١١

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيـــات

الفروع: الريادي والفندقي والاقتصاد المنزلي والزراعي

الرزم التعليمية

٢٠٢٤

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 - رام الله - فلسطين
pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

هاتف 2983280-2-970+ | فاكس 2983250-2-970+
https://www.facebook.com/Palestinian.MOEHE/
mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

المحتويات

١	المتتاليات (Sequences)	٢
٢	المتسلسلات (Series)	٤
٣	المتتاليات الحسابية (Arithmetic Sequences)	٧
٤	مجموع المتسلسلة الحسابية (Sum of Arithmetic Series)	٩
٥	المتتاليات الهندسية (Geometric Sequences)	١١
٦	مجموع المتسلسلة الهندسية (Sum of Geometric Series)	١٣
٧	الأرقام القياسية (Index Numbers)	١٥
٨	الرقم القياسي لمجموعة من السلع (Index of a Group of Goods)	١٨
٩	الأرقام القياسية المرجّحة (Weighted Index No.)	٢١
١٠	حلّ معادلة خطيّة بمتغير واحد (Solving a Linear Equation With One Variable)	٣٠
١١	حل نظام من معادلتين خطّيّتين (Solving a System of two Linear Equations)	٣٣
١٢	حل نظام مكون من معادلة خطية، ومعادلة تربيعية (Solving a System of Linear and Quadratic Equation)	٣٥
١٣	الدفعات (Payments)	٣٧
١٤	القيمة المستقبلية للدفعات المنتظمة (Future Value of Annuity)	٣٩
١٥	القيمة الحالية للدفعات المنتظمة (Present Value of Annuity)	٤٢
١٦	التقسيط (Installment)	٤٤
١٧	الفائدة (Interest)	٦٤
١٨	نهاية الاقتران (Limit of a Function)	٥٤
١٩	قوانين النهايات (Limits Rules)	٥٧
٢٠	نهاية الاقتران متعدد القاعدة (Limits of Multibase Function)	٦١
٢١	الاتصال (Continuity)	٦٣

النتاجات

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من هذا الرزمة أن يكونوا قادرين على:

١. تعرف المتتالية وحدودها، وحدّها العام.
٢. إيجاد الحدّ العام للمتتالية الحسابية.
٣. إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية.
٤. إيجاد الحدّ العام للمتتالية الهندسية.
٥. إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية.
٦. التعرف إلى الأرقام القياسية، وأنواعها.
٧. إيجاد قيمة الرقم القياسي بأنواعه المختلفة.
٨. توظيف الأرقام القياسية مؤشرات لقياس التغير النسبي الذي طرأ على ظاهرة معينة، سواء أكانت سعراً، أم كميةً، بالنسبة لأساس معين قد يكون فترةً زمنيةً، أو مكاناً جغرافياً في الحياة.
٩. حل مسائل حياتية باستخدام مفاهيم الوحدة.
١٠. حل نظام من معادلتين خطّيتين.
١١. التعرف إلى مفهوم الدفعات، وكيفية حسابها.
١٢. التعرف إلى مفهوم التقسيط، وحساباته.
١٣. التعرف إلى الفائدة، وحسابها.
١٤. حل نظام مكون من معادلتين، إحداهما خطّيّة، والأخرى تربيعيّة.
١٥. حل المعادلات والمتباينات التي تتضمن القيمة المطلقة.
١٦. التعرف على القيمة المستقبلية للدفعات المنتظمة.
١٧. التعرف على القيمة الحالية للدفعات المنتظمة.
١٨. حلّ معادلة خطيّة بمتغير واحد
١٩. التعرف إلى مفهوم نهاية الاقتران عند نقطة.
٢٠. إيجاد نهاية الاقتران عند نقطة، باستخدام الجدول والرسم البياني.
٢١. استخدام نهاية اقتران متعدد القاعدة عند نقطة.
٢٢. بحث اتصال اقتران عند نقطة.

١ المتتاليات (Sequences)

نشاط (١)

تعمل الشركات الفلسطينية بصورة عامة على رفع المستوى المعيشي للموظفين، من خلال الزيادة المستمرة في رواتبهم، فإذا كان سلّم رواتب الموظفين في شركة للمنظفات في غزة، كما في الجدول الآتي:

السنة	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة	....
الراتب بالدينار	٢٠٠	٢٥٠	٣٠٠	٣٥٠	....

يمكن ترتيب راتب الموظف حسب سنة الخدمة كما يأتي:

٢٠٠، ٢٥٠ ، ٣٠٠ ، ٣٥٠ ، .....

راتب الموظف في السنة الرابعة هو ٣٥٠ ديناراً.

راتب الموظف في السنة السابعة هو .....

راتب الموظف في السنة العاشرة هو .....

نشاط (٢)

أتأمل هذه الأنماط من الأعداد، ثم أكتب ثلاثة حدود أخرى لكل نمط.

أ) ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، .....

ب) ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، .....

جـ) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، .....

تعريف

المتتالية: هي اقتران مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية، ومداه مجموعة الأعداد الحقيقية، أو مجموعة جزئية منها. ويسمى كل عدد فيها حداً، وتكتب على الصورة $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ... ، $ح_ن$

فهي ترتيب من الأعداد، وفق نمط، أو قاعدة معينة.

نشاط (٣)

لديك المتتالية الآتية:

٣، ٥، ٧، ٩، ....

الحدّ الأول في هذه المتتالية هو $ح_{١}$ = ٣

الحدّ الثاني في هذه المتتالية هو $ح_{٢}$ = ٥

الحدّ السابع في هذه المتتالية هو $ح_{٧}$ = ١٥ لماذا؟

الحدّ الخامس عشر في هذه المتتالية هو $ح_{١٥}$ = ...

الحدّ مئة في هذه المتتالية هو $ح_{١٠٠}$ = ...

يمكن إيجاد قيمة أي حدّ في هذه المتتالية، باستخدام العلاقة $ح_{ن}$ = ٢ن + ١ ويسمى الحدّ العام لهذه المتتالية.

قيمة $ح_{٢٠}$ = ٢ × ... + ١ = ...

نشاط (٤)

الحدود الأربعة الأولى من المتتالية التي حدّها العام $ح_{ن}$ = ٣ن + ١

$ح_{١}$ = ٣ × ١ + ١ = ٤

$ح_{٢}$ = ٣ × ٢ + ١ = ٧، $ح_{٣}$ = ٣ × ... + ١ = ...

$ح_{٤}$ = ... وهكذا

إذاً المتتالية هي: ..... ، ..... ، ..... ، .....

تمارين ومسائل

١ تعاقد موظف للعمل في شركة بمدينة القدس براتب سنوي قدره ٦٠٠٠ دينار، على أن يعطى علاوةً سنويةً ثابتةً قدرها ١٠٠ دينار. أجد متتالية راتب الموظف في السنوات الأربع الأولى من عمله؟

٢ أكتب الحدّ العام لكل من المتتاليات الآتية:

١) ١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، .....

٢) ٤، ٨، ١٢، ١٦، .....

٢ المتسلسلات (Series)

نشاط (١)

تهتم جمعية لرعاية المعاقين بتأهيل طلاب متلازمة داون لمهن بسيطة، فقامت الجمعية بتأهيل ٥ طلاب في الشهر الأول، و٧ طلاب في الشهر الثاني و ٩ طلاب في الشهر الثالث، وهكذا...

فتكون المتتالية التي تمثل الطلاب الذين تم تأهيلهم هي ..... ، ..... ، .....

يمكن كتابة مجموع الطلاب الذين تم تأهيلهم بالصورة ٥ + ٧ + ٩ + ...

تسمى هذه الصورة بالمتسلسلة.

تعريف المتسلسلة: هي مجموع حدود من متتالية، قد تكون هذه الحدود أعداداً أو اقترانات، ويمكن كتابة المتسلسلات بصورة مختصرة، حيث نستخدم الرمز $\sum$ ليدلّ على رمز المجموع.

نشاط (٢)

أعوض في المتسلسلة $\sum_{س=١}^{٤} (٢س + ٣)$

قيم س =١، ٢، ٣، ٤ على التوالي فأحصل على:

$$\sum_{س=١}^{٤} (٢س + ٣) = (٢\times١+٣) + (٢\times٢+٣) + \ldots\ldots + \ldots\ldots$$

$$= ٥ + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots$$

نشاط (٣)

١) لديك المتتالية الآتية ١، ٢، ٣، ٤، ٥، .....

المتسلسلة المرافقة لها هي .....

يمكن كتابة المتسلسلة بالصورة المختصرة على الصورة $\sum_{س=١}^{\infty} س$

٢) لديك المتتالية الآتية ٤×١، ٤×٢، ٤×٣، ....، ٤×٩

المتسلسلة المرافقة لها هي .....

المتسلسلة بالصورة المختصرة هي .....

تمارين ومسائل

١ أكتب المفكوك فيما يأتي:

أ) $\sum_{ر=١}^{٣} (-٣ر + ٢)$

ب) $\sum_{ر=١}^{٣} (٤ر + ر^{٢})$

جـ) $\sum_{ر=١}^{٤} (-١)^{ر}$

د) $\sum_{ر=١}^{٣} ٥$

٢ أستخدم الرمز $\sum$ للتعبير عن المتسلسلات.

أ) ك + ٢ك + ٣ك + ... + ٨ك، ك ثابت.

ب) $\frac{١}{٥} + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٥} + ... + \frac{١}{٥٠}$

جـ) $٤ + \frac{٤}{٢} + \frac{٤}{٣} + \frac{٤}{٤} + ... + \frac{٤}{٢٠}$

ورقة عمل

١- الحد العام للمتتالية: $\frac{-١}{٣}$ ، ١ ، -٣ ، ... هو:

أ) ٤ن − ٧ ب) $(\frac{-١}{٣})^{ن}$ ج) $\frac{-١}{٣} \times (-٣)^{ن-١}$ د) $\frac{-١}{٣} + ٣ (ن - ١)$

٢- الحد العام للمتتالية: (-٥ ، -١ ، ٣ ، ٧ ، ...) هو:

أ) $-(٤ن + ٥)$ ب) ٤ن − ٩ ج) ن − ٥ د) ٤ن

٣- الحد العام للمتتالية: ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ١٧ ، ... هو:

أ) ٣ن + ٥ ب) ٢ن + ٧ ج) ٦ن + ٢ د) ٨ن − ٥

٤- الحد العام للمتتالية: -٢ ، ٣ ، ٨ ، ١٣ ، ... هو:

أ) -٢ + (ن + ١) × ٥ ب) -٢ + (ن − ١) × ٥ ج) -٢ + ٥ن د) -٢ − ٥ن

٥- إذا كانت المتتالية: ٦، ٩، ١٢، .... فإن $ح_{١٢}$ يساوي:

أ) ٣٦ ب) ٣٩ ج) ٤٢ د) ٤٥

٦- قيمة $\sum_{ن=١}^{٥} (٢ن - ٥) =$

أ) ٨٧ ب) ٣٧ ج) ٥٧ د) ٦٧

٧- قيمة $\sum_{ن=١}^{٥} (ن - ١) =$

أ) ١ ب) ٣ ج) ١٠ د) ١١

٨- قيمة $\sum_{ن=١}^{٨} (٣ن + ٢) =$

أ) ٢٥ ب) ٢٦ ج) ١٢٠ د) ١٢٤

٣ المتتاليات الحسابية (Arithmetic Sequences)

تعريف:

المتتالية الحسابية: هي متتالية يكون فيها الفرق بين كل حدّ والحدّ السابق له مباشرة مقداراً ثابتاً، يسمى أساس المتتالية الحسابية، ويكون الحدّ العام لهذه المتتالية هو:

$ح_ن = أ + (ن - ١) ء$ حيث (أ) الحدّ الأول للمتتالية، (ن) رتبة الحد، (ء) الأساس

مثال (١): في المتتالية الحسابية ٢، ١٣، ٢٤، ٣٥، .....

أ) أجد $ح_٨$ ب) هل العدد ١١٢ أحد حدود المتتالية أم لا ؟

الحل: $أ = ٢$، $ء = ١١$

$ح_٨ = أ + ٧ ء$

$= ٧٩$ لماذا ؟

ج) أفرض أن العدد ١١٢ $= ح_ن$ = هو أحد حدود المتتالية فيكون:

$ح_ن = أ + (ن - ١) ء = ١١٢$

$١١ \times (ن - ١) + ٢ = ١١٢$

$١١ ن - ١١ = ١١٠$

$١١ ن = ١٢١$

$ن = \frac{١٢١}{١١} = ١١ \in ط^*$ وهذا يعني أن العدد ١١٢ هو أحد حدود المتتالية.

تمارين ومسائل

١ أيّ المتتاليات الآتية حسابية؟

أ) ٦، ٤، ٢، ٠، -٢، .....

ب) ١، -١، ١، -١، ١، .....

ج) $\frac{١}{٦}$ ، ١، $\frac{٥}{٦}$ ١ ، $\frac{٤}{٦}$ ٢، $\frac{٩}{٦}$ ٢ ،.....

٢ أ) أجد $ح_{١٠}$ في المتتالية -٧، -٥، -٣،.....

ب) إذا كان $ح_{ن}$ = -٢٤ في المتتالية ٣، ٠، -٣،... أجد قيمة ن.

٣ إذا كانت ٤، س، ص، -٥ حدود متتالية حسابية. أجد قيمة: س، ص؟

٤ بدأ موظف عمله في إحدى الشركات في مدينة رفح براتب سنوي قدره ٣٦٠٠ ديناراً، وأخذ يتقاضى علاوةً سنويةً ثابتةً قدرها ٦٠ ديناراً. بعد كم سنة يصبح راتبه ٤٨٠٠ ديناراً؟

قانون: مجموع أول ن حدّاً من حدود متسلسلة حسابية حدها الأول أ هو:

١. إذا علم الحدّ الأخير (ل) $\quad جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$

٢. إذا علم الأساس (د) $\quad جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١) د]$

مثال (١): أجد مجموع أول ٢٠ حدّاً من حدود المتسلسلة ٣ + ٧ + ١١ + ١٥ + ...

الحل: أ = ٣ ، د = ٧ − ٣ = ٤، ن = ٢٠

إذاً $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١) د]$

$جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} [٢ \times ٣ + ١٩ \times ٤] = ٨٢٠$

مثال (٢): أجد $\sum_{ر=٣}^{٢٠} (ر - ٧)$

الحل: $\sum_{٣}^{٢٠} (ر - ٧) = (٣ - ٧) + \ldots + (١٩ - ٧) + (٢٠ - ٧)$

وهذه متسلسلة حسابية. لماذا؟

فيها أ = ٤، د = -١، ل = -١٣

عدد حدود المتتالية الحسابية يساوي رتبة الحد الأخير.

الآن $ح_ن = -١٣$

$-١٣ = أ + (ن - ١) \times د$

$-١٣ = -١ \times (ن - ١) + ٤$

ن = ١٨ لماذا؟

لكن $جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$

$جـ_{١٨} = \frac{١٨}{٢} [٤ + (-١٣)] = -٨١$

تمارين ومسائل

١ أجد مجموع المتسلسلات الحسابية الآتية:

أ) ٢٠ + ١٦ + ١٢ + ... ، حيث ن = ٢٠

ب) ١ + ٤ + ٧ + ١٠ + ... + ٣٧

٢ أجد الحدّ الأول في المتسلسلة التي أساسها ٢ ومجموع أول ٢٠ حدّاً فيها ٨٠.

٣ أجد مجموع الأعداد المحصورة بين ١، ١٠٠ التي تقبل القسمة على ٥.

٤ أجد المتسلسلة الحسابية التي فيها مجموع أول سبعة حدود = ٤٩ ومجموع أول تسعة حدود ٨١.

٥ المتتاليات الهندسية (Geometric Sequences)

تعريف:

المتتالية الهندسية: هي المتتالية التي يكون فيها ناتج قسمة الحدّ على الحدّ السابق له مباشرة مقداراً ثابتاً يسمى أساس المتتالية، ويرمز له بالرمز ر ويكون الحدّ العام للمتتالية الهندسية هو $ح_ن = أ ر^{ن-١}$ حيث أ هو الحدّ الأول.

مثال (١): أكتب الحدّ العام للمتتالية الهندسية الآتية ٢ ، ٨ ، ٣٢ ، ١٢٨ ، ...

الحل: الحدّ الأول = ٢

الأساس = ٤ لماذا ؟

$ح_ن = أ ر^{ن-١} = ٢ \times ٤^{ن-١} = ٢ \times ٢^{٢ن-٢} = ٢^{٢ن-١}$ لماذا ؟

مثال (٢): متتالية هندسية حدّها الأول ٣ وأساسها ٤ أجد الحدّ الخامس فيها؟

الحل:

بما أن أ = ٣ ، ر = ٤

فيكون $ح_ن = أ ر^{ن-١}$

$ح_٥ = ٣ (٤)^{٥-١}$

$ح_٥ = ٧٦٨$

مثال (٣): ما ترتيب الحدّ الذي قيمته ٥١٢ من حدود المتتالية الهندسية ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...؟

الحل:

أفرض أن الحدّ الذي قيمته ٥١٢ هو $ح_ن$

أ = ٤ ، ر = ٢

$ح_ن = أ ر^{ن-١}$

٥١٢ = ...

$١٢٨ = ٢^{ن-١}$

$٢^{٧} = ٢^{ن-١}$

ن = ...

تمارين ومسائل

١ أميز المتتالية الهندسية من غيرها فيما يأتي:

أ) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، .....

ب) $١٠^{-١}$ ، $١٠^{-٢}$ ، $١٠^{-٣}$ ، $١٠^{-٤}$ ، .....

جـ) المتتالية التي حدّها العام $ح_ن = ٢^{ن-١}$

٢ أجد الحدّ السابع في المتتالية $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٣ ، .....

٦ مجموع المتسلسلة الهندسية (Sum of Geometric Series)

قاعـدة:

مجموع أول ن حدّاً من حدود متسلسلة هندسية، حدّها الأول أ وأساسها ر هو:

$جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$، $ر \neq ١$ وإذا كانت $ر = ١$ فإن $جـ_ن = ن \times أ$ لماذا ؟

مثال (١): أجد مجموع المتسلسلة الهندسية:

١ + ٢ + ٤ + ٨ + ... + ١٢٨

الحل:

المتسلسلة السابقة هندسية. لماذا ؟

فيها $أ = ١$ ، $ر = ٢$

$ن = ٨$ كيف ؟

بتطبيق القانون $جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ، $ر \neq ١$

$جـ_٨ = \frac{١(٢^٨ - ١)}{٢ - ١} = ٢٥٥$

نشاط (٢)

أجد مجموع أول ستة حدود من المتسلسلة: ٥ + ١٠ + ٢٠ + ...

المتسلسلة هندسية فيها:

$أ = ٥$ ، $ر =$ ..... ، $ن = ٦$

بتطبيق القانون $جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$

$جـ_٦ =$ .....

مثال (٢): أجد $\sum_{ن=٢}^{٦} (\frac{١}{٢})^{ن}$

الحل:

$$\sum_{ن=٢}^{٦} (\frac{١}{٢})^{ن} = (\frac{١}{٢})^{٢} + (\frac{١}{٢})^{٣} + \ldots\ldots\ldots + (\frac{١}{٢})^{٦}$$

وهي متسلسلة هندسية فيها $أ = \frac{١}{٤}$ ، $ر = \frac{١}{٢}$ ، $ن = ٥$ لماذا ؟

$$ج_{ن} = \frac{\frac{١}{٤}\left(١ - (\frac{١}{٢})^{٥}\right)}{١ - \frac{١}{٢}} = \frac{٣١}{٦٤}$$

تمارين ومسائل

١ أجد مجموع أول خمسة حدود من المتسلسلة الهندسية التي حدّها الأول = ٦ وأساسها = -٢؟

٢ متسلسلة هندسية أساسها $\frac{١}{٢}$ ومجموع الحدود الخمسة الأولى منها يساوي ٣١. أكتب المتسلسلة؟

٣ كم حدّاً يلزم أخذه من المتسلسلة الهندسية ٢ + ٤ + ٨ + ... ليصبح مجموع هذه الحدود مساوياً ٢٥٤؟

٧ الأرقام القياسية (Index Numbers)

يرجع استخدام الأرقام القياسية إلى أكثر من قرنين من الزمن، حيث استخدمها الإحصائي الإيطالي كارلي (١٧٦٤م) لمقارنة الأسعار في إيطاليا لسنة ١٧٥٠م بالأسعار في سنة ١٥٠٠م. ثم شاع استخدامها بصورة أوسع منذ ذلك الحين، حيث اهتمت الحكومات بتركيب بعض الأرقام القياسية، وحسابها. ومن الأمور المهمة عند تركيب الرقم القياسي اختيار فترة الأساس، أو مكان الأساس التي تعتمد لتركيب الرقم.

نشاط (١)

لا بد أنك لاحظت اختلاف سعر سلعة ما، باختلاف مكان بيعها في فلسطين، والجدول الآتي يوضح سعر تنكة الزيت (١٥كغم) في عدد من المدن الفلسطينية.

المدينة	الخليل	بيت جالا	سلفيت	طولكرم	رفح
السعر	٩٠ ديناراً	١٠٠ دينار	٧٠ ديناراً	٦٠ ديناراً	١١٠ دنانير

إذا كانت النسبة المئوية بين سعر تنكة الزيت في الخليل إلى سعرها في سلفيت تساوي:

$\frac{٩٠}{٧٠} \times ١٠٠٪ = ١٢٨,٥٪$ أي أن سعر تنكة الزيت في الخليل يزيد عن سعرها في سلفيت بنسبة ٢٨,٥٪.

تعريف:

الرقم القياسي: هو عبارة عن مؤشر إحصائي يقيس التغير النسبي الذي طرأ على ظاهرة معينة، سواء أكانت سعراً، كمية، قيمة أم أجراً، بالنسبة لأساس معين قد يكون فترةً زمنيةً معينةً، أو مكاناً جغرافياً معيناً. ولحساب الرقم القياسي نستخدم العلاقة:

الرقم القياسي لسعر سلعة ما $= \frac{ع}{ع_{.}} \times ١٠٠٪$ ، حيث ع: سعر السلعة في زمان (مكان) المقارنة،

$ع_{.}$: سعر السلعة في زمان (مكان) الأساس.

مثال (١): يبين الجدول الآتي أسعار وكميات سلعتين غذائيتين من: الحمص ، والعدس في عامي ٢٠٠٥م، ٢٠١٤م.

السلعة	زمن الأساس	زمن المقارنة	زمن الأساس	زمن المقارنة
	٢٠٠٥م	٢٠١٤م	٢٠٠٥م	٢٠١٤م
	السعر بالدينار		الكمية بالكيلوغرام	
حمص	٦	٨	٤	٥
عدس	١٠	١٢	٧	١٠

باعتبار سنة ٢٠٠٥ م هي سنة الأساس، أجد:

١- الرقم القياسي لكمية الحمص .....

٢- الرقم القياسي لقيمة الإنفاق على العدس في العام ٢٠١٤م (قيمة الإنفاق = الكمية × السعر)

الحل: ١- الرقم القياسي لكمية الحمص $= \frac{ع}{ع_{.}} \times ١٠٠٪$

$= \frac{٥}{٤} \times ١٠٠٪ = ١٢٥٪$

٢- الرقم القياسي لقيمة الإنفاق على العدس في العام ٢٠١٤م $= \frac{١٢ \times ١٠}{٧ \times ١٠} \times ١٠٠٪ = ١٧١,٤٪$.

تمارين ومسائل

١ إذا كان ثمن سلعة ما في العام ١٩٨٠ م هو ٠,٢٥ ديناراً، و كان سعرها في العام ٢٠٠٠م هو دينار واحد، باعتبار سنة ١٩٨٠م سنة الأساس، أحسب الرقم القياسي لسعر هذه السلعة في العام ٢٠٠٠م.

٢ الجدول الآتي يبيّن سعر طن القمح في مجموعة من الدول العربية، على اعتبار أن مصر مكان الأساس، أحسب الرقم القياسي لسعر طن القمح في كل من الأردن، ولبنان، وفلسطين، وسوريا.

فلسطين	سوريا	مصر	لبنان	الأردن
١٨٠ ديناراً	١٤٠ ديناراً	٨٠ ديناراً	٦٠ ديناراً	١٠٠ دينار

٣ يبيّن الجدول الآتي أسعار و كميات السكر، والأرز في سنتي ٢٠١٠م ، ٢٠١٧م.

السلعة	زمن الأساس	زمن المقارنة	زمن الأساس	زمن المقارنة
	٢٠١٠م	٢٠١٧م	٢٠١٠م	٢٠١٧م
	السعر بالدينار		الكمية بالكيلوغرام	
سكر	٤	٦	٨	٩
أرز	٩	١٠	١٠	١٥

باعتبار سنة ٢٠١٠م هي سنة الأساس، أجد:

١. الرقم القياسي لكمية السكر في العام ٢٠١٧م.

٢. الرقم القياسي لقيمة الإنفاق على الأرز في العام ٢٠١٧م.

٨ الرقم القياسي لمجموعة من السلع (Index of a Group of Goods)

نشاط (١)

النفط والذهب وباقي المعادن من أهم المقومات الاقتصادية لدول العالم، وهذا ما دفع الاقتصاديين والإحصائيين للاهتمام بحساب الرقم القياسي لأسعار هذه السلع باختلاف الزمان أو المكان.

١- أكمل الجدول التالي معتبراً سنة ٢٠٠٨م سنة الأساس:

السلعة	٢٠٠٨م	٢٠١٢م	الرقم القياسي
	السعر		
برميل النفط	٤٠ دولاراً	.....	٢٠٠٪
غرام الذهب	٢٠ دولاراً	٣٥ دولاراً	.....
طن الحديد	.....	٢٠٠ دولاراً	١٢٥٪

٢- الوسط الحسابي (متوسط) للأرقام القياسية في الجدول، هو .....

تعريف: يسمى الوسط الحسابي للأرقام القياسية لمجموعة من السلع بالرقم القياسي النسبي البسيط. ويعطى بالعلاقة:

$$\text{الرقم القياسي النسبي البسيط} = \frac{\text{مجموع الأرقام القياسية}}{\text{عدد السلع}}$$

$$\text{بالرموز} = \frac{\sum \frac{ع}{ع_{.}} \times ١٠٠٪}{ن}$$

و هناك طريقة أخرى لحساب الرقم القياسي لمجموعة من السلع، تسمى الرقم القياسي التجميعي البسيط. ويحسب باستخدام العلاقة:

$$\text{الرقم القياسي التجميعي البسيط} = \frac{\text{مجموع الأسعار في (مكان، زمان) المقارنة} \times ١٠٠٪}{\text{مجموع الأسعار في (مكان، زمان) الأساس}}$$

$$\text{بالرموز} = \frac{\sum ع}{\sum ع_{.}} \times ١٠٠٪$$

مثال (١): الجدول الآتي يبيّن أسعار ثلاث سلع في المحافظات الشمالية والمحافظات الجنوبية لدولة فلسطين :

السلعة	السعر (دينار)	
	المحافظات الشمالية	المحافظات الجنوبية
كيلو سمك دنيس	٨	٤
كيس أرز (٢٠كغم)	١٦	٢٤
كيلو خبز	٠,٧٥	١

باعتبار المحافظات الشمالية مكان الأساس، أجد:

١. الرقم القياسي النسبي البسيط للأسعار.

٢. الرقم القياسي التجميعي البسيط.

٣. أعطي تفسيراً لهذا الرقم القياسي باستخدام الطريقتين.

الحل:

١- الرقم القياسي النسبي البسيط = $\frac{\text{مجموع الأرقام القياسية}}{\text{عدد السلع}}$

$$\frac{\frac{٤}{٨} + \frac{٢٤}{١٦} + \frac{١}{٠,٧٥}}{٣} \times ١٠٠٪ = ١١١,١١٪$$

٢- الرقم القياسي التجميعي البسيط = $\frac{٤ + ٢٤ + ١}{٨ + ١٦ + ٠,٧٥} \times ١٠٠٪ = ١١٧,١٧١٧١٧ ٪$

٣- أعطى كل من الرقمين مؤشراً بالنسبة لهذه السلع مجتمعة: أن الأسعار في المحافظات الجنوبية أعلى منها في المحافظات الشمالية. كما ألاحظ عدم تساوي الرقمين وذلك لاختلاف طريقة الحساب.

تمارين و مسائل

١ أجد الرقم القياسي النسبي البسيط لأسعار عام ٢٠٠٢م بالنسبة لعام ١٩٩٦م من الجدول الآتي:

السلعة	السعر بالدينار	
	١٩٩٦م	٢٠٠٢م
حمص (كغم)	٣	٤
طحين (٥٠كغم)	٦٠	٧٥
سكر (٥٠ كغم)	٨٠	٨٠
أرز (٦٠كغم)	١٠٠	١١٠

٢ أجد الرقم القياسي التجميعي البسيط لكميات عام ١٩٩٥م بالنسبة لعام ١٩٩٠م من الجدول الآتي:

السلعة	الكمية	
	١٩٩٠م	١٩٩٥م
أ	٤٢٠	٥٠٠
ب	٦٠٠	٦٥٠
ج	٩٠٠	١٢٠٠

نشاط (١)

أجرى مركزٌ للأبحاث في إحدى الجامعات الفلسطينية مقارنةً بين أسعار أربع سلع غذائية و كمياتها في السوق الفلسطينية، في العامين ٢٠٠٥م ، ٢٠١٥م معتبراً سنة ٢٠٠٥م سنة الأساس، ومعتمداً على الجدول:

السلعة	السعر سنة ٢٠١٥م	السعر سنة ٢٠٠٥م	الكمية سنة ٢٠١٥م	الكمية سنة ٢٠٠٥م
أ	٢٠	١٦	٣٦	٣٠
ب	٤٠	٢٨	٢٠	٢٥
ج	١٥	١٠	٤٥	٤٠
د	١٠	٧	٧٠	٦٠

أكمل الجدول الآتي:

السلعة	السعر سنة ٢٠١٥ × الكمية سنة ٢٠٠٥	السعر سنة ٢٠٠٥ × الكمية سنة ٢٠٠٥
أ	٢٠ × ٣٠ = ٦٠٠	.....
ب	.....	.....
ج	.....	١٠ × ٤٠ = ٤٠٠
د	١٠ × ٦٠ = ٦٠٠	.....
المجموع	.....	.....

$$\text{فيكون المقدار} = \frac{\text{مجموع (سعر سنة المقارنة × كمية سنة الأساس)}}{\text{مجموع (سعر سنة الأساس × كميات سنة الأساس)}} \times ١٠٠٪$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots = ١٤٠٪ .$$

تعريف رقم لاسبير القياسي: يسمى المقدار

$$\text{فيكون المقدار} = \frac{\text{مجموع (سعر سنة المقارنة × كمية سنة الأساس)}}{\text{مجموع (سعر سنة الأساس × كميات سنة الأساس)}} \times ١٠٠٪$$ رقم لاسبير القياسي.

ألاحظ أن لاسبير يستخدم كميات سنة الأساس كأوزان لترجيح الأسعار.

مثال (١): يمثل الجدول الآتي أسعار سلعتين، وكمياتهما:

السلعة	٢٠٠٠م		٢٠١٠م	
	الأسعار	الكميات	الأسعار	الكميات
أ	٩٠	١٠	١٠٠	١٥
ب	٦٠	٦	٨٠	٢٠

باتخاذ سنة ٢٠٠٠م سنة الأساس، أجد رقم لاسبير التجميعي للأسعار؟

الحل:

$$\text{رقم لاسبير التجميعي} = \frac{\sum (\text{سعر سنة المقارنة} \times \text{كمية سنة الأساس})}{\sum (\text{سعر سنة الأساس} \times \text{كميات سنة الأساس})} \times ١٠٠٪$$

$$= \frac{١٠٠ \times ١٠ + ٨٠ \times ٦}{٩٠ \times ١٠ + ٦٠ \times ٦} \times ١٠٠٪ = ١١٧,٤٦٪$$

تمارين ومسائل

١ – لديك الجدول الآتي:

السلعة	السعر		الكميات	
	٢٠١٠م	٢٠١٧م	٢٠١٠م	٢٠١٧م
أ	٢٥	٣٥	١٥٠	١٠٠
ب	١٠	٥	٢٠٠	٣٠٠
ج	٢٥٠	٢٠٠	٥٠	٨٠
د	١٥	١٠	١٦٠	٢٠٠

باستخدام بيانات عام ٢٠١٠م كأساس، أحسب:

١- رقم لاسبير

تمارين عامة

١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١- الحدّ العام للمتتالية ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ..... هو:

أ) ٣ ن ب) ٣ ن^{٢} جـ) ن − ٣ د) ٣^{ن}

٢- في المتتالية ٥ ، ١٣ ، ٢١ ، ٢٩ ، ..... يكون أ ، د على الترتيب:

أ) ٥ ، ١٣^{٤} ب) ٥ ، ٨ جـ) ٥ ، ١,٦ د) ٥ ، -٨

٣- المتتالية ٥ ن$^{ن=١}$ ، -٥ ، ٥ ، -٥ ، .....

أ) حسابية ب) هندسية جـ) حسابية وهندسية د) ليس لها قاعدة.

٤- متتالية هندسية حدّها الأول ٢ و أساسها ٣ هي:

أ) ٣، ٦، ١٢،.... ب) ٦، ٢، $\frac{٢}{٣}$ ،.... جـ) ٢، ٦، ١٨، .... د) ٢، ٦، ٩،....

٥- الحدّ العاشر في المتتالية -٢٠ ، ١٦- ، - ١٢ ، - ٨ ، ..... هو:

أ) ٥٦ ب) ١٦ جـ) ١٦- د) ٥٦-

٦- متتالية هندسية حدّها الأول ٣ وأساسها ٢ فإن جـ$_{٤}$ =

أ) ٤٥ ب) ٤٠ جـ) ٤٢ د) ٢١

٧- ما قيمة $\sum_{ن=١}^{٤}$ (٢+ن) ؟

أ) ١٩ ب) ١٨ جـ) ٢٥ د) ٣١

٨- الرقم القياسي لسعر سلعة في سنة ٢٠٠٠م بالنسبة لسعرها في نفس السنة يكون:

أ) ٥٠٪ ب) ٠٪ جـ) ٢٠٠٪ د) ١٠٠٪

* أعتمد على البيانات المعطاة في الجدول الآتي للإجابة عن الفقرتين ٣ ، ٤ .

يمثل الجدول سعر صندوق الجوافة ٢٠كغم (بالدينار) في ثلاث مدن فلسطينية في شهر ١١ عام ٢٠١٦م.

المدينة	قلقيلية	سلفيت	الخليل
السعر	٨	١٠	١٦

٩- ما الرقم القياسي لسعر صندوق الجوافة في الخليل بالنسبة لسعره في قلقيلية؟

أ) ١٠٠٪ ب) ١٥٠٪ جـ) ٢٠٠٪ د) ٢ ٪

١٠- أيّ المدن الآتية تعتبر مكان الأساس، إذا كان الرقم القياسي لسعر صندوق الجوافة في سلفيت ١٠٠٪؟

أ) قلقيلية ب) سلفيت جـ) الخليل د) لا يمكن تحديده

٢ أجد مجموع المتسلسلات الآتية:

أ) $\sum_{س=١}^{٤} (٣س-٢)$ ب) $\sum_{س=١}^{٤٠} (٢)^{س}$ جـ) ١٠٢٤ + ٥١٢ + ٢٥٦ + ... + ١٦

٣ بدأ موظفان العمل في شركة الاتصالات الفلسطينية براتب سنوي مقداره ٥٠٠٠ دينار، حيث عمل الأول بعلاوة سنوية مقدارها ٢٪ من راتب السنة السابقة، والثاني يزداد راتبه بمقدار ٢٠ ديناراً في كل سنة. أيّ الموظفين يتقاضى راتباً أفضل من الآخر بعد مرور ٥ سنوات؟

٤ يبيّن الجدول الآتي أسعار ٤ سلع غذائية وكمياتها في فلسطين. باعتبار سنة الأساس ١٩٩٨م وسنة المقارنة ٢٠٠٨م.

السلعة	١٩٩٨م		٢٠٠٢م	
	الأسعار	الكميات	الأسعار	الكميات
أ	٨	١٨	١٦	٣٦
ب	٣٦	٣٠	٤٠	٦٠
ج	٤٠	١٠	٤٥	٢٠
د	٥	١٥	٥	١٥

أحسب:

١) الرقم القياسي النسبي البسيط.

٢) الرقم القياسي التجميعي البسيط.

٣) رقم لاسبير التجميعي للأسعار.

ورقة عمل

اختر الإجابة الصحيحة من البدائل المدرجة:

١- إذا كان الحد الأول من متتالية حسابية ١، وحدها العاشر ١٩ فإن مجموع الحدود العشرة الأولى منها يساوي:

أ) ٢٠٠ ب) ١٠٠ ج) ٥٥ د) ٢٠

٢- المتتالية الحسابية التي مجموع أول ن حداً منها (جـ$_{ن}$ = ٢ن^{٢} + ن) يكون حدها الثاني:

أ) ٣ ب) ٧ ج) ١٠ د) ١٣

٣- في المتتالية الحسابية؛ إذا كان مجموع أول ٢٠ حداً منها = ٤٨٠ فأيّ العبارات الآتية صائبة ؟

أ) ٢أ + ٢٠د = ٤٨ ب) أ + ٢٠د = ٤٨ ج) ٢أ + ١٩د = ٤٨ د) أ +١٩د = ٤٨

٤- إذا كان جـ$_{ن}$ = ٢ن^{٢} – ٧ن مجموع ن حداً الأولى من متسلسلة حسابية، فما رتبة الحد الذي قيمته ١٩؟

أ) ٦٧ ب) ٨ ج) ٧ د) ٦

٥- متسلسلة حسابية مجموع حدودها الثلاثة الأولى ٢٧، فإن الحد الثاني فيها يساوي:

أ) ٣ ب) ٦ ج) ٩ د) ٢٧

٦- إذا كان مجموع ن حداً الأولى من متتالية حسابية (جـ$_{ن}$ = ن^{٢} + ٢ن) فإنّ حدها الثاني يساوي:

أ) ١١ ب) ٨ ج) ٥ د) ٣

٧- عدد الأوساط الحسابية اللازم إدخالها بين العددين -٤ ، ٢٠ ليصبح مجموع المتسلسلة الحسابية = ٤٨ هو:

أ) ثلاثة أوساط. ب) أربعة أوساط. ج) ستة أوساط. د) ثمانية أوساط.

٨- مجموع العشرين حداً الأولى للمتسلسلة الحسابية ٦ + ٤ + ٢ + ... يساوي:

أ) -٢٠ ب) ١٢ ج) -٢٦٠ د) ٢٦٠

٩- بدأ رجل عمله في شركة براتب سنوي قدره ٤٨٠٠ دينار ، وكان يأخذ علاوة سنوية قدرها ١٨٠ ديناراً، بعد مرور ١٥ سنة سيصبح راتبه:

أ) ٧٥٠٠ دينار ب) ٧٣٢٠ ديناراً ج) ٧٣٠٠ دينار د) ٧٣٥٠ ديناراً

١٠- الإنتاج الحالي في مصنع ٢٠ ألفاً، وكان يتضاعف الإنتاج بمعدل ٤٪ سنوياً يكون إنتاجه بعد ٦ سنوات:

أ) ٢٠٩٢٠٠٠٠ ب) ٢٤٣٣٣,٠٥ ج) ٢٥٣٠٦,٤ د) ٠,٠٠٠٨١٩٢

١١- المتتالية: ٣ ، ١ ، $\frac{١}{٣}$ ، ... هي متتالية:

أ) حسابية ب) هندسية ج) لا حسابية ولا هندسية د) منتهية

١٢- مصطلح إحصائي يحدد إحتياجات الفرد المعيشية من السلع الأساسية، هو:

أ) الرقم القياسي. ب) غلاء المعيشة. ج) السلة الغذائية. د) سعر السلعة.

١٣- مكان أو فترة تتميز بالاستقرار الاقتصادي، وخالية من الاضطرابات العنيفة، كالحروب والأزمات، هي:

أ) فترة الأساس. ب) فترة المقارنة. ج) الدول العظمى. د) الدول النامية.

١٤- مؤشر إحصائي يقيس التغير النسبي الذي يطرأ على ظاهرة ما بالنسبة إلى أساس معين، هو:

أ) الرقم القياسي. ب) غلاء المعيشة. ج) فترة الأساس. د) فترة المقارنة.

١٥- إذا كان الرقم القياسي لسعر صندوق الفراولة سنة ٢٠١٢ بالنسبة إلى سعرها سنة ٢٠١٤ هو ١٥٠٪ ، وكان سعر صندوق الفراولة سنة ٢٠١٤ هو ٧٥ قرشاً ، فإنّ سعر صندوق الفراولة سنة ٢٠١٢ يساوي:

أ) ١١٢,٥ قرش. ب) ٥٠ قرشاً. ج) ١١٢٥ قرشاً. د) لا يمكن تحديده.

١٦- إذا زادت أسعار الطعام من عام ٢٠٠٨ إلى عام ٢٠٠٩ بمقدار ٤٪ ، فإنّ الرقم القياسي لأسعار الطعام في عام ٢٠٠٨ بالنسبة إلى عام ٢٠٠٩ (باتخاذ سنة الأساس ٢٠٠٩) هو:

أ) ٩٦٪ ب) ١٠٤٪ ج) ١١٨٪ د) ١٢٥٪

١٧- حُسِبت الأرقام القياسية لأسعار سلعةٍ ما باتّخاذ سنة ٢٠١٠ سنة الأساس ، فإن الرقم القياسي لسعر تلك السلعة نفسها عام ٢٠١٠ هو:

أ) ٢٠١٠٪ ب) ١٠٠٪ ج) ١٠٤٪ د) ٩٠٪

١٨- إذا كان الرقم القياسي لسعر سلعةٍ ما في مدينة غزة بالنسبة إلى القدس هو ١٣٠٪ ، فإنّ الرقم القياسي لسعر هذه السلعة في القدس بالنسبة إلى غزة هو:

أ) ٣٠٪ ب) ٧٧٪ ج) ١٧٠٪ د) ١٠٠٪

١٩- متتالية حسابية حدها العاشر خمسة أمثال حدّها الثاني، حدها الخامس يساوي ١٠، أوجد: الحد الأول، الأساس، عدد الحدود الأولى التي مجموعها ٣٨٠.

٢٠- متتالية حسابية حدها الخامس = ٩ ، مجموع الحدود السبعة الأولى يساوي ٤٩ ، أوجد المتتالية ، وإذا كان مجموع حدودها = ٩٠٠ ، أوجد الحد قبل الأخير.

٢١-كم حداً من المتتالية: -٢٠ ، -٢٢٫٥ ، -٢٥ ، ... يلزم أخذها ابتداء من الحد الأول بحيث إنّ مجموع الربع الأول منها إلى مجموع الربع الثالث كنسبة ٢ : ٥ ؟

٢٢- أوجد الحد السادس من المتتالية الهندسية: ٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ....

٢٣- ما الحد السابع في متتالية هندسية حدها الثاني -٦ ، وحدها الخامس ١٦٢؟

٢٤- مثّل الجدول الآتي أسعار وكميات ثلاث سلع:

السنة / السلعة	٢٠١٢		٢٠١٤	
	السعر بالدينار	الكمية بالطن	السعر بالدينار	الكمية بالطن
الأولى	٥	٣	٦	٢
الثانية	٧	٤	٦	٣
الثالثة	٨	٥	١٠	٥
الرابعة	٣	٦	٥	٥

احسب كلّاً من:

(أ) رقم لاسبير القياسي النسبي للأسعار في عام ٢٠١٤ باتخاذ الكميات أوزاناً للأسعار.

(ب) رقم لاسبير التجميعي للأسعار في عام ٢٠١٤ باتخاذ الكميات أوزاناً للأسعار.

إختبار ذاتي

اختر الإجابة الصحيحة من البدائل المدرجة:

١- متتالية حسابية حدها الأول ٥ وأساسها ٣ ما حدها الخامس؟

أ. ١٧ ب. ١٠ ج. ٥ د. ٣

٢- ما رتبة الحد الذي قيمته ٥١٢ من حدود المتتالية الهندسية ٤، ٨، ١٦، .....؟

أ. ٨ ب. ٧ ج. ٦ د. ٥

٣- ما الرقم القياسي لسعر سلعة في سنة ٢٠١٧م بالنسبة لسعرها في السنة نفسها؟

أ. ٥٠٪ ب. صفر٪ ج. ٢٠٠٪ د. ١٠٠٪

٤- بالاعتماد على البيانات المعطاة في الجدول، ما الرقم القياسي التجميعي البسيط لأسعار عام ٢٠١٥ بالنسبة إلى عام ٢٠٠٥؟

السلعة	السعر		الكمية	
	٢٠٠٥	٢٠١٥	٢٠٠٥	٢٠١٥
أ	١	٢	١٠٠	١٥٠
ب	٣	٤	٨٠	٧٠

أ. ١٥٠٪ ب. ٦٧ ٪ ج. ١٢٥ ٪ د. ١١٤ ٪

٥- إذا علمت أن سعر سلعة في عام ١٩٩٦م بالنسبه لعام ١٩٩٥م هو ١٤٠٪، وأن سعر السلعة في عام ١٩٩٧م بالنسبة لعام ١٩٩٦م هو ١١٠٪ فما الرقم القياسي لسعر السلعة في عام ١٩٩٧م بالنسبة إلى عام ١٩٩٥م ؟

أ. ٧٩٪ ب. ١٢٠٪ ج. ١٠٠٪ د. ١٥٤٪

٦ - متتالية هندسية حدها الأول ٢ ، وحدها الرابع ١٢٨ فما قيمة الأساس لهذه المتتالية؟

أ. ٤ ب. ٦ ج. ٢ د. ٨

٧- ماذا يعني أنّ الرقم القياسي لسعر سلعة في عام ١٩٩٠م بالنسبة لسعرها في عام ٢٠٠٤م هو ١٥٠٪؟

أ. زاد سعر السلعة في عام ٢٠٠٤م بنسبة ١٥٠٪ عنه في سنة ١٩٩٠م.

ب. زاد سعر السلعة في عام ٢٠٠٤م بنسبة ٥٠٪ عنه في سنة ١٩٩٠م.

د. زاد سعر السلعة في عام ١٩٩٠م بنسبة ١٥٠٪ عنه في سنة ٢٠٠٤م.

ج. زاد سعر السلعة في عام ١٩٩٠م بنسبة ٥٠٪ عنه في سنة ٢٠٠٤م.

٨- بالاعتماد على الجدول الآتي، ما الرقم القياسي التجميعي البسيط لاسعار ٢٠١٥م بالنسبة إلى عام ٢٠١٠م؟

السلعة	الأسعار بالدينار		الكميات	
	٢٠١٠م	٢٠١٥م	٢٠١٠م	٢٠١٥م
أ	١	٢	١٠٠	١٥٠
ب	٣	٤	٨٠	٧٠

أ. ١٥٠٪ ب. ٦٧٪ ج. ١٢٥٪ د. ١١٤٪

٩- المتتالية الحسابية التي حدها الثالث $ح_{٣} = -١$ ، وحدها السابع $ح_{٧} = ٣$ يكون أساسها يساوي:

أ) ٤ ب) ١ ج) -١ د) -٤

١٠- في متتالية حسابية إذا كان $ح_{١} = ٣$ ، $ح_{٧} = ١٥$ ، فإن $ح_{٤}$ يساوي:

أ) ٩ ب) ١٢ ج) ١٨ د) ٤٥

السؤال الثاني: (٨ علامات)

أ. جد رتبة الحد الذي قيمته ٨١ في المتتالية الهندسية $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٣ ، .....

ب. بدأ موظف عملا براتب سنوي قدره ١٠٠٠ دينار وعلاوة سنوية ٣٪ من راتبه السنوي، جد جملة دخل الموظف خلال ٢٠ سنة.

السؤال الثالث: يمثل الجدول التالي أسعار سلعتين وكمياتهما: (٤ علامات)

السلعة	٢٠٠١م		٢٠١٢م	
	الأسعار	الكميات	الأسعار	الكميات
أ	١١٠	١٢	١٣٠	١٦
ب	٨٠	٧	١٠٠	٢١

أحسب الرقم القياسي النسبي على اعتبار أنّ عام ٢٠٠١ هي سنة الأساس.

السؤال الرابع: أجد مجموع أول خمسة حدود من المتسلسلة الهندسية التي حدها الأول = ٦ وأساسها -٢.

السؤال الخامس: متسلسلة هندسية حدها الأول ٦ ، وأساسها $-\frac{١}{٢}$. أوجد مجموع الحدود الخمسة الأولى منها.

السؤال السادس: أوجد الحد السابع عشر من المتتالية: ٧ ، ٣ ، -١ ، ....

نشاط ١:

المسجد الإبراهيميّ من أهم المعالم التّاريخيّة والدّينيّة في فلسطين. ارتبطت باسمه إحدى مجازر الاحتلال الصهيوني حيث راح ضحيتها ١٨٠ مُصلياً ما بين شهيد وجريح.

أَجِدُ عدد شهداء وجرحى المجزرة إذا علمت أَن عدد الجرحى يساوى خمسة أمثال عدد الشهداء.

أفرض أَن عدد شهداء المجزرة س شهيد.

إذن عدد جرحى المجزرة بدلالة س = _____.

عدد شهداءالمجزرة وجرحاها بدلالة س يكون ٦ س. لماذا؟

عدد شهداء المجزرة = _____.

عدد جرحى المجزرة = _____.

نشاط ٢:

يزيد ثمن صندوق عنب قباطية عن ثمن صندوق عنب غزة بمقدار دينارين، وثمن ثلاثة صناديق من عنب غزة يساوي ١٨ ديناراً، أَجدُ ثمن الصندوق الواحد لكل منهما.

إذا كان ثمن صندوق عنب غزة = س دينار.

أُكمل الجدول الآتي:

	الثّمن بدلالة س	الثّمن بالدّينار
ثمن صندوق عنب غزة	س	
ثمن ٣ صناديق عنب غزة		١٨
ثمن صندوق عنب قباطية		

تعريف: المعادلة الخطيّة بمتغير واحد: هي معادلة يمكن كتابتها على الصورة

أ س + ب = صفر ، حيث أَن أ ، ب ∋ ح ، أ ≠ صفر.

نشاط ٣: أُكملُ الجدول الآتي:

المعادلة	نوع المعادلة	حل المعادلة الخطيّة بمتغير واحد
أ) ٧س – ١١ = ٣	خطيّة بمتغير واحد	بإضافة النظير الجمعي للعدد $^{-}$١١ لطرفي المعادلة ينتج: ٧س = ١٤ بضرب الطرفين بالنظير الضربي للعدد ٧ ينتج: س = ٢
ب) $\frac{٥}{س}$ – ٧ = ٠	غير خطيّة. لماذا؟	
جـ) ٣س + ٥ = $^{-}$٤		
د) $\frac{س}{٣}$ – ٤ = $^{-}$٢		
هـ) س + ٥ص = ١٠		

نشاط ٤: إذا علمتَ أَن قاعدة مبنى المسجد القبلي الواقع جنوبي المسجد الأَقصى، مستطيلة الشكل، ويزيد طولها عن عرضها بمقدار ٢٥ متراً، فإذا كان محيطها = ٢٧٠ متراً، فما بُعْديّ القاعدة؟

أفرض أَن طول القاعدة = س متر.

عرض القاعدة بدلالة س = _____.

بما أَن محيط القاعدة = ٢٧٠ متراً.

٢((س – ٢٥) + س) = ٢٧٠، لماذا؟

إذن طول القاعدة: س = ٨٠ متراً. عرض القاعدة: _____.

أفرض أَن الزمن اللازم حتى تلتقي السيارتان = ن ساعة.

المسافة التي قطعتها السيارة الأُولى بدلالة ن = _____.

المسافة التي قطعتها السيارة الثانية بدلالة ن = _____.

إِذن ٧٠ ن + ٨٠ ن = ٤٥٠. لماذا؟

ن = _____.

تلتقي السيارتان في تمام الساعة _____.

بُعْد السيارة عن مكان انطلاقها من مدينة أُمّ الرشراش = ٢١٠ كم.

بُعْد السيارة عن مكان انطلاقها من مدينة طبريا = _____.

تمارين ومسائل ٤ - ١:

١ أُميّز المعادلة الخطية بمتغير واحد مما يأتي:

أ) س + ٣ = ص

ب) س - ١ = ٤س

جـ) $س^{٢}$ - ١ = صفر

د) ص = ٤س

هـ) س ص = ٩

و) $س = \frac{س}{س - ٣}$

٢ أحِلّ المعادلات الآتية:

أ) ٢س - ٣ = ٩

ب) ٧(س - ٣) = ٢٨

جـ) س - ٤ = ٢س - ٦

د) ٣(س - ٥) = ٤ - (س + ٣)

١١ حل نظام من معادلتين خطّيّتين (Solving a System of two Linear Equations)

نشاط (١)

في العلم الفلسطيني، يكون رأس المثلث الأحمر المتساوي الساقين على ثلث طول العلم أفقياً، فإذا كان طول العلم ٢٤م، لحساب عرض العلم أ ب قام أحد المشاركين في رفع العلم بحساب ما يأتي:

١. ارتفاع المثلث (ع) = $\frac{١}{٣}$ × ..... و منها ع = ...
وهذه معادلة خطية من متغير واحد.

٢. ولحساب عرض العلم أب والذي يشكل قاعدة المثلث الأحمر قام أحد الطلبة بما يلي:
- محيط العلم = ٢ × (الطول + العرض)
٨٠ = ٢ × (٢٤ + $\overline{أب}$)
$\overline{أب}$ = ... وهذه معادلة خطية بمتغير واحد.

ألاحظ أننا استخدمنا معادلات خطية لإيجاد ارتفاع المثلث (ع) وطول قاعدته ($\overline{أب}$).

مثال

أحل النظام الآتي باستخدام التعويض، وأتحقق من صحة الحل.

٢س − ٣ ص = ١ _____ (١)

٤س + ص = ٩ _____ (٢)

ص= ٩ − ٤س لماذا؟

أعوض عن قيمة ص في معادلة (١) فينتج أن:

٢ س - ٣ (٩ − ٤ س) = ١ <= ٢ س − ٢٧ + ١٢ س = ١

<= ١٤ س = ٢٨

<= س = ٢

ص = ٩ − ٤ (٢) <= ص = ١

التحقق:

أعوض قيمتي س، ص في المعادلتين (١) (٢)

٢ (٢) − ٣ (١) =

٤ − ٣ = ١

٤ (٢) + ١ =

٨ + ١ = ٩

مثال (١): عدد مكون من منزلتين مجموعهما ١١، عند تبديل المنزلتين ينتج عدد يزيد عن العدد الأصلي بمقدار ٢٧. أجد العدد الأصلي.

الحل:

أفرض أن منزلة الآحاد = س ، ومنزلة العشرات = ص فيكون:

س + ص = ١١ _____ (معادلة ١)

منزلة الآحاد	منزلة العشرات	العدد
س	ص	س + ١٠ص
ص	س	ص + ١٠س

العدد الناتج من تبديل المنزلتين – العدد الأصلي = ٢٧

(ص +١٠س) – (س + ١٠ص) = ٢٧

٩س – ٩ص = ٢٧ وبالقسمة على ٩ ينتج أن:

س – ص = ٣ ..... (معادلة ٢)

أجمع المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن:

٢س = ١٤

ومنها س = ٧ وبالتعويض عن قيمة س في المعادلة (١) ينتج أن:

ص = ٤ فيكون العدد الأصلي هو ٤٧.

تمارين ومسائل

١ أحل أنظمة المعادلات الآتية:

أ) س + ٢ص = -٢

٣س+١١ص = ٩

ب) ٢س + ٣ص = ٣

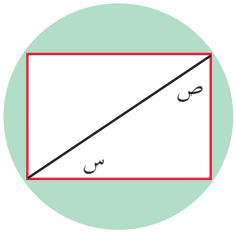
س = ٥ + ٢ص

٢ عمر أب ثلاثة أمثال عمر ابنه في سنة ما، بعد سنتين يصبح مجموع عمريهما ٥٢ سنة. أجد عمر كل منهما في هذه السنة.

١٢ حل نظام مكون من معادلة خطية، ومعادلة تربيعية
(Solving a System of Linear and Quadratic Equation)

نشاط (١)

يصادف الخامس من نيسان من كل عام يوم الطفل الفلسطيني، و بهذه المناسبة تنوي إدارة متنزه بلدية نابلس إنشاء بركة سباحة للأطفال مستطيلة الشكل، محيطها ٢٨م داخل ميدان دائري نصف قطره ٥م كما في الشكل. لحساب أبعاد البركة:



أفرض أنَ بعدي البركة هما س ، ص وبالتالي ٢س + ٢ص = ... لماذا؟

و منها س + ص = ...

وكذلك $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = $١٠^{٢}$ لماذا؟

النظام هو:

س + ص = ١٤ ..... (١)

$س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = ١٠٠..... (٢)

(أجعل أحد متغيرات المعادلة الخطية موضعاً للقانون، ثم أعوضه في المعادلة التربيعية).

ص = ١٤ − س من معادلة (١)

$س^{٢}$ + ... = ١٠٠ ومنها

$س^{٢}$ − ١٤س + ٤٨ = ٠ = ... لماذا؟

(س − ٨) (.....) = ٠

ومنها س = ٨ أو س = ... لماذا؟

وعليه فإن ص = ... أو ص = ...

بعدا البركة..... ، .....

مثال (١): أحل النظام الآتي:

٢س − ٣ص = ١ ..... (١)

٤س − ٧س ص = -٦ ..... (٢)

الحل:

$$ص = \frac{٢س - ١}{٣}$$

أعوض عن قيمة ص في المعادلة (٢):

$$٤س - ٧س (\frac{٢س - ١}{٣}) = -٦$$

$$١٢س - ١٤س^{٢} + ٧س = -١٨$$ لماذا؟

$$١٤س^{٢} - ١٩س - ١٨ = ٠$$

ومنها س = $-\frac{٩}{١٤}$ أو س = ٢ لماذا ؟

أعوض عن قيم س في إحدى المعادلتين، أجد أن ص = ١ ، $\frac{-١٦}{٢١}$

مجموعة الحل = {($\frac{-٩}{١٤}$ ، $\frac{-١٦}{٢١}$) ، (١،٢)}

تمارين ومسائل

١ أحل نظام المعادلات الآتية:

أ- $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠$

$ص = ٢س - ٥$

ب- $(س - ٤)^{٢} + (ص - ٦)^{٢} = ١٠٠$

$ص - س = ٠$

ج- $٢س + ص = ١١$

$س ص - ص^{٢} = ٣$

٢ جد نقاط التقاطع بين المستقيم ٥س + ٢ص = -١ والعلاقة $ص = ٢س^{٢}$.

نشاط (١)

تعمل سارة مهندسةً للديكور في مدينة رام الله، وتسكن في إحدى قرى محافظة سلفيت. بدأت تعاني من أعباء السفر اليوميّ بعد مرور عام على عملها. فكرت سارة بشراء بيت في رام الله، و لكن دخلها الشهري غير كافٍ لشراء البيت.

- أقترح حلاً لمشكلة سارة، وأناقشه مع مجموعة من زملائي:

.....

الدفعة: هي مجموعة من المبالغ المتساوية تستحق في فترات متساوية.

و ستقتصر دراستنا في هذه الوحدة على الدفعات الدوريّة المنتظمة، حيث تقسم إلى:

أ. الدفعات الدوريّة العاديّة: حيث يكون موعد الدفعة في نهاية كل فترة، كما يظهر في الشكل الزمني الآتي:

صفر	١	٢	٣
-	الدفعة	الدفعة (٢)	الدفعة (٣)

ففي الفترة الأولى، والتي تبدأ من نقطة الصفر، وهي تعبر عن الزمن الحاضر، وتنتهي عند النقطة (١) التي تعبر عن نهاية الفترة الأولى وبداية الفترة الثانية، أجد أن الدفعة الأولى تمت في نهاية الفترة الأولى، و كذلك بالنسبة للدفعة الثانية، والثالثة.

ب. الدفعات الدوريّة الفوريّة (المقدمة).

حيث موعد الدفعة هو بداية كل فترة، كما يظهر في الشكل الآتي:

صفر	١	٢	٣
الدفعة (١)	الدفعة (٢)	الدفعة (٣)	-

ألاحظ أن الدفعة الأولى قد حصلت في بداية الفترة الأولى، وكذلك الدفعة الثانية، والثالثة.

تمارين ومسائل

١ أضع إشارة (✓) أمام العبارة الصحيحة، وإشارة (✗) أمام العبارة الخاطئة فيما يأتي:

أ) في الدفعات الدوريّة العاديّة يكون موعد الدفع في نهاية الفترة الزمنيّة. ( )

ب) إن عدد الدفعات الدوريّة الفوريّة، يقل بمقدارٍ واحدٍ عن عدد الدفعات الدوريّة العاديّة. ( )

ج) تسمى الدفعات التي تدفع في فترات زمنيّة غير متساوية بالدفعات المنتظمة. ( )

٢ أعرف الدفعة، وأذكر أنواعها.

٣ أوضح أنواع الدفعات الدوريّة المنتظمة؟

١٤ القيمة المستقبلية للدفعات المنتظمة (Future Value of Annuity)

سوف نتعلم في هذا البند، حساب القيمة المستقبلية للدفعات المنتظمة العاديّة والفوريّة.

أولاً: القيمة المستقبلية لدفعات دوريّة عاديّة.

نشاط (١)

ضمن منافسة البنوك على استقطاب الزبائن، شاهدت يارا إعلاناً في تلفزيون فلسطين، يتحدث عن برنامج للتوفير يعرضه أحد البنوك الفلسطينية، بحيث يقدم ١٢٪ من قيمة مبلغ التوفير سنوياً. إذا ادخرت يارا مبلغاً من المال قيمته ٢٠٠ دينار فإن:

- ما ستقبضه يارا بعد عام، هو ٢٠٠ + ٢٠٠ × ٠,١٢ = ٢٠٠ + ٢٤ = ٢٢٤ ديناراً.
- ما ستقبضه يارا بعد عامين، هو .....
- ما ستقبضه يارا بعد ثلاثة أعوام، هو .....

تعريف: القيمة المستقبليّة لدفعات دوريّة عاديّة: هي جملة مجموعة من الدفعات قيمة كل منها (د) وعددها (ن) تدفع في نهاية كل فترة زمنية معينة، محسوبة على أساس معدل فائدة معين (ع) . تسمى جملة الدفعات العادية، ويرمز لها بالرمز (ج د ع). و يمكن حسابها باستخدام العلاقة:

$$ج_{د\ ع} = د \times \left[\frac{(١ + ع)^{ن} - ١}{ع} \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

مثال (١): يدفع فراس ثمن مكيف كهربائي ٢٠٠ دينار دفعةً دوريّةً عاديّةً سنويّةً بمعدل فائدة ١٠٪، أحسب جملة ما دفعه فراس في نهاية السنة الثالثة.

الحل:

جملة الدفعة الأولى = ٢٠٠ × (١ + ١٠) × (١ + ١٠) = ٢٤٢ ديناراً .

= ٢٠٠ × (١ + ١٠٪)^{٢} = ٢٤٢ ديناراً.

جملة الدفعة الثانية = ٢٠٠ × (١ + ١٠٪) = ٢٢٠ ديناراً .

جملة الدفعة الثالثة = ٢٠٠ دينار، حيث لم يمر على هذه الدفعة أي فترة زمنية.

وبذلك يكون جملة الدفعات الثلاث = ٢٤٢ + ٢٢٠ + ٢٠٠ = ٦٦٢ ديناراً.

ملاحظة:
يجب أن يكون معدل الفائدة (ع) محسوباً عن نفس الوحدة الزمنية الفاصلة بين الفترات. أي إذا كانت الدفعات شهرية، ومعدل الفائدة سنوياً، يجب قسمة معدل الفائدة على ١٢.

مثال (٢): يودع سعيد مبلغ ٢٥٠ ديناراً نهاية كل شهر في حساب توفير، بمعدل فائدة ٦٪ سنوياً. أحسب:

١) جملة توفير سعيد في نهاية السنة الخامسة.

٢) أجد قيمة الفوائد التي حصل عليها سعيد عن المدة كلها.

الحل:

١) الفائدة الشهريّة = ٠,٠٦ ÷ ١٢ = ٠,٠٠٥

جملة توفير سعيد في نهاية السنة الخامسة هي ج د ع = ٢٥٠ × $\frac{(١ + \frac{٥}{١٠٠٠})^{٦٠} - ١}{\frac{٥}{١٠٠٠}}$ = ١٢٦٢,٥٦ ديناراً.

٢) قيمة الفوائد = جملة الدفعات – مجموع الدفعات.

= ١٢٦٢,٥٦ – ١٢٥٠ = ١٢,٥٦ ديناراً.

ثانياً: القيمة المستقبلية لدفعات دوريّة فوريّة.

هنا تدفع الدفعات في بداية الفترة الزمنيّة، ويمكنني أن أتعرف عليها من خلال الرسم التوضيحي الآتي:

الزمن	صفر	١	٢	.....	ن – ٢	ن – ١	ن
الدفعة	د	د	د		د	د	-
الجملة							ج د ف

حيث (ج د ف) ترمز لجملة الدفعات الفوريّة.

ألاحظ أن الفرق بين جملة الدفعات الفوريّة وجملة الدفعات العاديّة، هو وجود فترة زمنيّة إضافيّة، تحسب عنها الفوائد في حالة الدفعات الفوريّة.

أي أن ج د ف = ج د ع × (١ + ع).

$$ج\ د\ ف = د \times \left[\frac{(١ + ع)^{ن} - ١}{ع} \right] \times (١ + ع) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (٢)$$

نشاط (٢)

أعلنت شركة صرافة عن برنامج للاستثمار، بحيث يدفع المشترك في بداية كل سنة مبلغ ٢٠٠٠ دينار. على أن تعطيه الشركة ١٢٪ فائدة سنوية، ستكون جملة دفعاته في نهاية السنة الرابعة، كما يأتي:

- جملة الدفعة الأولى:

= ٢٠٠٠ × (١+٠,١٢) ×(١+٠,١٢) × (١+٠,١٢) × (١+٠,١٢)

= ٢٠٠٠ × (١+٠,١٢)^{٤} = _____

- جملة الدفعة الثانية = _____

- جملة الدفعة الثالثة = _____

- جملة الدفعة الرابعة = _____

- جملة الدفعة الخامسة = ٢٠٠٠ دينار. (لماذا ؟)

مثال (٣): أجد جملة الدفعات في نهاية السنة الرابعة في النشاط السابق، باستخدام العلاقة (١) ، ثم أحسب الأرباح؟

الحل:

$$\text{ج د ف} = ٢٠٠٠ \times \frac{((١ + ١٢٪)^{٤} - ١)}{١٢٪} \times (١ + ١٢٪)$$

= ٩٥٥٨,٦٥٦ × ١,١٢ = ١٠٧٠٥,٦٩٤ دنانير.

الأرباح = ج د ف – مجموع الدفعات بدون فوائد

= ١٠٧٠٥,٦٩٤ – ٨٠٠٠ = ٢٧٠٥,٦٩٤ دنانير.

تمارين ومسائل (٣-٥)

١ يودع شخص مبلغ ١٦٠٠ دينار نهاية كل عام في حساب توفير، بفائدة سنويّة ٦٪. كم ستكون جملة توفيراته في نهاية السنة الثامنة؟

٢ أجد جملة دفعة سنوية مبلغها ٢٠٠٠٠ دينار، وعدد مبالغها ١٠ بمعدل فائدة ٨٪ سنوياً، إذا كانت الدفعة:

أ) عاديّة ب) فوريّة.

١٥ القيمة الحالية للدفعات المنتظمة (Present Value of Annuity)

و سنتعلم في هذا البند حساب:

١) القيمة الحالية لدفعات دوريّة عاديّة.

٢) القيمة الحالية لدفعات دوريّة فوريّة.

أولاً: القيمة الحالية لدفعات دوريّة عاديّة:

وهي القيمة الحالية لمجموعة من الدفعات قيمة كل منها (د) و عددها (ن)، تدفع في نهاية كل فترة زمنية، محسوبة على أساس معدل خصم معين (ع) . ويرمز له بالرمز (ق ح ع)، حيث:

$$\text{ق ح ع} = \text{د} \times \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+\text{ع})^{\text{ن}}}}{\text{ع}} \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

نشاط (١)

في برنامجٍ لتسديد ثمن هاتف نقّال على ثلاث دفعاتٍ، قيمة كل منها ١٥٠ ديناراً، بمعدل خصم ٤٪ أرادت مريم حساب القيمة الحالية للدفعات الثلاث و مقدار الخصم، وذلك للاشتراك في البرنامج.

- باستخدام العلاقة (١) فإن ق ح ع $= ١٥٠ \left[\frac{1 - \frac{1}{(1{,}04)^{3}}}{0{,}04} \right] =$ ٤١٦,٢٦ ديناراً.

- مبلغ الخصم، هو .....

نشاط (٢)

لأربع دفعات عاديّة سنويّة قيمة كل منها ٢٠٠ دينار، بفائدة سنوية ٥٪ هي .....

.....

ملاحظة: يجب أن يكون معدل الخصم ع من نفس الفترة الزمنية الفاصلة بين الدفعات.

ثانياً: القيمة الحالية لدفعات دوريّة فوريّة (ق ح ف):

هي القيمة الحالية لمجموعة من الدفعات قيمة كل منها (د) و عددها (ن) تدفع في بداية كل فترة زمنية، محسوبة بمعدل خصم (ع) ويرمز لها بالرمز (ق ح ف).

وهي تختلف عن القيمة الحالية للدفعات العاديّة، في أن الدفعات العاديّة تخصم لفترة إضافيّة أكثر من الدفعات الفوريّة.

أي أن (ق ح ع) = (ق ح ف) × $\left[\frac{١}{ع + ١}\right]$

و منها ق ح ف = ق ح ع × (١ + ع)

و بتعويض قيمة ق ح ع من المعادلة السابقة، أجد أن:

$$\text{ق ح ف} = \text{د} \times \left[\frac{١ - \frac{١}{(١ + ع)^{ن}}}{ع}\right] (١ + ع) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

• معدل الفائدة و معدل الخصم نفس المعنى.

نشاط (١)

يريد أبو محمود أن يدفع أجرة سكن بناته في جامعة بير زيت عن أربع سنوات دفعةً واحدةً. فإذا كانت الأجرة السنويّة تدفع بداية كل سنة، و قيمتها ٢٥٠٠ دينار ، و أن معدل الفائدة هو ١٠٪ .

١) فإنه يجب على أبو محمود أن يدفع أجرة السكن:

$$\text{ق ح ف} = ٢٥٠٠ \times \frac{١ - \frac{١}{(١ + ١٠٪)^{٤}}}{١٠٪} \times (١ + ٠,١٠)$$

= ٧٩٢٤,٦٦ × ١,٠٨ = ٨٥٥٨,٦٣٦ ديناراً.

٢) مبلغ الخصم، هو .....

تمارين ومسائل

١ أجد القيمة الحالية لدفعة مبلغها ١٠٠٠٠ دينار، وبفائدة معدلها ٦٪ سنوياً، وعدد مبالغها ١٨. إذا كانت الدفعة:

أ - فوريّة ب- عاديّة.

٣ أجد مبلغ الخصم على ٥ دفعات عاديّة قيمة كل منها ١٠٠ دينار بمعدل خصم ٢٪.

١٦ التقسيط (Installment)

نشاط (١)

تقدم شركات بيع الأجهزة الكهربائيّة والأدوات المنزليّة عروضاً للبيع بالتقسيط بمناسبة عيد الأم. أجمع بعض عروض هذه الشركات، و أسجل شروط كل عرض. (قد تساعدني مواقع التواصل الاجتماعي، والمجلات، والصحف الفلسطينية في جمع الإعلانات).

- أكتب بلغتي الخاصة تعريفاً للتقسيط .....

- أعرض لزملائي إعلاناً للبيع بالتقسيط، ثم أسجل:

١) ثمن السلعة ..... ٢) قيمة القسط .....

٣) سعر الفائدة ..... ٤) مدة التقسيط .....

التقسيط: هو بيع يُعَجَّل فيه المبيع (السلعة) ويتأجل فيه الثمن كلُّه، أو بعضُه، على أقساطٍ معلومةٍ لآجالٍ معلومةٍ.

و يعتمد حساب التقسيط على:

١) قيمة السلعة. ٢) نسبة الدفعة، أو قيمتها(الدفعة المقدمة).

٣) نسبة الفائدة. ٤) عدد السنوات التي سوف يدفع فيها القسط.

مثال (١): تعرض شركة للأجهزة الكهربائية ثلاجة بقيمة ٢٠٠٠ دينار. فإذا كانت تريد ٥٠٪ من قيمة الثلاجة دفعة مقدمة، وباقي ثمن الثلاجة على عشرة أقساط شهريّة بفائدة ١٠٪ . أحسب:

١) قيمة الدفعة الأولى. ٢) قيمة القسط الشهريّ.

الحل:

١) قيمة الدفعة الأولى = ٢٠٠٠ × ٠,٥٠ = ١٠٠٠ دينار.

٢) لحساب القسط الشهريّ، أحسب:

المبلغ المتبقي للدفع بالإضافة إلى فوائده = ١٠٠٠ + ١٠٠٠ ×١٠٪ = ١١٠٠ دينار.

و بذلك يكون القسط الشهري = ١١٠٠ ÷ ١٠ = ١١٠ دنانير.

تمارين ومسائل

١ ترغب جمعيةٌ نسائيةٌ شراء ٢٥ حاسوباً محمولاً لإنشاء مختبر حاسوب. إذا تلقت الجمعية عرضاً من إحدى الشركات المزوِّدة، كما يأتي:
ثمن الجهاز ١٢٠٠ دينار، وتريد ١٥٪ من ثمن الأجهزة دفعةً أولى، على أن تدفع الجمعية باقي المبلغ على أقساط شهريّة لمدة ثلاث سنوات، بفائدة ٦٪، ما قيمة القسط الشهري؟

٢ أعلنت شركة مواصلات في بيت لحم عن نيّتها بيع حافلة نقل عمومي بخط سير بيت لحم – رام الله، حسب الشروط الآتية:
ثمن الحافلة ٨٠٠٠٠ دينار، وتريد ٣٠٪ من قيمة الحافلة دفعةً أولى، ويتم تقسيط باقي الثمن على أربعة أقساط سنويّة بفائدة ١٢٪. ما قيمة القسط السنويّ؟

١٧ الفائدة (Interest)

نشاط (١)

مرح طالبة في الصف الثامن الأساسي في مدرسة فاطمة الزهراء، ربحت مرح مبلغاً من المال؛ لحصولها على المركز الأول في مسابقةٍ على مستوى مدارس فلسطين. قررت مرح استثمار المبلغ إلى أن تدخل الجامعة، وبذلك تسهم في تأمين دراستها الجامعية.

- أناقش مع زملائي، كيف يمكن لمرح استثمار مبلغ الجائزة؟

.....

- إذا ادخرت مرح مبلغ ١٠٠ دينار في أحد البنوك بفائدة سنوية ٧٪ فإن المبلغ في نهاية السنة الأولى، سيصبح .....

تعريف:

الفائدة: العائد الذي نحصل عليه نتيجة استثمار مبلغ من المال لفترة زمنية محددة وفقاً لمعدل معين. وهي نوعان: الفائدة البسيطة، والفائدة المركبة.

أولاً: الفائدة البسيطة

نشاط (٢)

قامت شركة فلسطينية للاتصالات باستثمار مبلغ ٨٠٠٠٠٠ دينار في أحد المشاريع لمدة ٣ سنوات بمعدل فائدة بسيطة ٦٪ .

- مبلغ الفائدة في السنة الأولى = ٨٠٠٠٠٠ × ٠,٠٦ = ٤٨٠٠٠ دينار.
- مبلغ الفائدة في السنة الثانية = ...
- مبلغ الفائدة في السنة الثالثة = ...
- إجمالي الفائدة = ...

تسمى الفائدة في هذه الحالة بالفائدة البسيطة.

تعريف:

الفائدة البسيطة: هي فائدة تُحسب على أصل مبلغ الاستثمار. هذه الفائدة تظل ثابتةً طوال مدة الاستثمار، بفرض ثبات قيمة المبلغ المستثمر طوال فترة الاستثمار. ويمكن حسابها باستخدام القاعدة: مبلغ الفائدة البسيطة = مبلغ الاستثمار × معدل الفائدة × المدة الزمنية... (١)

مثال (١):

أودعت وداد مبلغاً من المال في أحد البنوك الفلسطينية، بفائدة سنويّة بسيطة ٥,٥٪ لمدة ١٢ سنة، إذا كان مبلغ الفائدة الذي حصلت عليه وداد في نهاية المدة ١١٨٨٠ ديناراً، أحسب المبلغ المودع؟

الحل:

باستخدام العلاقة (١) يكون مبلغ الفائدة البسيطة = المبلغ الأصلي × نسبة الفائدة × المدة الزمنية.

١١٨٨٠ = المبلغ الأصلي × ٥,٥٪ × ١٢

١١٨٨٠ = المبلغ الأصلي × ٠,٦٦ (بالقسمة على ٠,٦٦)

١١٨٨٠ ÷ ٠,٦٦ = المبلغ الأصلي

١٨٠٠٠ دينار = المبلغ الأصلي (المبلغ المودع).

ثانياً: الفائدة المركبة

نشاط (٣)

أرادت رهام أن تستثمر مبلغاً من المال في أحد البنوك بفائدةٍ معينةٍ، على أن تضيف مبلغ الفائدة على المبلغ المودع في كل عام؛ حتى تحصل على ربحٍ أكبر.

- إذا أودعت ١٠٠ دينار بفائدة سنوية ٨٪ ، تحصل على مبلغ فائدة..... في نهاية العام الأول.
- إذا أبقت رهام مبلغ الفائدة في البنك يصبح المبلغ المودَع .....
- في العام الثاني ستتقاضى رهام فائدةً على المبلغ الجديد هي .....

تسمى الفائدة بهذه الطريقة الفائدة المركبة.

تعريف:

الفائدة المركبة: هي فائدة تُحسب على أصل المبلغ، مُضافاً إليه قيمة فائدة الفترة السابقة؛ وبالتالي فإن قيمة الفائدة تتغير في كل فترة من فترات الاستثمار. ويمكن حسابها باستخدام العلاقة:

الفائدة المركبة = المبلغ × ((١ + معدل الفائدة)$^{\text{المدة}}$ − ١) ..... (٢)

و بالرموز ف = م × ((١ + ع)$^{\text{ن}}$ − ١)

أناقش:

إذا كنت سأستثمر مبلغاً من المال لفترة زمنية محددة، هل سأستثمره بفائدة بسيطة أم مركبة؟

ملاحظات عند حساب الفائدة البسيطة، أو المركبة:

١. معدل الفائدة قد يكون سنويّاً، أو نصف سنويّ، أو ربع سنويّ، وقد يكون شهريّاً، وقد يكون أقل من ذلك (بالأيام، بالساعات، .....).

٢. في بعض الحالات، يتم ذكر معدل الفائدة ١٢٪ ولا يتم ذكر هل هذه الفائدة سنوية/ نصف سنوية؟ حينها نعمل على أساس أن المعدل سنويّ.

مثال (٢): قامت جمعية للزيت في فلسطين باستثمار مبلغ (٥٠٠٠٠٠) دينار لمدة ٣ شهور، بمعدل سنويّ بسيط ٨٪. فما الفائدة التي تحصل عليها الجمعية؟

الحل:

الفائدة = ٥٠٠٠٠٠ × ٨٪ × (٣ ÷ ١٢ تحويل فترة الاستثمار إلى سنوات) = ١٠٠٠٠ دينار.

تمارين و مسائل

١ قامت جمعية الأسرة السعيدة باستثمار مبلغ ٤٠٠٠٠ دينار لمدة عامين، بمعدل نصف سنوي بسيط ٤٪. فما الفائدة التي تحصل عليها هذه الجمعية؟

٢ إذا كانت الفائدة التي ربحتها شركة للمواد الغذائية في مدينة الخليل ٢٥٠٠٠ دينار في ٦سنوات، بمعدل فائدة بسيطة ٥٪، فما مبلغ الاستثمار؟

٣ أقارن بين الفائدة البسيطة والفائدة المركبة، التي يحصل عليها شخص استثمر ١٠٠٠٠ دولار لمدة ٤ سنوات، بمعدل فائدة ٨٪.

تمارين عامة

١ أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١- ما حل المعادلة |٢س − ٣| = ٧؟

أ) ٥ ب) -٢ جـ) ٥ ، -٢ د) -٥ ، ٢

٢- ما حل المتباينة |١ − س| < ١١؟

أ)]-١٠ ، ١٢[ب)]-∞ ، ١٢[

جـ)]١٢ ، ∞[د)]-∞ ، -١٠[∪]١٢ ، ∞[

٢) في الدفعات الدوريّة العاديّة، متى يكون موعد الدفع ؟

أ) بداية الفترة الزمنيّة ب) في منتصف الفترة الزمنيّة

جـ) في نهاية الفترة الزمنيّة د) في أي وقت خلال الفترة.

٣) اشترى عمر شقةً سكنيةً بمبلغ ٨٠٠٠٠ دينار، إذا دفع ما قيمته ٢٠٪ من المبلغ دفعةً أولى، كم تبلغ الدفعة الأولى ؟

أ) ١٦٠٠ دينار ب) ١٦٠٠٠ دينار جـ) ٨٠٠٠ دينار د) ٨٠٠٠٠ دينار

٤) إذا أستثمر مبلغ قدره ٨٢٠ دينار بمعدل فائدة سنوية ٥٪ ، فإن الفائدة البسيطة بعد ٦ سنوات تساوي

أ) ٢٤٢ ب) ٢٤٩ جـ) ٢٤١ د) ٢٤٦

٥) أودعت رماح مبلغ ١٠٠٠٠ دينار في بنك بفائدة بسيطة ٨٪. ما جملة ما ستقبضه رماح بعد سنتين؟

أ) ١٦٠٠ دينار ب) ١١٦٠٠ دينار جـ) ١٠٦٠٠ دينار د) ١٨٠٠٠ دينار

٢ أحل نظام المعادلات التالية:

$$س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠$$

$$ص - س = ٢$$

٣ عددان يقل أحدهما عن مثلي الآخر بمقدار ٣، وحاصل ضربهما يساوي ٥ فما العددان؟

٤ ذهب كريم لمعرض لتجارة السيارات في مدينة جنين لشراء سيارة بالتقسيط لمدة ٥ سنوات. إذا كان سعر السيارة ٩٠٠٠ دينار والدفعة المقدمة ٢٠٪ من سعر السيارة، ونسبة الفائدة ٥,٥٪. أحسب:

١- القسط الشهريّ. ٢- كم سيدفع كريم قيمة السيارة؟

ورقة عمل

اختر الإجابة الصحيحة من البدائل المدرجة:

١- يزيد طول مستطيل عن عرضه بمقدار ٤سم ، إذا كان المحيط = ١٢ سم ، فالطول = ... :

أ) ٦سم ب) ٥سم ج) ٣سم د) ١سم

٢- عُمر محمد = خمسة أمثال عمر حسن مضافاً إليه العدد ٣ ، وكان عمر حسن = ٥ ، فإنّ عمر محمد =

أ) ٢٢ سنة. ب) ٥٢ سنة. ج) ٢٨ سنة. د) ٢٠ سنة.

٣- إذا كان عُمر سليم يساوي أربعة أمثال عمر هُدى مضافاً إليه العدد ٢ ، وكان عمر سليم يساوي ٢٦ سنة، فكم عمر هدى؟

أ) ٥ سنوات. ب) ٦ سنوات. ج) ٧ سنوات. د) ٨ سنوات.

٤- عددان مجموعهما يساوي ٢٢ ، والفرق بينهما يساوي ١٢ ، فما هما؟

أ) ١٨ ، ٤ ب) ١٧ ، ٥ ج) ٦ ، ٧ د) ١٥ ، ٧

٥- الدفعة الدورية العادية يكون موعد الدفع في ..... الفترة الزمنية:

أ) منتصف. ب) بداية. ج) نهاية. د) لا شيء ممّا ذكر.

٦- تسمى الدفعات التي تُدفع في فترات زمنية ..... بالدفعات المنتظمة:

أ) غير متساوية. ب) متفاوتة. ج) متساوية. د) غير ذلك.

٧- عدد الدفعات الدورية الفورية ..... عن عدد الدفعات الدورية العادية:

أ) يقل بمقدار. ب) يساوي مقدار. ج) يزيد بمقدار. د) لا شيء ممّا ذكر.

٨- القيمة المستقبلية لدفعةعادية سنوية قيمتها ١٠٠ دينار، ومعدل الفائدة ٤ ٪ بعد مرور ١٠ سنوات ، هي:

أ) ١٢٠٠,٦ دينار. ب) ١٠٠٠ دينار. ج) ١٣٠٠,٦ دينار. د) لا شيء ممّا ذكر.

٩- هو بيع يُعجَّل فيه المبيع ويتأجل فيه الثمن كله أو بعضه على أقساط معلومة لأجل معلومة:

أ) الدفعات. ب) التقسيط. ج) ق ح ع. د) ق ح ف.

١٠- عند البيع بالتقسيط؛ يتم الاعتماد على:

أ) قيمة السلعة. ب) نسبة الدفعة والفائدة. ج) عدد السنوات. د) كل ما سبق.

١١- الفائدة ..... = مبلغ الاستثمار × معدل الفائدة × المدة الزمنية:

أ) المركّبة. ب) السوقية. ج) البسيطة. د) الفعلية.

١٢- أُودِع ١٠٠٠ دينار ؛ بمعدل فائدة سنوية ١٠٪ ، فإن قيمة ما سيقبض نهاية العام = ...

أ) ٥٠ ديناراً. ب) ٧٠ ديناراً. ج) ٨٠ ديناراً. د) ١٠٠ دينار.

١٣- أودع ساهر ١٥٠٠ دينار في حساب توفير بمعدل فائدة مركّبة ٧ ٪ سنوياً ولمدة ٣ سنوات ، فإنّ قيمة الفوائد التي يحصل عليها = ...

أ) ٣٠٠ دينار. ب) ٣١٥ ديناراً. ج) ٣٤٠ ديناراً. د) ٣٣٧,٦ ديناراً.

٢ حل نظام المعادلتين الخطيتين، فيما يأتي:

١) ٢س + ص = ٤ ، س + ٢ص = ٥

٢) س + ص = ٦ ، ٢س -٢ص = ٦

٣) س + ص = ٣ ، س + ٢ص = ٤

٤) س + ص = ٣ ، ٢س + ٢ص = ٦

٣ اقترض شادي ١٠٠٠٠٠ دينار، واتفق مع البنك على أن يتم السداد على ١٠ دفعات سنوية متساوية. فإذا كانت الفائدة السنوية ٦٪، ما قيمة الدفعة الواحدة؟

٤ ما القيمة المستقبلية لدفع شهرية متساوية عددها ٦٣، وقيمة كل منها ١٠٠ دينار إذا كانت الفائدة المركّبة السنوية ٥٪ وتضاف بشكل شهري؟

٥ اقترضت نادية مبلغاً مالياً بسعر الفائدة المركّبة ٥٪ تضاف سنوياً من أحد البنوك، واتفقت على السداد للبنك على ٥ أقساط سنوية متساوية، قيمة كل قسط ٢٠٠٠ دينار. ما قيمة القرض؟

٦ يوفر ماجد ١٥٠ ديناراً نهاية كل سنة، ويضعها في بنك بالفائدة المركبة ٨٪ في السنة، ويضاف بشكل سنوي لمدة ٥ سنوات. ما القيمة المستقبلية لتوفيراته (جملة ما وفره خلال المدة)؟

٧ يريد حمودة اقتراض مبلغ ٤٠٠٠ دينار، على أن يسدد القرض على دفعات شهرية متساوية خلال سنة من تاريخ الاقتراض، فإذا كان البنك يتقاضى فائدة مركبة ٨٪ في السنة. ما قيمة الدفعة الشهرية؟

٨ أودعت سناء مبلغ ٥٠٠٠ دينار، بحساب الربح المركب بفائدة ٦٪ في السنة، أوجد كلاً من:

أ) مقدار الربح بعد سنتين.

ب) جملة المبلغ بعد سنتين.

إختبار ذاتي

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:

١) في الدفعات الدورية العادية، متى يكون موعد الدفع؟

أ. بداية الفترة الزمنية. ب. في منتصف الفترة الزمنية.

ج. في نهاية الفترة الزمنية. د. في أي وقت خلال الفترة.

٢) تعرض شركة للأجهزة الخلوية في غزة جهازاً بقيمة ٢٠٠٠ دينار، فإذا كانت تريد ٥٠٪ من قيمة الجهاز دفعة مقدمة، وباقي ثمن الجهاز على ١٠ أقساط شهرية بفائدة ١٠٪، ما قيمة القسط الشهري؟

أ. ١١٠ دنانير. ب. ١٠٠ دينار. ج. ٩٠ ديناراً. د. ٨٠ ديناراً.

٣) إذا كان |٢س + ١| = ٥ فما قيمة/قيم س؟

أ. ٢ ب. -٣ ج. ٢ ، -٣ د. -٢ ، ٣

٤) ما مجموعة حل المتباينة |٣ – س| ⩽ ٥ ؟

أ.]-٢،٥[ب.]-∞،-٢] ج. [٨،∞[د.]-∞،-٢][٨،∞[∪

٥) أُودِع مبلغ مدة ٤ سنوات بفائدة ٥ ٪ سنوياً ، فحقّق ٤٠٠ دينار ربحاً ، فإنّ مبلغ الاستثمار = ...

أ) ١٨٥٦ دينار. ب) ١٨٠٠ دينار. ج) ٢٠٠٠ دينار. د) ٢٤٠٠ دينار.

٦) أودع شخص مبلغاً وقدره ٦٠٠٠ دينار، بمعدل فائدة بسيطة قدرها ٧٪ ، فحقق ربحاً قيمته ٢١٠٠ دينار، فإنّ عدد السنوات اللازمة لهذا الربح تساوي:

أ) ٣ سنوات. ب) ٥ سنوات. ج) ٦ سنوات. د) ٨ سنوات.

٧) من مخاطر الاستثمار على الاقتصاد:

أ) المخاطر المالية. ب) المخاطر النفسية. ج) المخاطر الاجتماعية د) كل ما سبق.

٨) اشترى وائل قطعة أرض لبناء إسكان للطالبات في مدينة بيرزيت بمبلغ ٨٠٠٠٠ دينار، إذا دفع منها ما قيمته ٢٠٪ من المبلغ دفعة أولى، كم تبلغ الدفعة الأولى؟

أ. ١٦٠٠ دينار. ب. ١٦٠٠٠ دينار. ج. ٨٠٠٠ دينار. د. ٨٠٠٠٠ دينار.

٩) استثمر خليل مبلغ ٥٠٠٠٠٠ دينار في شركة يافا للمجوهرات لمدة ٣ شهور بمعدل سنوي بسيط ٨٪، فما قيمة الفائدة البسيطة التي سيحصل عليها؟

أ. ١٠٠٠ ب. ٥٠٠٠ ج. ١٠٠٠٠ د. ١٠٠٠٠٠

٢ حل نظام المعادلتين الخطيتين، فيما يأتي:

١) س + ص = ٤ ، ٢س - ص = -١

٢) س − ص = ٦ ، ٢س + ص = ١٥

٣ اقترض تاجر ٥٠٠٠ دينار من أحد البنوك على أن يسدد دفعات شهرية متساوية خلال عام من تاريخ الاقتراض، فإذا كان البنك يحسب الفائدة المركّبة ٩٪ سنوياً، وتضاف بشكل شهري. فما قيمة كل دفعة شهرية؟

٤ اقترضت هيام ٣٠٠٠ دينار من البنك على أن تسدد على دفعات شهرية متساوية خلال سنتين من تاريخ الاقتراض، فإذا كان البنك يحسب الفائدة بسعر ٦٪ في السنة، وتضاف كل شهر. فما قيمة الدفعة الشهرية؟

٥ يودِعُ خالد مبلغ ١٠٠٠ دينار نهاية كل عام في حساب التوفير في أحد البنوك الفلسطينية، بفائدة ٥٪. كم تبلغ جملة توفيراته في نهاية السنة العاشرة؟

٦ أرادت سوسن أن تستثمر حصتها من تركة والدها والبالغة ١٠٠٠٠ دينار، لمدة خمس سنوات بمعدل فائدة ١٠٪. قارن بين الاستثمار بفائدة بسيطة أو مركّبة.

نشاط (١)

يستخدم الطلبة عادة الأنابيب المخبرية في تجاربهم العلمية، ولهذه الأنابيب أحجام وأنواع مختلفة، حسب طبيعة الاستخدام، فإذا استخدم إبراهيم أنبوباً مخبرياً سعته ٨ مللتر، وتدرج بوضع سائل فيه مسجلاً حجم السائل والحجم الفارغ في كل لحظة، وكانت القراءات كما في الجدول الآتي:

حجم السائل س	...	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	← ...	٣	→ ...	٢,٩٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩	...
حجم الفراغ ص	...	٤,٩	٤,٩٩	٤,٩٩٩٩	← ...	٥	→ ...	٥,٠٠١	٥,٠١	٥,١	...

وبفرض أن حجم السائل س وحجم الفراغ ص فإن العلاقة بين س ، ص تكون ص = ٨ − س

يقابل ٣,٠١ مللتر من حجم السائل ٤,٩٩ مللتر من الحجم الفارغ.

يقابل ٣,٠٠١ مللتر من حجم السائل ..... مللتر من الحجم الفارغ.

يقابل ..... مللتر من حجم السائل ٥,٠١ مللتر من الحجم الفارغ.

اقتراب حجم الماء (س) من اليمين من العدد ٣ يقابله اقتراب حجم المنطقة الفارغة (ص) من اليمين من العدد ٥.

اقتراب حجم الماء من اليسار من العدد ٣ يقابله اقتراب حجم المنطقة الفارغة من اليسار من العدد .....

أقارن بين حجم المنطقة الفارغة من اليسار، وحجمها من اليمين عندما يقترب حجم السائل من العدد ٣.

نشاط (٢)

ليكن ق(س) = س + ١ ، س ∈ ح، فإنه عندما تقترب س من العدد ٤ من اليمين فإن ق(س) يقترب من ٥.

عندما تقترب س من العدد ٤ من اليسار فإن ق(س) يقترب .....

تعريف:

نهاية الاقتران ق(س) عند نقطة:

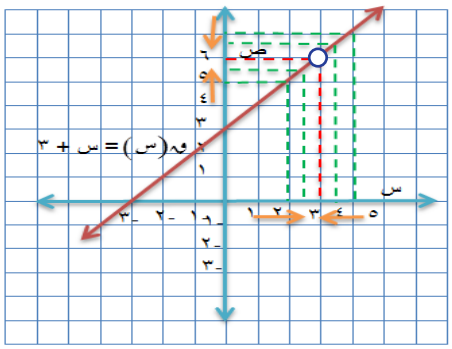
- كلما اقتربت قيم س من اليمين من العدد (أ) اقتربت قيم ق(س) المقابلة لها من عدد حقيقي معين (ل) ويعبر عن ذلك بالصورة $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س) = ل.

- كلما اقتربت قيم س من اليسار من العدد (أ) اقتربت قيم ق(س) المقابلة لها من عدد حقيقي معين (ل) يعبر عن ذلك بالصورة $\lim_{س \to أ^-}$ ق(س) = ل.

- إذا كان $\lim_{س \to أ^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س) = ل فإن $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة ويكون $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ل

نشاط (٣)

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ ، س ≠ ٣



$\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = ٦ ، $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = ٦

$\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ...

ق (٣) = ...

أناقش:

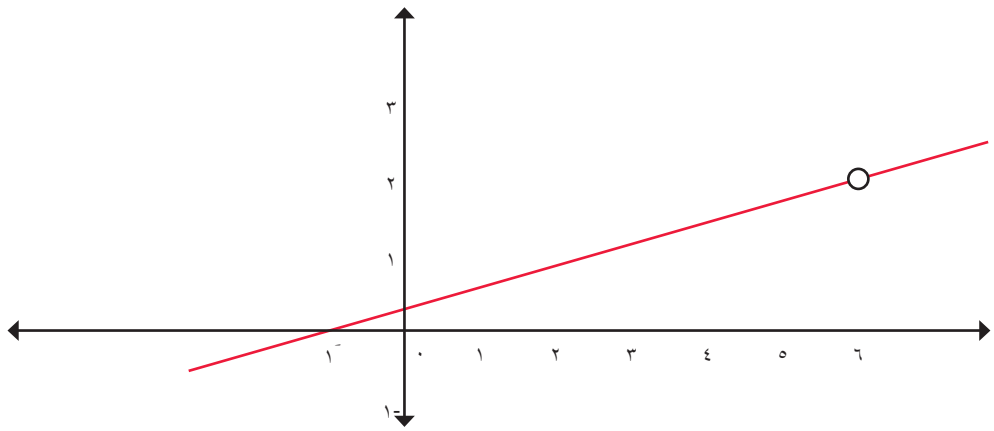
هل توجد علاقة بين وجود النهاية ووجود صورة الاقتران؟

نشاط (٤)

إذا كان ق (س) = $\frac{س^٢ - ٥س - ٦}{س - ٦}$ ، س ≠ ٦ فإن

ق (س) = $\frac{(س - ٦)(س + ١)}{(س - ٦)}$ ، س ≠ ٦

ق (س) = (س + ١) ، س ≠ ٦



أكمل الجدول الآتي:

س	...	٦,١	٦,٠١	...	...	٦	...	٥,٩٩٩	...	...	...
ق (س)	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

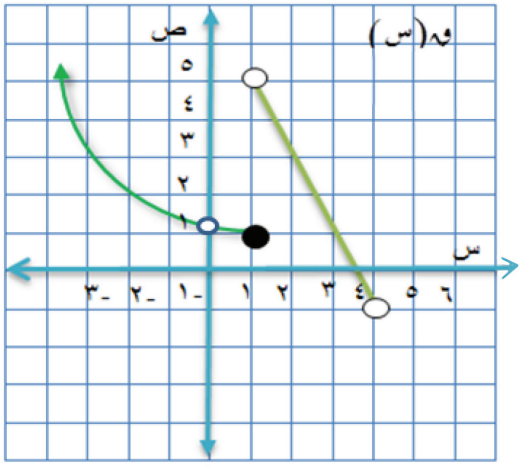
$\lim_{س \to ٦^-}$ ق (س) = ...

$\lim_{س \to ٦^+}$ ق (س) = ...

$\lim_{س \to ٦}$ ق (س) = ...

نشاط (٥)

الشكل المجاور:



١) ق(١) = ١

٢) $\lim_{س \to ١^-}$ ق (س) = ١

٣) $\lim_{س \to ١^+}$ ق (س) = ...

٤) $\lim_{س \to ١}$ ق (س) = ...

٥) $\lim_{س \to ٠}$ ق (س) = ...

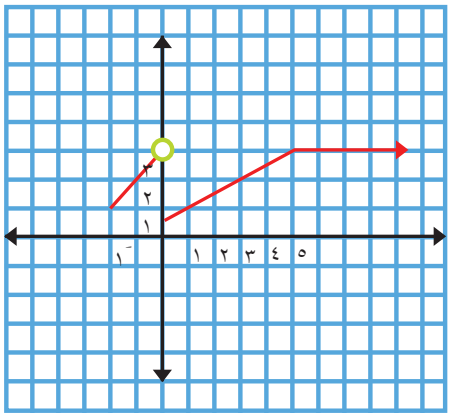
تمارين ومسائل

١ أجد النهايات الآتية باستخدام الجدول :

أ) $\lim_{س \to ٥}$ $\frac{س^٢ - ٢٥}{س - ٥}$ س ≠ ٥

ب) $\lim_{س \to ١}$ (س − ٢)

٢ أعتمد الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) لإيجاد.



أ) $\lim_{س \to ٥}$ ق (س)

ب) $\lim_{س \to ٠^-}$ ق (س)

جـ) $\lim_{س \to ٠^+}$ ق (س)

د) $\lim_{س \to ٠}$ ق (س)

قاعدة (١)

إذا كان $\text{ن}(س) = جـ$ فإن $\lim_{س \to أ} \text{ن}(س) = جـ$ حيث $أ$ ، $جـ \in ح$

قاعدة (٢)

إذا كانت $\lim_{س \to أ} \text{ن}(س) = ل$ ، $\lim_{س \to أ} هـ(س) = ك$ وكان $جـ$ عدداً حقيقياً فإن:

١. $\lim_{س \to أ} (\text{ن}(س) \pm هـ(س)) = \lim_{س \to أ} \text{ن}(س) \pm \lim_{س \to أ} هـ(س) = ل \pm ك$

٢. $\lim_{س \to أ} جـ \text{ن}(س) = جـ \times ل$

٣. $\lim_{س \to أ} (\text{ن}(س) \times هـ(س)) = \lim_{س \to أ} \text{ن}(س) \times \lim_{س \to أ} هـ(س) = ل \times ك$

٤. $\lim_{س \to أ} \frac{\text{ن}(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to أ} \text{ن}(س)}{\lim_{س \to أ} هـ(س)} = \frac{ل}{ك}$ ، $هـ(أ) \neq ٠$ ، $ك \neq ٠$

نشاط (١)

إذا كان $\lim_{س \to ٣} \text{ن}(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = -٣$

١. $\lim_{س \to ٣} (\text{ن}(س) + هـ(س)) = \lim_{س \to ٣} \text{ن}(س) + \lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٤ + (-٣) = ١$

٢. $\lim_{س \to ٣} (٢\text{ن}(س) - ٣هـ(س)) = ٢ \lim_{س \to ٣} \text{ن}(س) - ٣ \lim_{س \to ٣} هـ(س) =$ .....

٣. $\lim_{س \to ٣} (\text{ن}(س) \times ٢هـ(س)) = \lim_{س \to ٣} \text{ن}(س) \times ٢ \lim_{س \to ٣} هـ(س) =$ .....

٤. $\lim_{س \to ٣} \frac{\text{ن}(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to ٣} \text{ن}(س)}{\lim_{س \to ٣} هـ(س)} =$ .....

٥. $\lim_{س \to ٣} \text{ن}^{٢}(س) = \lim_{س \to ٣} \text{ن}(س) \times \lim_{س \to ٣} \text{ن}(س) =$ .....

أتذكر:

اقتران كثير الحدود هو اقتران يكون على الصورة:

ن(س) = $أ_{ن} س^{ن} + أ_{ن-١} س^{ن-١} + أ_{ن-٢} س^{ن-٢} + ... + أ_{١} س^{١} + أ_{٠}$ حيث ن ∈ ط ، $أ_{٠}$ ، $أ_{١}$ ، ..... $أ_{ن}$ أعداد حقيقية

قاعدة (٣)

إذا كان ن(س) كثير حدود فإن $\lim_{س \to أ}$ ن(س) = ن(أ)

مثال (١): إذا كان ن(س) = ٣س^{٢} + ٢ أجد $\lim_{س \to ٢}$ ن(س)

بما أن ن(س) كثير حدود فإن $\lim_{س \to ٢}$ ن(س) = ن(٢) = ٣(٢)^{٢}+٢ = ١٤

أتذكر:

الاقتران النسبي هو اقتران يمكن كتابته على الصورة م(س) = $\frac{ن(س)}{هـ(س)}$

حيث ن(س)، هـ(س) كثيرا حدود، هـ(س) ≠ صفر

لإيجاد نهاية الاقتران النسبي م(س) ألجأ إلى التعويض المباشر:

١. إذا كان التعويض المباشر يعطي $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد غير الصفر}}$ فإن $\lim_{س \to أ}$ م(س) = $\frac{ن(أ)}{هـ(أ)}$ ، هـ(أ) ≠ ٠

٢. إذا كان التعويض المباشر يعطي $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ فإن هذه الكمية غير معرفة.

٣. إذا كان التعويض المباشر يعطي $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فإن هذه الكمية غير معينة. وعندها ألجأ إلى التحليل ثم الاختصار ثم التعويض.

نشاط (٢)

إذا كان ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٢٥}{س^{٢} - ٥س}$ ، س ≠ ٥ فإن

أ) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٢٥}{س^{٢} - ٥س}$ ، س ≠ ٥ بالتعويض المباشر

= $\lim_{س \to ٢} \frac{٤ - ٢٥}{١٠ - ٤}$ = ...

ب) $\lim_{س \to ٥}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٢٥}{س^{٢} - ٥س}$ ، س ≠ ٥

التعويض المباشر يساوي $\frac{صفر}{صفر}$ وهي كمية غير معينة، لذا ألجأ للتحليل، ثم الاختصار، ثم التعويض.

= $\lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)(س + ٥)}{س(س - ٥)}$ ، س ≠ ٥

= $\lim_{س \to ٥} \frac{(س + ٥)}{س}$ ، س ≠ ٥ لماذا؟

= .....

نشاط (٣)

أجد $\lim_{س \to ٢} \frac{٤ - س^{٢}}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢

عند التعويض المباشر أحصل على: $\frac{٤ - ٤}{٢ - ٢} = \frac{٠}{٠}$

وهي صورة غير معينة، $\lim_{س \to ٢} \frac{٤ - س^{٢}}{س - ٢}$ = $\lim_{س \to ٢} \frac{(٢ - س)(٢ + س)}{(س - ٢)}$ = ...

تمارين ومسائل

١ إذا كان $\lim_{س \to ٢} ق(س) = -٢$ ، $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٣$. أجد النهايات الآتية:

أ- $\lim_{س \to ٢} (٢ق(س) - هـ(س))$

ب- $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{٥ق(س)}{هـ(س) + س} \right)$

ج- $\lim_{س \to ٢} (٤ق(س) + س^{٢} - ٣)$

٢ أجد النهايات الآتية:

أ- $\lim_{س \to ٤} \frac{٣س^{٢} - ١٢س}{س^{٢} - ١٦}$ ، $س \neq \pm ٤$

ب- $\lim_{س \to ٥} (\frac{س^{٢}}{س^{٢} - ٢٥} - \frac{٥س}{س^{٢} - ٢٥})$، $س \neq \pm ٥$

د- $\lim_{س \to \sqrt{٥}} \frac{س^{٢} - ٥}{س - \sqrt{٥}}$ ، $س \neq \sqrt{٥}$

٣ إذا كان $ق(س) = \frac{س^{٢} - ٢س}{س^{٢} - ٥س + ٦}$، $س \neq ٣$، ٢. أجد $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

نشاط (١)

لتقديم خدمة أفضل للمواطنين، تسعى البلديات إلى تشجيع المواطنين على تسديد المستحقات المترتبة عليهم، فإذا قدمت إحدى البلديات عرضا يقضي بخصم ربع المستحقات في حالة دفع مبلغ مئة دينار أو أكثر، وخصم مبلغ ثابت قدره ٢٥ ديناراً في حالة دفع مبلغ بين ٨٠ و ١٠٠ دينار .

يمكن تمثيل العرض بالعلاقة الآتية حيث س تمثل المبلغ المستحق:

$$ق(س) = \begin{cases} ٢٥ \ ، \ ٨٠ < س < ١٠٠ \\ \frac{١}{٤} س \ ، \ س \geq ١٠٠ \end{cases}$$

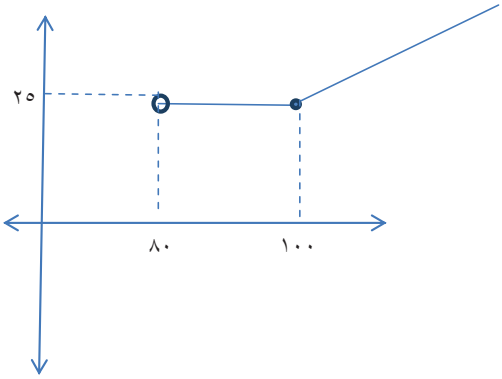
قيمة الخصومات لشخص دفع مبلغ ٨٥ ديناراً ، هو ٢٥ ديناراً.

قيمة الخصم لشخص دفع مبلغ ١٢٠ ديناراً، هو .....

قيمة الخصم لشخص دفع مبلغ ٢٠٠ دينار، هو .....

هل قيمة الخصم تساوي ٢٥ ديناراً، عندما يقترب مبلغ المستحقات من ١٠٠ دينار.

إذا مثلت علاقة الخصم بالشكل المجاور



فإن $\lim_{س \to ١٠٠^+} ق(س)$ = ...

$\lim_{س \to ١٠٠^-} ق(س)$ = ...

$\lim_{س \to ١٠٠} ق(س)$ = ...

نشاط (٢)

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢س + ١ \ ، \ س < ٢ \\ س^٢ + ١ \ ، \ س \geq ٢ \end{cases}$

١. $\lim_{س \to ٤} ق(س) = \lim_{س \to ٤} (٢س + ١) = ٩$

٢. $\lim_{س \to ١} ق(س) = \lim_{س \to ١} (س^٢ + ١)$ = ...

٣. $\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢} (٢س + ١)$ = ...

٤. $\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = \lim_{س \to ٢} (س^٢ + ١)$ = ...

٥. $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ = ...

قاعدة:

إذا كان ق(س) اقتران متعدد القاعدة و يُغير من قاعدته عند س = أ. وكان $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to أ^-}$ ق(س) = ل فإن $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة وتساوي ل.

نشاط (٣)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٥س + ٤}{س - ٤} & ، س \neq ٤ \\ -١ & ، س = ٤ \end{cases}$ فإن

$\lim_{س \to ٤^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٤}$ $\frac{س^٢ - ٥س + ٤}{س - ٤}$ (لماذا؟) = ...

$\lim_{س \to ٤^-}$ ق(س) = ... ، $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) = ...

ق(٤) = ...

تمارين ومسائل (٤-٤)

١ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ - ٢ & ، س \leq ٠ \\ س - ٢ & ، س > ٠ \end{cases}$

أجد $\lim_{س \to ١^-}$ ق(س) ، $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) إن وُجدت.

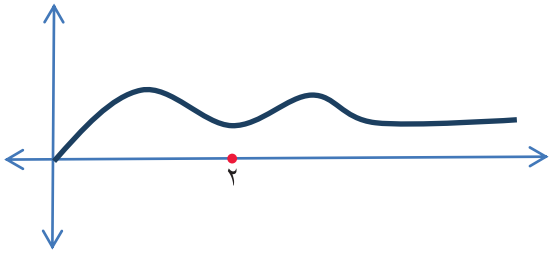
٢ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{٤ - س}{س - ٤} & ، س < ٤ \\ أس^٢ - ٩ & ، س \geq ٤ \end{cases}$ ، أجد قيمة أ إذا علمت أن $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) موجودة.

نشاط (١)

لدعم صمود أهلنا في مدينة القدس وإنعاش اقتصادهم، قررت مدرسة عسقلان الثانوية للبنات تنظيم رحلة مدرسية إلى مدينة القدس. وأثناء السفر في الحافلة لاحظت سلمى عدّاد السرعة في الحافلة، فكانت السرعة تتغير صعوداً ونزولاً فتارةً تصل السرعة إلى ٩٠كم/ساعة، وتارةً أخرى تنزل إلى ٥٠كم/ساعة.

تساءلت سلمى: هل السرعة تنتقل مباشرة من ٥٠ كم/ ساعة إلى ٩٠ كم/ ساعة، أم تنتقل لتمر بالسرعات الواقعة بين ٥٠ و ٩٠؟

أجابتها معلمة الفيزياء بـِ .....



إذا كانت الحافلة تسير حسب العلاقة الممثلة بالشكل، هل يمكن تمثيل هذه العلاقة دون رفع القلم؟

مثل هذه العلاقة تكون متصلة؛ لأنها ترسم دون رفع القلم.

$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = ... ، $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ...

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ... ، ق(٢) = ...

العلاقة بين $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) و ق(٢) = ...

تعريف: الاتصال عند نقطة:

يكون الاقتران ق(س) متصلاً عند س = أ إذا تحققت الشروط الآتية:

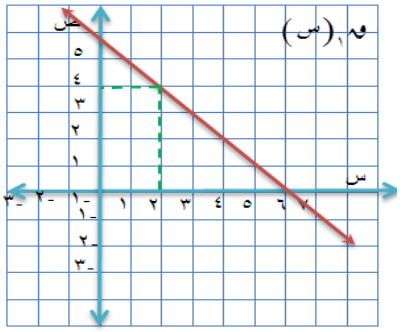
١. ق(أ) موجودة ومعرفة كعدد حقيقي.

٢. $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة.

٣. $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ)

نشاط (٢)

في الشكل المجاور:



ق (٢) = ٤

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٤.

ق (٢) = $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٤.

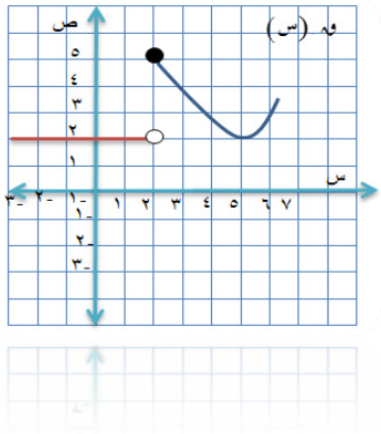
ألاحظ أن الشكل يمثل الاقتران كثير الحدود ص = ٦ − س وهو متصل دائماً.

قاعدة:

الاقترانات كثيرة الحدود متصلة في مجالها.

نشاط (٣)

في الشكل المجاور:



ق(٢) = ... ، $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ...

لأن .....

هل ق(س) متصلاً عند س = ٢.

مثال (١): إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٤ & ، س = ١ \end{cases}$

أبحث اتصال الاقتران ق(س) عند س = ١.

الحل:

ق(١) = ٤ ، $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٢

$\lim_{س \to ١}$ ق(س) ≠ ق(١) ومنها ق(س) غير متصل عند س = ١.

مثال (٢): إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س^{٢} - ٢ ، س > ٠ \\ س - ٢ ، س \leq ٠ \end{cases}$

أبحث اتصال الاقتران ق(س) عند س = صفر.

الحل:

أبحث شروط الاتصال عند س = صفر لأن الاقتران ق(س) يغير قاعدته عندها.

ق(٠) = ٠ − ٢ = -٢

$\lim_{س \to ٠^{+}}$ ق(س) = -٢ لماذا؟

$\lim_{س \to ٠^{-}}$ ق(س) = -٢ لماذا؟

$\lim_{س \to ٠^{+}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٠^{-}}$ ق(س) = -٢ لماذا؟

ومنها $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = -٢

ق(٠) = $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = -٢

- ق(س) متصل عند س = -٢

نشاط (٤)

إذا كان ق(س) = ٣س + ١، هـ (س) = س^{٢}.

يكون الاقتران ق(س) متصلاً عند س = ٢ لأنه اقتران كثير حدود.

يكون الاقتران هـ(س) متصلاً عند س = ٢ لأن .....

(ق + هـ)(س) متصل عند س = ٢ لأن مجموع اقتراني كثيري حدود يساوي اقتران كثير حدود.

(ق − هـ)(س) متصل عند س = ٢ لأن .....

(ق × هـ)(س) متصل عند س = ٢ لأن .....

أناقش:

هل $\frac{ق}{هـ}$ متصل عند س = ٢، حيث هـ (س) ≠ ٠ ؟

قاعدة:

إذا كان ق (س)، هـ (س) اقترانين متصلين عند س = أ فإن:

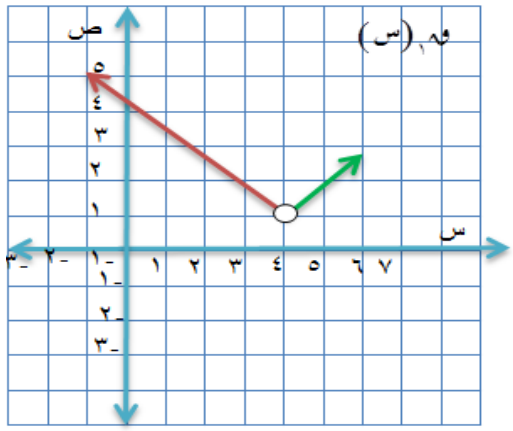
١. (ق ± هـ) (س) يكون متصلاً عند س = أ.

٢. (ق × هـ) (س) يكون متصلاً عند س = أ.

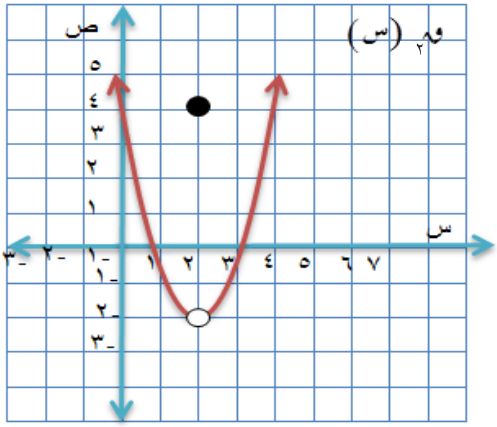
٣. $\frac{ق}{هـ}$ (س) يكون متصلاً عند س = أ حيث هـ (أ) ≠ صفر

تمارين ومسائل

١ أبيّن سبب عدم اتصال الاقترانات الآتية، عند النقطة المذكورة إزاء كل منها:



عند س = ٤



عند س = ٢

٢ أبحث اتصال الاقترانات الآتية، عند قيم س المشار لها في كل حالة:

أ- ق(س) = ٣س − ٦ . عند س = ١

ب- ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ٢س}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ ٧ & ، س = ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

٣ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣ - س & ، س > ١ \\ س^{٢} + ١ & ، س \leq ١ \end{cases}$ أبحث اتصال الاقتران ق(س) ، عند س = ١

تمارين عامة

١ أختار رمز الإجابة الصحية فيما يأتي:

١) ما قيمة $\lim_{س \to ٢} (س^٣ + ٢س^٢ + ٦)$؟

أ) -٦ ب) -٥ جـ) ٥ د) ٦

٢) إذا كان $\lim_{س \to ٥} ٣ق(س) = ٣$ ، $\lim_{س \to ٥} هـ(س) = ٢$. ما قيمة $\lim_{س \to ٥} ٢ق(س) + \lim_{س \to ٥} هـ^٢(س)$؟

أ) ٣ ب) ٥ جـ) ٦ د) ٨

٣) ما قيمة $\lim_{س \to ٦} \frac{س - ٦}{س^٢ - ٥س - ٦}$ ؟

أ) $\frac{١}{٦}$ ب) $-\frac{١}{٧}$ جـ) $-\frac{١}{٨}$ د) غير موجودة

٤) إذا كان $\lim_{س \to ا} (س^٢ - ٣س) = -٢$ ما قيمة الثابت ا ؟

أ) ١، ٢ ب) -١، -٢ جـ) -١ د) ٢، -١

٢ أجد النهايات الآتية:

أ) $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{٢س}{س^٢ - ٤} - \frac{س^٢}{س^٢ - ٤} \right)$

ب) $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{س^٢ - ٧س}$

ج) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{٧ + س} - ٢}{س - ٤}$

ورقة عمل

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من البدائل المدرجة:

١- $\lim_{س \to 0^+}$ س × |س| = ...

أ) صفر　　ب) ١　　ج) -١　　د) غير موجودة

٢- $\lim_{س \to 0^-}$ س × |س| = ...

أ) صفر　　ب) ١　　ج) -١　　د) غير موجودة

٣- إذا كانت $\lim_{س \to ٢}$ ن(س) = -٣، فإن $\lim_{س \to ٢}$ (ن(س) − س + ١) = ...

أ) -٥　　ب) -٦　　ج) -٤　　د) ٤

٤- إذا كان $\lim_{س \to ٣}$ ٥ن(س) = ٥، $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) = ٤ ، فإن $\lim_{س \to ٣}$ (هـ(س) − ن(س) + س) = ...

أ) صفر　　ب) ٤　　ج) ٣　　د) ٦

٥- $\lim_{س \to ٦}$ ($\frac{١}{٣}$ س + ٣) = ...

أ) ٣　　ب) ٥　　ج) ٦　　د) $\frac{١}{٣}$

٦- إذا كانت $\lim_{س \to ٠}$ (ن(س) − ٥) = ٣، فإن $\lim_{س \to ٠}$ ٢ن(س) = ...

أ) ١٦　　ب) -٤　　ج) ٤　　د) غير موجودة

٧- $\lim_{س \to -٢}$ $\frac{٢س + ٤}{س^٢ - س - ٦}$ = ...

أ) -٤　　ب) $\frac{٢}{٥}$　　ج) -$\frac{٢}{٥}$　　د) صفر

٨- $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{س - ٣}{س^٢ + س - ١٢}$ = ...

أ) $\frac{١}{٧}$　　ب) -$\frac{١}{٧}$　　ج) ٧　　د) -٧

٩- $\lim_{س \to ١}$ $\frac{س^٣ - ١}{س - ١}$ = ...

أ) -١　　ب) ١　　ج) -٣　　د) ٣

١٠- $\lim_{س \to ١}$ $\frac{س (\frac{١}{س} - س)}{س - ١}$ = ...

أ) ٢　　ب) -٢　　ج) ١　　د) -١

١١- $\lim_{س \to 0} \frac{٦س^{٤} + ١٨س^{٢}}{٢س^{٢} - ٣س^{٣}} = ...$

أ) -٦ ب) -٢ ج) ٣ د) ٩

السؤال الثاني: احسب قيمة النهايات الآتية (إن أمكن):

أ) أوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س - ٥}{١ + س}$

ب) أوجد $\lim_{س \to ٥} \frac{٢س - ١٠}{س^{٢} - ٢٥}$

السؤال الثالث: ابحث في اتصال الاقتران ق(س) $= \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٦ & ، س = ٣ \end{cases}$ عند س $= ٣$

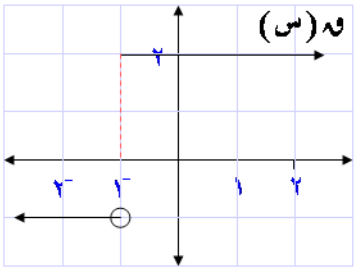
إختبار ذاتي

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من البدائل المدرجة:

١) عند حل المعادلة ٣ س -١ = -١٦ فإن قيمة س =

أ) ٥ ب) -٥ جـ) ٣ د) -٣

٢) من الشكل المجاور، ما قيمة $\lim_{س \to -١} ق(س)$ ؟



أ. ٢ ب. -١ ج. ٣ د. غير موجودة

٣) ما قيمة $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ ؟

أ. صفر ب. ٢ ج. ٤ د. غير موجودة

٤) أحد الاقترانات الآتية متصل عند س = صفر ، هو .....

أ) $\frac{١ + س}{٢س}$ ب) $\frac{١ + س}{س(س + ٥)}$ ج) $\frac{١ + س}{٤ - ٢س}$ د) $\frac{١}{س^{٢}(س - ١)}$

٥) إذا كان ق(س) متصلاً على ح، $\lim_{س \to ٢} (٣ق(س) + س) = ١٤$ ، فإن: ق(٢)= .....

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٤ د) $\frac{١٣}{٣}$

السؤال الثاني: احسب قيمة النهايات الآتية:

أ) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢} + ٧}{س^{٢} + ٩}$ ب) $\lim_{س \to -٤} \frac{س + ٤}{١ - س}$

السؤال الثالث: أبحث في اتصال الاقتران: ق(س) =

$$\begin{cases} س^{٢} + س & ، \ س > ١ \\ ٢س & ، \ س \leq ١ \end{cases}$$

عند س = ١.

السؤال الرابع: إذا كانت $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٥ ، $\lim_{س \to ٢}$ ٤هـ(س) = ١٢ ، احسب قيمة كل من:

أ) $\lim_{س \to ٢}$ (ق(س) − ٢هـ(س))

ب) $\lim_{س \to ٢}$ (ق(س) + ٦)

ج) $\lim_{س \to ٢}$ (٥ق(س) + هـ(س) + س)

د) $\lim_{س \to ٢}$ $\sqrt{(٢ق(س) - ١)}$

هـ) $\lim_{س \to ٢}$ (ق^{٢}(س) + ٢هـ(س) + $\sqrt{٢س + ٥}$)

----------» انتهت الأسئلة «----------

جدول الأرقام العشوائية

Line \ Col.	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
1	10460	15011	01536	02011	81647	91646	69179	14194	62590	36207	20969	99570	91291	90700
2	22368	46573	25595	85393	30995	89198	27982	53402	93965	34095	52666	19174	39615	99505
3	24130	48360	22527	97265	76393	64809	15179	24830	49340	32081	30680	19655	63348	58629
4	42167	93093	06243	61680	07856	16376	39440	53537	71341	57004	00849	74917	97758	16379
5	37570	39975	81837	16656	06121	91782	60468	81305	49684	60672	14110	06927	01263	54613
6	77921	06907	11008	42751	27756	53498	18602	70659	90655	15053	21916	81825	44394	42880
7	99562	72905	56420	69994	98872	31016	71194	18738	44013	48840	63213	21069	10634	12952
8	96301	91977	05463	07972	18876	20922	94595	56869	69014	60045	18425	84903	42508	32307
9	89579	14342	63661	10281	17453	18103	57740	84378	25331	12566	58678	44947	05585	56941
10	85475	36857	53342	53988	53060	59533	38867	62300	08158	17983	16439	11458	18593	64952
11	28918	69578	88231	33276	70997	79936	56865	05859	90106	31595	01547	85590	91610	78188
12	63553	40961	48235	03427	49626	69445	18663	72695	52180	20847	12234	90511	33703	90322
13	09429	93969	52636	92737	88974	33488	36320	17617	30015	08272	8411	27156	30613	74952
14	10365	61129	87529	85689	48237	52267	67689	93394	01511	26358	85104	20285	29975	89868
15	07119	97336	71048	08178	77233	13916	47564	81056	97735	85677	29372	74461	28551	90707
16	51085	12765	51821	51259	77452	16308	60756	92144	49442	53900	70960	63990	75601	40719
17	02368	21382	62404	60268	89368	19885	55322	44819	01188	65255	64835	44919	05944	55157
18	01011	54092	33362	94904	31273	04146	18594	29852	71585	85030	51132	01915	92747	64951
19	52162	53916	46369	58586	23216	14513	83149	98736	23495	64350	94738	17752	35156	35749
20	07056	97628	33787	09998	42698	06691	76988	13602	51851	46104	88916	19509	25625	58104
21	48663	91245	85826	14346	09172	30168	90229	04734	59193	22178	30421	61666	99904	32812
22	54164	58492	00421	74103	47070	25306	76468	26384	58151	06646	21524	15227	96909	44592
23	32639	32363	05597	24200	13363	38005	94342	28728	35806	06912	17012	64161	18296	22851
24	29334	27001	87637	87308	58731	00256	45834	15398	46557	41135	10367	07684	36188	18510
25	02488	33062	28834	07351	19731	92420	60952	61280	50001	67658	32586	86679	50720	94953
26	81525	72295	04839	96423	24878	82651	66566	14778	76797	14780	13300	87074	79666	95725
27	29676	20591	68086	26432	46901	20849	89768	81536	86645	12659	92259	57102	80428	25280
28	00742	57392	39064	66432	84673	40027	32832	61362	98947	96067	64760	64584	96096	98253
29	05366	04213	25669	26422	44407	44048	37937	63904	45766	66134	75470	66520	34693	90449
30	91921	26418	64117	94305	26776	25940	39972	22209	71500	64568	91402	42416	07844	69618
31	00582	04711	87917	77341	42206	35126	74087	99547	81817	42607	43808	76655	62028	76630
32	00725	69884	62797	56170	86324	88072	76222	36086	84637	93161	76038	65855	77919	88006
33	69011	65795	95876	55293	18988	27354	26575	08625	40801	59920	29841	80150	12777	48501
34	25976	57948	29888	88604	67917	48708	18912	82271	65424	69774	33611	54262	85963	03547
35	09763	83473	73577	12908	30883	18317	28290	35797	05998	41688	34952	37888	38917	88050
36	91567	42595	27958	30134	04024	86385	29880	99730	00036	84855	29080	09250	79656	73211
37	17955	56349	90999	49127	20044	59931	06115	20542	18059	02008	73708	83517	36103	42791
38	46503	18584	18845	49618	02304	51038	20655	58727	28168	15475	56942	53389	20562	87338
39	92157	89634	94824	78171	84610	82834	09922	25417	44137	48413	25555	21246	35509	20468
40	14577	62765	35605	81263	39667	47358	56873	56307	61607	45918	89686	20103	77490	18062
41	98427	07523	00062	64270	01638	92477	66969	98420	04880	45585	46565	04102	46880	45709
42	34914	63976	88720	82765	34476	17032	87589	40836	32427	70002	70663	88863	77775	69348
43	70060	28277	39475	46473	23219	53416	94970	25832	69975	94884	19661	72828	00102	66794
44	53976	54914	06990	67245	68350	82948	11398	42878	80287	88267	47363	46634	06541	97809
45	76072	29515	40980	07391	58745	25774	00987	80059	39911	96189	41151	14222	60697	59583
46	90725	52210	83974	29992	65831	38857	50490	83765	55657	14361	31720	57375	56228	41546
47	64364	67412	33339	31926	14883	24413	59744	92351	97473	89286	35931	04110	23726	51900
48	08962	00358	31662	25388	61642	34072	81249	35648	56891	69352	48373	45578	78547	81788
49	95012	68379	93526	70765	10592	04542	76463	54328	02349	17247	28865	14777	62730	92277
50	15664	10493	20492	38391	91132	21999	59516	81652	27195	48223	46751	22923	32261	85653