٣٦٣٢	٠,٣٥٩٤	٠,٣٥٥٧	٠,٣٥٢٠	٠,٣٤٨٣
−٠,٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤١٦٨	٠,٤١٢٩	٠,٤٠٩٠	٠,٤٠٥٢	٠,٤٠١٣	٠,٣٩٧٤	٠,٣٩٣٦	٠,٣٨٩٧	٠,٣٨٥٩
−٠,١	٠,٤٦٠٢	٠,٤٥٦٢	٠,٤٥٢٢	٠,٤٤٨٣	٠,٤٤٤٣	٠,٤٤٠٤	٠,٤٣٦٤	٠,٤٣٢٥	٠,٤٢٨٦	٠,٤٢٤٧
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٢٠	٠,٤٨٨٠	٠,٤٨٤٠	٠,٤٨٠١	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٢١	٠,٤٦٨١	٠,٤٦٤١