١١

بسم الله الرحمن الرحيم

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الفرع الأدبي والشرعي

الرزمة التعليمية

٢٠٢٤

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 - رام الله - فلسطين
pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

moehe.gov.ps | mohe.pna.ps | mohe.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
هاتف +970-2-2983280 | فاكس +970-2-2983250

المحتويات

الوحدة			
١	**المعادلات والمتباينات**		
	١ – ١	حلّ معادلة خطيّة بمتغير واحد	٢
	١ – ٢	حلّ نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين	٤
	١ – ٣	حلّ نظام من معادلتين: إحداهما خطية، والأُخرى تربيعيّة	٨

المحتويات

الوحدة			
٢	**المتتاليات**		
	٢ – ١	المتتاليات	١٢
	٢ – ٢	المتتالية الحسابية	١٥
	٢ – ٣	المتتالية الهندسية	١٩

المحتويات

الوحدة			
٣	**النهايات والاتصال**		
	٣ – ١	نهاية الاقتران	٢٧
	٣ – ٢	قوانين النهايات	٣٠
	٣ – ٣	الاتصال	٣٥

النتاجات

يتوقع من الطلبة بعد دراسة هذه الرزمة التعليمية تحقيق الآتي:

١ حلّ معادلة خطية بمتغير واحد.

٢ حلّ نظام من معادلتين إِحداهما خطيّة والأُخرى تربيعيّة.

٣ التعرّف إِلى مفهوم المتتالية الحسابية.

٤ استنتاج الحدّ العام للمتتالية الحسابية.

٥ إِدخال عدد من الأَوساط الحسابيّة بين عددين.

٦ التعرّف إِلى المتتالية الهندسية.

٧ التمييز بين المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية.

٨ إِدخال عدد من الأَوساط الهندسية بين عددين.

٩ التعرف إِلى مفهوم نهاية الاقتران عند نقطة.

١٠ إِيجاد نهاية الاقتران عند نقطة باستخدام الجدول والرسم البياني.

١١ إِيجاد نهاية الاقتران عند نقطة باستخدام قوانين النهايات.

١٢ البحث في اتصال اقتران عند نقطة.

١ - ١ حلّ معادلة خطيّة بمتغير واحد

Solving a Linear Equation With One Variable

تعريف: المعادلة الخطيّة بمتغير واحد: هي معادلة يمكن كتابتها على الصورة

أ س + ب = صفر ، حيث أَن أ ، ب ∈ ح ، أ ≠ صفر.

نشاط ١: أُكملُ الجدول الآتي:

المعادلة	نوع المعادلة	حل المعادلة الخطيّة بمتغير واحد
أ) ٧س – ١١ = ٣	خطيّة بمتغير واحد	بإضافة النظير الجمعي للعدد -11 لطرفي المعادلة ينتج: ٧س = ١٤ بضرب الطرفين بالنظير الضربي للعدد ٧ ينتج: س = ٢
ب) $\frac{٥}{س} - ٧ = ٠$	غير خطيّة. لماذا؟	
جـ) ٣س + ٥ = -٤		
د) $\frac{س}{٣} - ٤ = -٢$		
هـ) س + ٥ص = ١٠		

نشاط ٢: إذا علمتَ أَن قاعدة مبنى المسجد القبلي الواقع جنوبي المسجد الأَقصى، مستطيلة الشكل، ويزيد طولها عن عرضها بمقدار ٢٥ متراً، فإذا كان محيطها = ٢٧٠ متراً، فما بُعْديّ القاعدة؟

أفرض أَن طول القاعدة = س متر.

عرض القاعدة بدلالة س = _____.

بما أَن محيط القاعدة = ٢٧٠ متراً.

٢((س – ٢٥) + س) = ٢٧٠، لماذا؟

إذن طول القاعدة: س = ٨٠ متراً. عرض القاعدة: _____.

تمارين ومسائل ١ - ١:

١ أُميّز المعادلة الخطية بمتغير واحد مما يأتي:

أ) س + ٣ = ص

ب) س – ١ = ٤س

جـ) $س^{٢}$ – ١ = صفر

د) ص = ٤س

هـ) س ص = ٩

و) $س = \frac{س}{س - ٣}$

٢ أحِلّ المعادلات الآتية:

أ) ٢س – ٣ = ٩

ب) ٧(س – ٣) = ٢٨

جـ) س – ٤ = ٢س – ٦

د) ٣(س – ٥) = ٤ – (س + ٣)

٣ طول محمد يساوى ٣ أَرباع طول أَحمد، والفرق بين طوليهما ٤٠ , ٠ متر، أَحسب طول كل منهما.

١ - ٢ حلّ نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين

Solving a System of Tow Linear Equations With Two Variables

أولاً : طريقة التعويض:

أتعلم: نظام المعادلات الخطيّة: مجموعة من المعادلات الخطيّة، لها المتغيرات نفسها، ويتمثّل حلّ النظام الخطي في إيجاد القيم العددية لمتغيراته حيث تتحقق معادلاته جميعها في آن واحد.

مثال ١ : أَحِلُ نظام المعالادت الآتية:

ص – س = ٣

س + ٢ص = ٧

الحل : أَجعل أَحد المتغيرين موضوع القانون وليكن ص في المعادلة ص – س = ٣

إذن ص = ٣ + س

أُعوِّضُ قيمة ص في المعادلة س + ٢ص = ٧

س + ٢(٣ + س) = ٧

٣س + ٦ = ٧

س = $\frac{١}{٣}$. لماذا؟

ص = ٣ + $\frac{١}{٣}$ = ٣ $\frac{١}{٣}$

إذن حلّ النّظام ($\frac{١}{٣}$ ، ٣ $\frac{١}{٣}$)

نشاط ١ : أَحِلّ النظام الآتي باستخدام طريقة التّعويض:

٢س + ٥ ص = -١

ص – ٣ س = ١٠

أُرقِّم المعادلات:

٢س + ٥ ص = -١ ..... (١)

ص – ٣س = ١٠ .....(٢)

أجعل ص في المعادلة (٢) موضوع القانون فتكون ص = ٣س + ١٠

أُعوِّضُ قيمة ص في المعادلة (١) فينتج:

٢س + ٥ (_____) = -١

إذن س = -٣ . لماذا؟

أُعوِّضُ قيمة س في إِحدى المعادلتين

ومنها: ص = _____ .

إِذن حلّ النّظام (_____ ، _____).

أَتحقق من صحة الحلّ.

ثانياً : طريقة الحذف:

تتلخص هذه الطريقة في التّخلص من أَحد المتغيرين وصولاً إِلى معادلة بمتغير واحد.

مثال ٢ : أَحِلّ النظام الآتي بطريقة الحذف:

٢ س – ٣ ص = -٩

$-$س + ٣ ص = ٦

الحل : أُرقِّم المعادلات:

٢س – ٣ص = -٩ ..... (١) (بالجمع)

$-$س + ٣ ص = ٦ ..... (٢)

ينتج أَن قيمة س = -٣ . لماذا؟

أُعوِّض عن قيمة س = -٣ في المعادلة (٢) فينتج:

$-(-٣) + ٣$ ص = ٦

إذن ص = ١

إذن حلّ النظام $(-٣ ، ١)$

أَتحقق من صحة الحلّ.

نشاط ٢: قدّم محل لبيع السّمك في غزة عرضاً لـــ٥ كيلوغرام من سمك السردين مع ٢ كيلوغرام من سمك البوري بـ ١١ ديناراً . و٣ كيلوغرام من سمك السردين مع ٤ كيلوغرام من سمك البوري بـ ١٥ ديناراً. أَحسب ثمن الكيلوغرام الواحد لكل نوع.

أفرض أَن ثمن كيلوغرام السردين = س دينار وثمن كيلوغرام سمك البوري = ص دينار

ينتج النظام الآتي:

٥ س + ٢ ص = ١١ ..... (١).

٣ س + ٤ ص = ١٥ ..... (٢). لماذا؟

أضرب المعادلة (١) في العدد ٢، ينتج:

١٠س + ٤ ص = ٢٢ (بالطرح)

٣س + ٤ ص = ١٥

ينتج أَن قيمة س = ١ . لماذا؟

إذن ص = _____ .

إذن ثمن كيلوغرام السردين = _____ .

و ثمن كيلوغرام سمك البوري = _____ .

أَتحقق من صحة الحلّ.

تمارين ومسائل ١ - ٢:

١ أَحِلّ أَنظمة المعادلات الآتية بطريقة التّعويض:

أ ص = ٢ س + ٧
٣ س + ٢ ص = ٧

ب ٤ س + ٢ ص = ٨
٣ س + ٣ ص = ٩

٢ أَحِلّ أَنظمة المعادلات الآتية بطريقة الحذف:

أ س + ص = ١٠
س – ص = ٤

ب ٥ م – ب = ٧
٧ م – ب = ١١

٣ عددان مجموعهما ٢٢ والفرق بينهما ١٢. أَجِدْ كلاً من العددين.

١ - ٣ حلّ نظام من معادلتين: إحداهما خطية، والأُخرى تربيعيّة

Solving a System of Two Equations, One Linear and The Other Quadratic

مثال : أَحِلّ النظام الآتي جبرياً:

مثال ١ : ص – س = ١

س^{٢} + ص = ١٣

الحل : ص – س = ١ ..... (١)

س^{٢} + ص = ١٣ ..... (٢)

أجعل ص في المعادلة (١) موضوع القانون فينتج:

ص = ١ + س ..... (٣)

أُعوِّضُ قيمة ص في المعادلة (٢) فيكون:

س^{٢} + (١ + س) = ١٣

س^{٢} + س – ١٢ = ٠

إذن س = -٤ أو س = ٣

أُعوِّض س = -٤ و س = ٣ في المعادلة الخطية (١) فيكون:

عندما س = -٤ فإن ص = -٣. لماذا؟

عندما س = ٣ فإن ص = ٤

إذن حلّ النّظام (-٤ ، -٣) ، (٣ ، ٤)

نشاط : عددان حقيقيان مجموعهما ٧ والفرق بين مربعيهما = ٧ ، فما قيمة العددين؟

أفرض أَن العدد الأَول = س ، والعدد الثاني = ص.

أُعبّر عن مجموع العددين = ٧ فيكون:

س + ص = ٧ ..... (١).

أُعبّر عن الفرق بين مربعي العددين = ٧ فيكون:

$س^{٢} - ص^{٢} = ٧$ ..... (٢).

أَجعلُ س في المعادلة (١) موضوع القانون فينتج:

س = _____.

أُعوِّض عن قيمة س في المعادلة (٢) فيكون:

$(٧ - ص)^{٢} - ص^{٢} = ٧$

إِذن ص = _____.

س = _____.

أَتحققُ من صحة الحلّ.

تمارين ومسائل ١ - ٣:

١ أَيّ النقاط الآتية: (−٣ ، ١) ، (−١ ، ٣) ، (٣ ، −١)، تمثّل حلاً للنظام:

$س^{٢} - ص^{٢} = ٨$

$س + ص = ٢$

٢ أَحِلّ الأَنظمة الآتية من المعادلات:

أ $س - ص = ٢$

$٢س^{٢} - ٣ص^{٢} = ١٥$

ب $٣س^{٢} - ص^{٢} = ٣$

$٢س + ص = ١$

٣ مستطيل محيطه ٢٤ سم، ومساحته ٢٠ سم^{٢}، أَجِدْ بعديه.

تمارين عامة:

١ اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما مجموعة حل المعادلة ٢س – ٣ = ٧ ؟

أ) {–٥}　　ب) {–٢}　　جـ) {٢}　　د) {٥}

٢ ما النقطة التي تحقق المعادلة ص = ٢س – ٤؟

أ) (٤ ، –٢)　　ب) (٠ ، –٤)　　جـ) (٢ ، –٤)　　د) (–٢ ، ٤)

٣ إذا كان عُمر محمد خمسة أمثال عُمر حسن مضافاً إليه ٢، وكان عُمر حسن يساوى ٧ سنوات، فكم عُمر محمد؟

أ) ٤٥　　ب) ٣٧　　جـ) ١٤　　د) ١٠

ج) أ = ٠　　د) أ = –٢

٤ إذا كانت س = –٥ وكان ص = ٣س – ٤ فما قيمة ص؟

أ) –١٩　　ب) –٢٧　　جـ) –١٥　　د) –١١

٢ أَحِلّ النظام الآتي باستخدام طريقة التعويض:

س + ٣ ص = ١٥　　٤ س + ص = ١٦

٣ أحِلّ النظام الآتي باستخدام طريقة الحذف:

س + ص = ٥　　٢ س + ص = ٦

أقيّم ذاتي أكمل الجدول الآتي:

المهارة	مرتفع	متوسط	متدني
أحل معادلتين خطيتين بعدة طرق			
أحل نظام من معادلات خطية وتربيعية			
أوظف حل المتباينات في حل مشكلات حياتية			

نموذج اختبار

السؤال الأول: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

١- أيّ المعادلات الآتية تمثل معادلة خطية بمتغير واحد؟

أ) س = ٣ ص + ٥ ب) س^{٢} - ٣ = ٠ جـ) ٣ س + ١ = ٠ د) $\frac{١}{س}$ = ٧

٢- ما مجموعة حل المعادلة ٢ س + ٧ = ١٧ ؟

أ) {$^{-}$٥} ب) {٥} جـ) {$^{-}$١٠} د) {١٠}

٣- أيُ النقاط الآتية تمثل حلاً للنظام: س^{٢} + ص^{٢} = ٥ ، س - ص = ١ ؟

أ) ($^{-}$١، $^{-}$٢) ب) ($^{-}$١، ٢) جـ) ($^{-}$٢، $^{-}$١) د) (١، ٢)

٤- إذا كان ثمن كتاب ٣ أضعاف ثمن قلم مضافاً إليه ٥ ، فإذا كان ثمن القلم ديناراً واحداً ، ما ثمن الكتاب الواحد؟

أ) ٣ دنانير. ب) ٥ دنانير. جـ) ٨ دنانير. د) دينار واحد.

٥- إذا كانت ٤ س - ٨ ص = ١٢ ، اجعل س موضوع القانون في المعادلة:

أ) س = ١٢ + ٨ ص ب) س = ٨ ص - ٦ جـ) س = ٣ + ٢ ص د) س = ٣ - ٢ ص

السؤال الثاني:

أ) أحلّ النظام الآتي باستخدام طريقة الحذف:

ص + ٢س = ٣

٦ - س = ٢ص

ب) مستطيل مجموع بعديه ٧سم، فإذا كان طول قطره ٥ سم، أجد بعديّ هذا المستطيل.

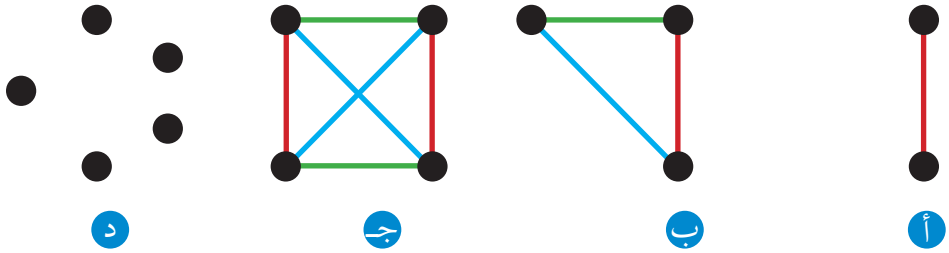
السؤال الثالث:

أ) أحل نظام المعادلات الآتي :

س - ص = ١ ، س^{٢} + ٢ص = ٦

أتعلم: **تسمى الأَعداد التي تكتب على صورة: $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، ... ، $س_{ن}$ بالمتتالية.**

نشاط ١: أَتأَمَّلُ الشكل الآتي ثم أُجيبُ عن الأَسئلة الآتية:



عد القطع المستقيمة الواصلة بين النقاط في الشكل السابق الفرع (د): _____ .

المتتالية التي تُمثّل عدد القطع المستقيمة في الشكل السابق: ١، ٣، ٦، ١٠

عدد القطع المستقيمة إِذا احتوى الشكل على ٦ نقاط : _____ .

عدد القطع المستقيمة إِذا احتوى الشكل على ٧ نقاط : _____ .

أتعلم: **تصنف المتتالية من حيث عدد الحدود إلى نوعين متتالية منتهية وغير منتهية.**

نشاط ٢: المتتالية -٥ ، -٢ ، ١ ، ... ، ٢٢ متتالية منتهية لأَننا نستطيع عدّ حدودها.

المتتالية $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ... متتالية غير منتهية. (لماذا)؟

أُعطي مثالاً على متتالية منتهية ومثالاً على متتالية غير منتهية.

تعريف: **المتتالية : هي اقتران مجاله مجموعة الأَعداد الصحيحة الموجبة أَو جزء منها على النمط {١، ٢، ٣، ...، ن} ومداه مجموعة جزئية من الأَعداد الحقيقية.**

نشاط ٣: في المتتالية : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٠ .

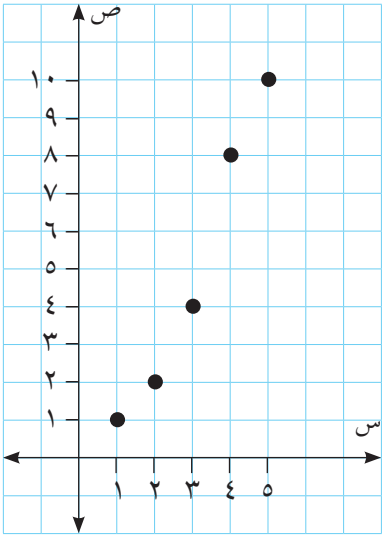
يمكن كتابة المتتالية على الصورة:

(١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٨) ، (٥ ، ١٠)

مجال هذه المتتالية : _____ .

مدى هذه المتتالية : _____ .

التمثيل البياني للمتتالية كما في الشكل المجاور.



الحد العام للمتتالية:

نشاط ٤: أَرادت مؤسسة اختيار عينة حجمها ٨٠ شخصاً من المشاركين في ندوة علمية والبالغ عددهم ٤٠٠ شخص باستخدام طريقة العينة العشوائية المنتظمة حيث كان رقم الشخص الأَول يساوي ٣. أَجِدُ رقم الشخص الأَخير في العينة.

أُكملُ الجدول الآتي:

	رقم الشخص الأَول ($ح_١$)	رقم الشخص الثاني ($ح_٢$)	رقم الشخص الثالث ($ح_٣$)	رقم الشخص الرابع ($ح_٤$)		رقم الشخص الاخير ($ح_{٨٠}$)
المتتالية التي تُمثل أرقام العينة ٣ ، ٨ ، ١٣ ، ...	٥ × ١ – ٢	٥ × ٢ – ٢	٥ × ٣ – ٢		....	

الحد العام هو $ح_ن$ = ٥ن – ٢

هل $ح_{١٠}$ = ٤٨ في المتتالية السابقة ؟ لماذا؟.

مثال : أَكتبُ الحدود الثلاثة الأُولى من المتتاليات التي حدها العام $ح_ن$ = ٣ ن + ١ .

الحل : $ح_١ = ٣ \times ١ + ١ = ٤$ ، $ح_٢ = ٣ \times ٢ + ١ = ٧$ ، $ح_٣ = ٣ \times ٣ + ١ = ١٠$

تمارين ومسائل ٢-١:

١ أكتب الحدود الستة الأُولى في كل من المتتاليات الآتية:

أ ٨ ، ٤ ، ٢ ، .....

ب $\frac{١}{٤ \times ٢}$ ، $\frac{٣}{٦ \times ٤}$ ، $\frac{٥}{٨ \times ٦}$ ، .....

جـ $ح_{ن} = ٣ - ٥ن$

د $ح_{ن} = \frac{ن}{ن^{٢} + ١}$

هـ $ك_{ن} = ك_{ن-١} - ٢$ ، علماً أن $ك_{١} = ٣$

٢ أُكمل المتتاليات الآتية، ثم أُمثّلها بيانياً.

أ $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٣ ، ... ، ... ، ...

ب ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ... ، ... ، ...

٣ أَجِدْ الحد العام في كل من المتتاليات الآتية:

أ ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ...

ب ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...

جـ $\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، $\frac{٣}{٤}$ ، ...

٢ - ٢ المتتالية الحسابية Arithmetic Sequence

تعريف: **المتتالية الحسابية: هي المتتالية التي يكون الفرق فيها بين الحد وسابقه مقداراً ثابتاً دائماً ويسمى هذا الثابت أَساس المتتالية الحسابية ويُرمز له بالرمز (د) كما يرمز للحد الأَول بالرمز (أ) وتكتب على الصورة: أ ، أ + د ، أ + ٢د ، أ + ٣د ، ...**

مثال ١ : أَتأَمّلُ المتتالية $-٥ ، -٨ ، -١١ ، -١٤ ، ...$

الفرق بين الحد الثاني والأَول: $-٨ - -٥ = -٣$.

الفرق بين الحدين الثالث والثاني: $-١١ - -٨ = -٣$.

ماذا أُلاحظ؟

تُسمّى مثل هذه المتتاليات بالمتتاليات الحسابية

مثال ٢ : في المتتالية الحسابية الآتية: $-٢٦ ، -٢٣ ، -٢٠ ، -١٧ ...$ أَجدُ:

١ الحد الأَول للمتتالية وأَساسها.

٢ الحد الخامس.

الحل :

١ الحدّ الأَول للمتتالية (أ) = -٢٦

أَساس المتتالية (د) = $-٢٣ - (-٢٦) = ٣$

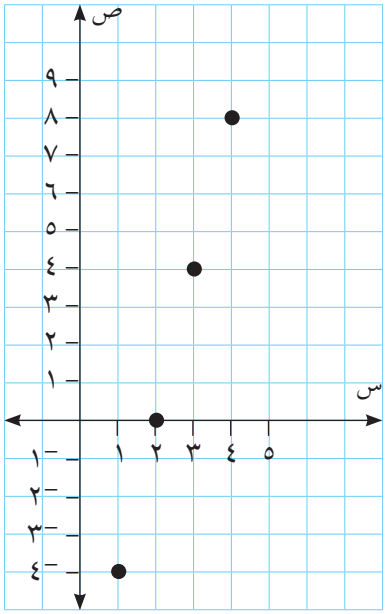
٢ $ح_٥ = أ + ٤د = -٢٦ + ٤ \times ٣ = -١٤$

نشاط ١: أُميّز المتتالية الحسابية فيما يأتي، ثم أَجِدْ أَساسها وحدها الأَول.

١ ٢ ، ٦ ، ١١ ، ١٧ ، . . .

المتتالية ٢ ، ٦ ، ١١ ، ١٧ ، . . . ليست متتالية حسابية

لأَن الفرق بين أَي حد وسابقه ليس ثابتاً.



٢ ح$_{١}$ = ٣ن – ٢. وتُكتب المتتالية على الشكل:

١ ، ٤ ، ٧ ، _____ .

متتالية حسابية وأَساسها = ٣ وحدها الأَول ١

٣ ١ ، -١ ، ١ ، -١ ، ... متتالية: _____ .

لأَن : _____ .

٤ المتتالية في الشكل المجاور متتالية: _____ .

لأَن: _____ .

الحد العام للمتتالية الحسابية:

أتعلم: الحد العام للمتتالية الحسابية ح$_{ن}$ = أ + (ن – ١) × د

حيث أ الحد الأَول ، د : أَساس المتتالية الحسابية، ن : رتبة الحد

مثال ٣ : لاحظ مراقب أَن الأَخطاء المطبعية لدى موظفة جديدة تقلّ كلما زادت خبرتها بمعدل ١٠ أَخطاء شهرياً حيث كان عدد أَخطائها المطبعية ٥٠٠ خطأ في الشهر الأَول.

المتتالية التي تمثّل عدد الأَخطاء الشهرية : ٥٠٠ ، ٤٩٠ ، ٤٨٠ ، ...

عدد الأَخطاء في الشهر العاشر: ٤١٠

عدد الأَخطاء في الشهر الأَربعين: ١١٠ .

يصبح عدد الأَخطاء الشهرية ٣٢٠ بعد: ١٩ شهراً.

مثال ٤: متتالية حسابية مجموع الحدين: الثاني والثالث منها ٤٣، وحدها الثامن ٥. أَجدُ الحد الأَول والأَساس.

الحل : ح$_{٢}$ = أ + (٢ – ١) د = أ + د

ح$_{٣}$ = أ + (٣ – ١) د = أ + ٢د

$ح_{٢} + ح_{٣} = (أ + د) + (أ + ٢د)$

$= ٢أ + ٣د = ٤٣$ ... (١)

$ح_{٨} = أ + ٧د = ٥$ ... (٢)

أَضربُ المعادلة (٢) بالعدد -٢ ينتج:

$-٢أ + -١٤د = -١٠$ ... (٣)

$٢أ + ٣د = ٤٣$ ... (١)

بجمع المعادلتين (٣) ، (١) ينتج:

$-١١د = ٣٣$ ، ومنها : $د = -٣$ ، $أ = ٢٦$ ، أُوضِّحُ ذلك.

تعريف: **تسمّى الأَعداد $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، ... ، $س_{ن}$ أَوساطاً حسابية بين العددين أ ، ب :**
إِذا كانت أ ، $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، ... ، $س_{ن}$ ، ب متتالية حسابية.

نشاط ٢: إِذا كانت ١٥ ، س ، ص ، ٣٦ متتالية حسابية. أَجِدْ قيمة كل من س ، ص

بما أَن المتتالية حسابية فإِن:

$ح_{ن} = أ + (ن - ١) \times د$

$٣٦ = ١٥ + (٤ - ١) \times د$

$د = ٧$. لماذا؟

ينتج أَن $س = ٢٢$

$ص =$ _____ .

فتصبح المتتالية: ١٥ ، ٢٢ ، ٢٩ ، ٣٦ . أُوضِّح ذلك؟

نشاط ٣: في المتتالية الحسابية الآتية أَجدُ قيمة س، ثم أَكتبُ المتتالية.

-٥ ، س ، .... ، $-٣س + ٣٦$ ، ٣٥

$س + ٥ = -١ + ٣س$. لماذا ؟

قيمة س = _____ .

المتتالية: -٥ ، ٣ ، ١١ ، ١٩ ، ٢٧ ، ٣٥. أُفَسّر ذلك؟

تمارين ومسائل ٢-٢:

١ أكتب الحدود الخمسة الأُولى من المتتاليات الحسابية التي:

أ حدها الأَول ١٢ وأَساسها ٤ ب حدها الأَول ٨ وأَساسها -٣

٢ أَجِد قيمة س التي تجعل س + ٨ ، ٤س + ٦ ، ٣س متتالية حسابية.

٣ أُدخلتْ ٦ أوساط حسابية بين العددين ٣٠ ، ٢ . أَجِدْ هذه الأَوساط.

مهمة تعليمية (١)

في سباق جري ٢٠٠٠ متر، سجل مدرب أَوقات فريقه على النحو الآتي:

٤٠٠ متر في دقيقة و٣٢ ثانية، ٨٠٠ متر في ٣ دقائق و٤ ثواني، ١٢٠٠ متر في ٤ دقائق و٣٦ ثانية، وهكذا...،

علماً بأن السرعة ثابتة. كم يحتاج الفريق من الوقت لإنهاء السباق؟

٢ - ٣ المتتالية الهندسية Geometric Sequence

تعريف: **المتتالية الهندسية: هي المتتالية التي تكون فيها النسبة بين أَي حد والحد الذي يسبقه مباشرة قيمة ثابتة وتسمى القيمة الثابتة أَساس المتتالية ويرمز لها بالرمز (ر) كما يرمز للحد الأَول بالرمز (أ) وتكتب على الصورة: أ، أ ر، أ ر^{٢}، أ ر^{٣}، ...**

مثال ١ : في المتتالية: ٧، ١٤، ٢٨، ٥٦، ١١٢، ...

نسبة الحد الثاني إِلى الحد الأَول: $\frac{١٤}{٧} = ٢$

نسبة الحد الثالث إلى الحد الثاني: $\frac{٢٨}{١٤} = ٢$

أُقارن النسبة بين كل حدين متتالين؟

تُسمّى مثل هذه المتتاليات بالمتتاليات الهندسية.

نشاط ١: أُميّز المتتالية الهندسية فيما يأتي، ثم أَجِدْ أَساسها وحدها الأَول.

١) ١، ٠,١، ٠,٠١، ٠,٠٠١، ... متتالية هندسية لأَنّ:

النسبة بين أَي حد والحد الذي يسبقه مباشرة = $\frac{٠,١}{١} = \frac{٠,٠١}{٠,١} = \frac{٠,٠٠١}{٠,٠١} = ٠,١$

حدها الأَول = ١، وأساسها = ٠,١

٢) المتتالية: ٢٠، -٥، $\frac{٥}{٤}$، $\frac{-٥}{١٦}$، ... متتالية هندسية. لماذا؟

حدها الأول = _____ ، وأساسها = _____ .

٣) المتتالية: $ح_{ن} = ن^{٢} + ١$ ، ن = ١، ٢، ٣، ...

المتتالية: ٢، ٥، ١٠، ١٧، ... ليست هندسية. لماذا؟

مثال ٢ : أكتبُ الحدود الخمسة الأُولى للمتتالية الهندسية التي حدها الأَول ٢٧ وأَساسها $\frac{-٢}{٣}$

الحل : $ح_١ = ٢٧$ ، $ح_٢ = ٢٧ \times \frac{-٢}{٣} = -١٨$ ، $ح_٣ = -١٨ \times \frac{-٢}{٣} = ١٢$

تصبح المتتالية: ٢٧ ، $٢٧ \times \frac{-٢}{٣}$ ، $-١٨ \times \frac{-٢}{٣}$ ، $١٢ \times \frac{-٢}{٣}$ ، $-٨ \times \frac{-٢}{٣}$

٢٧ ، -١٨ ، ١٢ ، -٨ ، $\frac{١٦}{٣}$

الحد العام للمتتالية الهندسية:

نشاط ٢: تريد مريم أَن تقيم حفلة، فدعت ٤ صديقات وطلبت من كل صديقة أَن تدعو ٣ صديقات أُخريات وهكذا، فإذا استمرت عملية الدعوة على ٥ مراحل.

عدد المدعوات إِلى الحفلة في المرحلة الثانية $٤ \times ٣ = ١٢$

عدد المدعوات إِلى الحفلة في المرحلة الثالثة $٤ \times (٣)^{٢} = ٣٦$

المتتالية التي تمثّل عدد الدعوات في المراحل الخمس: ____ ، ____ ، ____ ، ____ ، ____ .

أتعلم: الحد العام للمتتالية الهندسية $ح_ن = أ \times ر^{ن-١}$

حيث أ الحد الأَول، ر : أَساس المتتالية الحسابية، ن : رتبة الحد

نشاط ٣: في المتتالية الهندسية الآتية: ____ ، ١٥ ، ٤٥ ، ١٣٥ ، ...

$ر = \frac{٤٥}{١٥} = \frac{١٣٥}{٤٥} = ٣$

$ح_١ =$ ____ .

$ح_٦ = ٥ \times ٣^{٦-١} = ١٢١٥$

$ح_٨ =$ ____ .

$ح_{١٠} =$ ____ .

مثال ٣ : أكتب الحد النوني (الحد العام) في المتتاليات الهندسية الآتية:

١ ٢ ، −٦ ، ١٨ ، ... ٢ ٤٠ ، ٢٠ ، ١٠ ، ...

الحل :

١ في المتتالية ٢ ، −٦ ، ١٨ ، ...

أ = ٢ ، ر = −٣

$ح_ن = ٢ \times (-٣)^{ن-١}$

٢ في المتتالية ٤٠ ، ٢٠ ، ١٠ ، ...

أ = ٤٠ ، $ر = \frac{١}{٢}$

$ح_ن = ٤٠ \times (\frac{١}{٢})^{ن-١}$

نشاط ٤ : سقطت كرة مطاطية عن ارتفاع مترين، وكانت بعد كل صدمة ترتد إلى ارتفاع يساوي ثلاث أرباع الارتفاع الذي سقطت منه.

المتتالية الهندسية التي تمثّل ارتفاع الكرة بعد كل اصطدام: $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٨}$ ، $\frac{٢٧}{٣٢}$ ، ... أُوضِّح ذلك.

ارتفاع الكرة الذي ترتد إليه بعد الصدمة الخامسة = _____ متراً.

بعد أي صدمة يكون الارتفاع الذي ترتد إليه الكرة مساوياً $\frac{٨١}{١٢٨}$ متراً ؟

$ح_ن = أ \times ر^{ن-١}$

$\frac{٨١}{١٢٨} = (\frac{٣}{٢}) \times (\frac{٣}{٤})^{ن-١}$

$\frac{٢٧}{٦٤} = (\frac{٣}{٤})^{ن-١}$ لماذا ؟ إذن ن = _____ .

أتعلم: إذا كان أ ، ب عددين ثابتين معلومين فإن: $س_١$ ، $س_٢$ ، .... ، $س_ن$ تسمى أوساطاً هندسية عددها ن تقع بين أ ، ب إذا كان: أ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، .... ، $س_ن$ ، ب متتالية هندسية.

مثال ٤ : أدخل ٣ أَوساط هندسية بين العددين ٦٤ ، ٤

لإدخال أَوساط هندسية بين العددين ٦٤ ، ٤ نُكوّن المتتالية الهندسية :

٦٤ ، س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ، ٤

ح$_{ن}$ = أ × ر$^{ن-١}$

٤ = ٦٤ × ر^{٤} ، قيمة ر = $\pm \frac{١}{٢}$ لماذا ؟

نستطيع تكوين متتاليتين هندسيتين الأُولى: ٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ٨ ، ٤ . (ر = $\frac{١}{٢}$).

المتتالية الثانية: ٦٤ ، -٣٢ ، ١٦ ، -٨ ، ٤ ، (ر = $\frac{-١}{٢}$).

تمارين ومسائل ٢-٣:

١ أَجدْ:

أ الحد السادس من المتتالية الهندسية التي فيها أ = ٢ وأَساسها ($\frac{-١}{٢}$) .

ب الحد الأَول من المتتالية الهندسية التي ح$_{٥}$ = ٦٤ وأَساسها = ٢

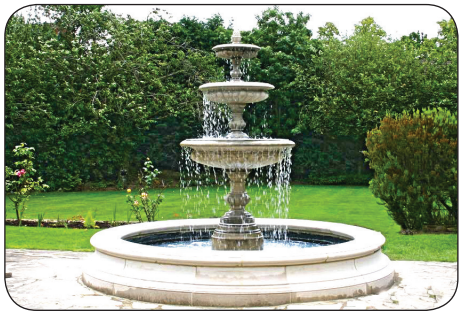
جـ أَساس المتتالية الهندسية التي ح$_{٤}$ = ٢٥٠ وحدها الأَول = ٢

٢ أدخل ٣ أَوساط هندسية بين العددين -١٥ ، -٢٤٠

٣ إِذا كان الحد الثالث من متتالية هندسية هو ١٢ والحد السادس منها هو ٩٦ أَجدْ الحدود الأَربعة الأُولى من المتتالية.

٤ إِذا كانت: س – ١ ، س ، س + ٣ ، ... متتالية هندسية، أَجِدْ حدودها الخمسة الأُولى.

مهمة تعليمية (٢)



أَرادت إِحدى البلديات تصميم نافورة مياه مكونة من أربعة صحون دائرية كما في الشكل المجاور، حيث يكون قطر الصحن الأَول ١٢٠سم، وقطر الصحن الرابع ١٥سم والنسبة بين قطرى كل صحنين متتاليين ثابتة.

أجد طول قطر الصحن الثاني وطول قطر الصحن الثالث.

تمارين عامة:

١ اختر رمز الاجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما الحد العام للمتتالية ١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ... ؟

أ) ن + ٧ ب) ٨ ن ج) ن^{٣} د) ن^{٢}

٢ إذا كان الحد العام للمتتالية ح$_{ن}$ = ٢ن + ١، فما قيمة الحد الخامس؟

أ) −٨ ب) ١١ ج) ٦ د) ٣٦

٣ المتتالية الحسابية : ١، −١ ، −٣ ، −٥ ، ... ، − ٣٧ ما قيمة حدها الأَول وأَساسها على الترتيب؟

أ) −١ ، −٢ ب) ١ ، ٢ ج) ١ ، −٢ د) ٢ ، ١

٤ إذا كونت الأَعداد : ٥ ، ٢ك ، ... ، ٥ك ، ٣٠ متتالية حسابية، فما قيمة ك؟

أ) ٠,٥ ب) ٥ ج) −٥ د) ١٠

٥ ما عدد حدود المتتالية الحسابية : ٦٣ ، ٦٠ ، ... ، ٣٣ ، ٣٠ ؟

أ) ١٠ ب) ١١ ج) ١٢ د) ١٣

٦ ما نوع المتتالية ٣ ، −٣ ، ٣ ، −٣ ، ... ؟

أ) حسابية ب) هندسية

ج) حسابية وهندسية د) لا حسابية ولا هندسية

٧ متتالية هندسية حدها الأَول ١، وأَساسها ٣ ما قيمة حدها السابع؟

أ) ٢١ ب) ٨١ ج) ٢٤٣ د) ٧٢٩

٨ ما ترتيب الحد الذي قيمته ٤٨٦ من حدود المتتالية الهندسية: ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...

أ) ٤ ب) ٥ ج) ٦ د) ٧

٢ أُمَيّز بين المتتالية الحسابية والهندسية فيما يأتي مع ذكر السبب.

أ) ٦ ، ٦ ، ٦ ، ...

ب) س ، ٣ س^{٢} ، ٩ س^{٣} ، ...

جـ) ٣س − ١ ، ٥س + ٢ ، ٧س + ٥

د) $\frac{-١}{٩}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $^{-}$١ ، ...

٣ أَجِدْ الحدود الأَربعة الأُولى في المتتالية الآتية: ح$_{ن}$ = $\frac{ن}{ن^{٢} + ٣}$

٤ كم وسطاً هندسياً يُمكن إِدخاله بين العددين ٧ ، ٢٢٤ حتى تتكون متتالية هندسية أَساسها ٢؟ أكتب هذه المتتالية؟

٥ ثلاثة أَعداد تكوِّن متتالية حسابية مجموعها $^{-}$١٢ وحاصل ضربها ٨٠، أَجِدْ الأَعداد الثلاثة.

٦ متتالية حسابية حدها الأَول = ٣ ، فإِذا كان حدها الثاني والرابع والثامن تكوِّن متتالية هندسية، أَجِدْ هذه المتتالية الحسابية.

أقيّم ذاتي أكمل الجدول الآتي:

المهارة	مرتفع	متوسط	متدني
أميز بين المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية			
أجد أي حد لمتتالية حسابية / هندسية			
أجد مجموع حدود لمتتالية حسابية / هندسية			

نموذج اختبار

السؤال الأول: أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

١- أي المتتاليات الآتية تعدّ متتالية غير منتهية ؟

أ) $-٢، -٤، -٨، ...، -٣٢$

ب) $ح_ن = ٢ن - ١$ ، $ن \in \{١،٢،٣،٤\}$

جـ) $ح_ن = ٤ن + ٦$ ، $ن \in ط^*$

د) كيس فيه ٤٢ كرة، قام احمد بسحبها حسب المتتالية التالية ٢، ٤، ٦، ..

٢- ما الحد الخامس في المتتالية الآتية: $\frac{-١}{٤}$ ، ١ ، -٤ ، ..... ، .....؟

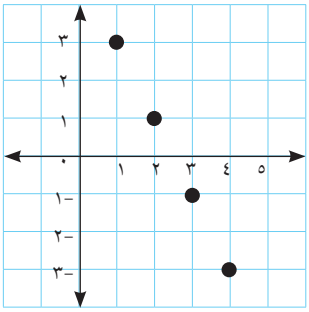
أ) -٦٤ ب) -١٦ جـ) -٨ د) ٦٤

٣- بدأ احمد العمل في مؤسسة براتب قدره ٥٠٠ دينار شرط أن يحصل على زيادة شهرية قدرها ٥٠ ديناراً لمدة سنة، ثم بعد ذلك زيادة سنوية قدرها ١٠٠ دينار، فما الحد العام للمتتالية التي تُمثل راتبه في السنة الأولى؟

أ) $ح_ن = ٥٠ ن$ ب) $ح_ن = ٥٥٠ + ٥٠ ن$

جـ) $ح_ن = ٥٠٠ + ٥٠ ن$ د) $ح_ن = ٤٥٠ + ٥٠ ن$

٤- ما نوع المتتالية في الشكل المجاور؟



أ) هندسية لأن الفرق بين كل حد وسابقه لا يساوي مقداراً ثابتاً.

ب) حسابية لأن حدها الأول١ واساسها ١

جـ) حسابية لأن حدها الأول٣ وأساسها ٣

د) حسابية لأن حدها الأول٣ واساسها ١

٥- ما الحد الخامس من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٤ وأساسها $\frac{-١}{٢}$ ؟

أ) ١ ب) $\frac{١}{٤}$ جـ) $\frac{-١}{٤}$ د) $\frac{-١}{٢}$

السؤال الثاني:

أ) أكتبُ الحدود الخمسة الأولى من المتتالية التي حدها العام $ح_{ن} = \frac{ن + ١}{ن^{٢} - ١}$.

ب) أجد قيمة ك التي تجعل ٢ك−١، ك+٢، ٤ك متتالية حسابية.

السؤال الثالث:

أُدخلُ ٣ أوساط هندسية بين العددين ٣ ، ٢٤٣: .

السؤال الرابع:

أ) متتالية حسابية مجموع الحدين الثالث والرابع فيها = ٣٣ ، وقيمة حدها السابع =٣٤ أجد الحد الأول والأساس .

ب) في النمو المبكر للأجنة تنقسم الخلية البشرية إلى خليتين، وكل واحدة منهما تنقسم إلى خليتين وهكذا، أكتبُ القاعدة التي تعبّر عن عدد الخلايا بعد انقساماتٍ عددها ن.

١ - ٣ نهاية الاقتران Limit of a Function

تعريف: نهاية الاقتران ق(س) عند نقطة:

يكون للاقتران ق(س) نهاية تساوي ل عندما تقترب قيم س من العدد أ ، إذا وفقط إذا كان للاقتران ق(س) نهاية من اليمين تساوي ل ونهاية من اليسار تساوي ل عند س = أ ، وتُكتب بالرّموز: $\lim_{س \to أ} ق(س) = ل \leftrightarrow \lim_{س \to أ^-} ق(س) = \lim_{س \to أ^+} ق(س) = ل$

مثال ١ : ليكن ق(س) = س + ٣ ، س ∈ ح ماذا يحدث للاقتران ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد ٣ (من اليمين ومن اليسار)؟

ق(١ , ٣) = ١ , ٣ + ٣ = ١ , ٦ .

ق(٢ , ٩٩) = ٢ , ٩٩ + ٣ = ٩٩ , ٥ .

نكوِّن الجدول الآتي:

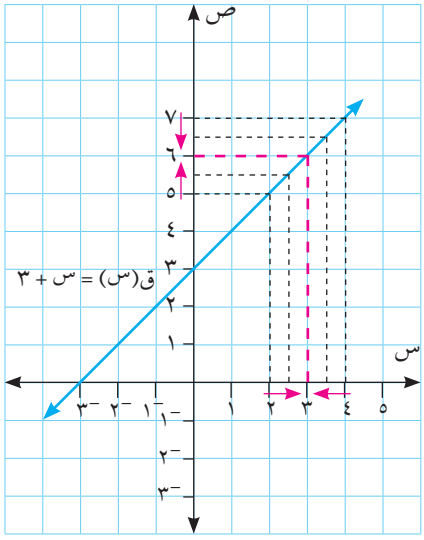
س	...	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	← ...	٣	→ ...	٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩	...
ق(س)	...	٦,١	٦,٠١	٦,٠٠١	←	٦	→	٥,٩٩٩	٥,٩٩	٥,٩	...

اقتراب قيم س من اليمين من العدد ٣ يقابله اقتراب قيم ق(س) المقابلة لها من العدد ٦ .

اقتراب قيم س من اليسار من العدد ٣ يقابله اقتراب قيم ق(س) المقابلة لها من العدد ٦ .

مثال ٢ : يمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران ق(س) = س + ٣

من الشكل أَجِدْ النهايات الآتية.



١ $\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = ٦$.

٢ $\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = ٦$.

٣ $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٦$.

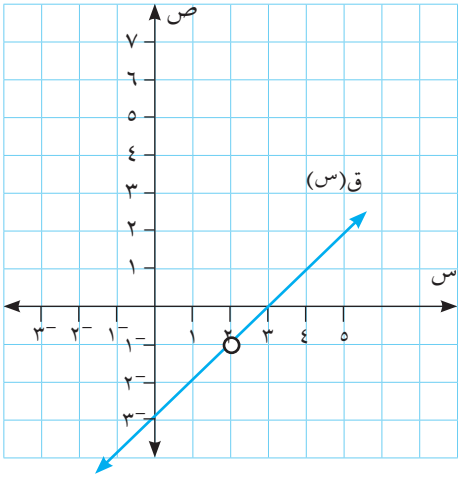
٤ ق(٣) = ٦ .

نشاط ١: إذا كان ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢ ، أَجِدْ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)، باستخدام الجدول.

ق(س) = $\frac{(س - ٢)(س - ٣)}{(س - ٢)}$ ، س ≠ ٢

ق(س) = س − ٣

س	...	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	← ...	٢	→ ...	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩	...
ق(س)	...	٠,٩−	٠,٩٩−	٠,٩٩٩−	←	....	→	١,٠٠١−	١,٠١−	١,١−	...

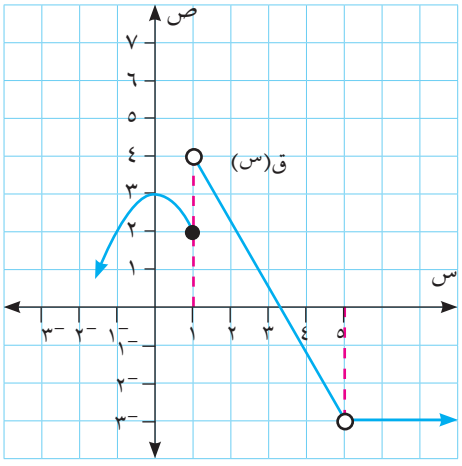


- $\lim_{س \to ٢^{+}}$ ق(س) = ١− . لماذا؟
- $\lim_{س \to ٢^{-}}$ ق(س) = _____ .
- $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ١− . لماذا؟

أُلاحظ من الشكل المجاور أَن ق(٢) غير معرفة.

من الشكل أُوضِّحُ كيفية إِيجاد $\lim_{س \to ٢}$ ق(س).

نشاط ٢: أَتأَمّلُ الشكل المجاور المرسوم ثم أَجِدُ ما يأتي:



- ق(٠) = ٣
- $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = _____ .
- ق(١) = _____ .
- $\lim_{س \to ١}$ ق(س) غير موجودة، لماذا ؟
- ق(٥) = _____ .
- $\lim_{س \to ٥}$ ق(س) = _____ .

تمارين ومسائل ٣-١:

١ باستخدام طريقة الجدول أَجِدْ:

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} \frac{س^{٢} - ٤س + ٣}{س - ٣} \quad ، س \neq ٣$$

٢ إِذا كان الشكل المجاور يُمثّل منحنى الاقتران ق(س).

من الرسم أجدْ ما يأتي:

أ ق(−٣)

ب $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣}$ ق(س)

ج ق(١)

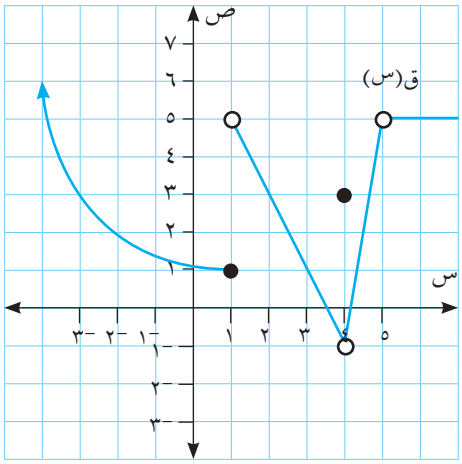
د $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١}$ ق(س)

هـ ق(٤)

و $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤}$ ق(س)

ز ق(٥)

ح $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٥}$ ق(س)



أتعلم: قانون (١): إذا كان أ ، جـ ∈ ح ، وكان ق(س) = جـ ، لكل س ∈ ح

فإن: $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = جـ

قانون (٢): إذا كان أ ∈ ح ، وكان ق(س) = س^{ن}

فإن: $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ) = أ^{ن}

وبشكل عام إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود فإن: $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ)

مثال ١ : ليكن *ق(س) = س، س ∈ ح ، هـ(س) = $\sqrt[٧]{٢}$

١) ق(٠) = ٠

٢) هـ(−٢) = $\sqrt[٧]{٢}$

٣) ق(٥) = ٥

٤) هـ(٥) = $\sqrt[٧]{٢}$

٥) $\lim_{س \to -٢}$ ق(س) = $^{-}$٢

٦) $\lim_{س \to -٢}$ هـ(س) = $\sqrt[٧]{٢}$

أتعلم: إذا كانت $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ل ، $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = ك، وكان جـ عدداً حقيقياً فإن:

قانون (٣): $\lim_{س \to أ}$ جـ ق(س) = جـ × ل

قانون (٤): $\lim_{س \to أ}$ (ق(س) ± هـ(س)) = $\lim_{س \to أ}$ ق(س) ± $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = ل ± ك

مثال ٢ : إذا كان ق(س) = $^{-}$٥ ، $\lim_{س \to -٣}$ هـ(س) = ١٢ . أجدُ قيمة كل من النهايات الآتية:

١) $\lim_{س \to ١}$ ق(س)

٢) $\lim_{س \to -٣}$ ٥ ق(س)

٣) $\lim_{س \to -٣}$ (ق(س) + هـ(س))

٤) $\lim_{س \to -٣}$ (هـ(س) − ق(س))

* يُسمي الاقتران الذي قاعدته = ق(س) = س، س ∈ ح. بالاقتران المحايد.

الحل : ١ $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = -٥. لماذا؟

٢ $\lim_{س \to -٣}$ ٥ ق(س) = ٥ $\lim_{س \to -٣}$ ق(س) = ٥ × -٥ = -٢٥

٣ $\lim_{س \to -٣}$ (ق(س) + هـ(س)) = $\lim_{س \to -٣}$ ق(س) + $\lim_{س \to -٣}$ هـ(س)

= -٥ + ١٢ = ٧

٤ $\lim_{س \to -٣}$ (هـ(س) − ق(س)) = $\lim_{س \to -٣}$ هـ(س) − $\lim_{س \to -٣}$ ق(س)

= ١٢ − (-٥) = ١٧

مثال ٣ : أَجِدُ قيمة كل مما يأتي:

١ $\lim_{س \to \frac{١}{٢}}$ (٨س − ١١)

٢ $\lim_{س \to -١}$ ٤(٥ + ٧س)

الحل : ١ $\lim_{س \to \frac{١}{٢}}$ (٨س − ١١) = ٨ $\lim_{س \to \frac{١}{٢}}$ س − $\lim_{س \to \frac{١}{٢}}$ ١١

= ٨ × $\frac{١}{٢}$ − ١١ = -٧

٢ $\lim_{س \to -١}$ ٤(٥ + ٧س) = ٤ × $\lim_{س \to -١}$ (٥ + ٧س)

= ٤ × ($\lim_{س \to -١}$ ٥ + ٧ $\lim_{س \to -١}$ س)

= ٤ × (٥ + ٧ × -١) = -٨

مثال ٤ : إِذا كانت $\lim_{س \to أ}$ ٩(٣س − ٤) = ١٨، أَجِدُ قيمة أ.

الحل : $\lim_{س \to أ}$ ٩(٣س − ٤) = ٩ $\lim_{س \to أ}$ (٣س − ٤) = ١٨

= (٣أ − ٤) = $\frac{١٨}{٩}$ = ٢

٣أ = ٢ + ٤

أ = $\frac{٦}{٣}$ = ٢

أتعلم: إذا كانت $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ل ، $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = ك، فإن:

قانون (٥): $\lim_{س \to أ}$ [ق(س) × هـ(س)] = $\lim_{س \to أ}$ ق(س) × $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = ل × ك

قانون (٦): $\lim_{س \to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to أ} ق(س)}{\lim_{س \to أ} هـ(س)} = \frac{ل}{ك}$ ، هـ(س) ≠ ٠ ، ك ≠ ٠

مثال ٥ : أَجِدُ $\lim_{س \to -١}$ (٢س^{٣} − ٥س + ٧)

الحل :

$\lim_{س \to -١}$ (٢س^{٣} − ٥س + ٧) = ٢ $\lim_{س \to -١}$ س^{٣} − ٥ $\lim_{س \to -١}$ س + $\lim_{س \to -١}$ ٧

= ٢ $\lim_{س \to -١}$ (س × س × س) − ٥ $\lim_{س \to -١}$ س + $\lim_{س \to -١}$ ٧

= ٢ ($\lim_{س \to -١}$ س × $\lim_{س \to -١}$ س × $\lim_{س \to -١}$ س) − ٥ $\lim_{س \to -١}$ س + $\lim_{س \to -١}$ ٧

= ٢ × (−١ × −١ × −١) − ٥ × −١ + ٧

= ١٠

نشاط ١ : إذا كان ق(س) = ٧س^{٢} + ٢، هـ(س) = ١٠ − ٢س ، فإن :

١ $\lim_{س \to -٢}$ ق(س) = ٧ × (−٢)^{٢} + ٢ = ٣٠

٢ $\lim_{س \to -٢}$ (س^{٢} ق(س) + ٥) = $\lim_{س \to -٢}$ س^{٢} × $\lim_{س \to -٢}$ ق(س) + $\lim_{س \to -٢}$ ٥

= ٤ × ٣٠ + ٥ = _____

٣ $\lim_{س \to -٢}$ هـ(س) = ١٠ − ٢ × −٢ = ١٤

٤ $\lim_{س \to -٢}$ (٤ ق(س) − ١٠ هـ(س)) = _____

٥ $\lim_{س \to -٢}$ [ق(س) × $\lim_{س \to -٢}$ هـ(س)] = ٣٠ × ١٤ = ٤٢٠

٦ $\lim_{س \to -٢} \frac{س\ ق(س)}{٢هـ(س)}$ = _____

٧ $\lim_{س \to -٢}$ هـ^{٢}(س) = _____

مثال ٦ : إذا كانت *م(س) = $\frac{س^{٢} + ١٠}{س + ٦}$ ، أجد $\lim_{س \to -٣}$ م(س) ، س ≠ −٦

الحل : $\lim_{س \to -٣}$ م(س) = $\frac{س^{٢} + ١٠}{س + ٦}$

بالتعويض المباشر: $\lim_{س \to -٣}$ $\frac{س^{٢} + ١٠}{س + ٦}$ = $\frac{(-٣)^{٢} + ١٠}{-٣ + ٦}$ = $\frac{٩ + ١٠}{٣}$

= ٦ $\frac{١}{٣}$

مثال ٧ : أجد قيمة $\lim_{س \to ٤}$ $\frac{٢س - ٨}{س + ٥}$ ، س ≠ −٥.

الحل : $\lim_{س \to ٤}$ $\frac{٢س - ٨}{س + ٥}$ = $\frac{٢(٤) - ٨}{٤ + ٥}$ = $\frac{٠}{٩}$ = ٠

أتعلم: إذا كان ناتج التعويض المباشر في الاقتران النسبي مساوياً لـ $\frac{٠}{٠}$ فإن هذه الصورة تُسمى صورة غير معينة، أي لا تعطي نتيجة محددة، وللتخلص من هذه الصورة نُعيد كتابة الاقتران بصورة مكافئة بطرق عديدة إحداها استخدام التحليل إلى العوامل.

مثال ٨ : أجد قيمة $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{٤ - س^{٢}}{٢ - س}$ ، س ≠ ٢.

الحل : عند التعويض المباشر نحصل على : $\frac{٤ - ٤}{٢ - ٢}$ = $\frac{٠}{٠}$ وهي صورة غير معينة، وللتخلص من هذه الصورة نعيد كتابة الاقتران بصورة مكافئة باستخدام التحليل إلى العوامل.

$\lim_{س \to ٢}$ $\frac{٤ - س^{٢}}{٢ - س}$ = $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{(٢ - س)(٢ + س)}{(٢ - س)}$

= ٢ + ٢ = ٤

* الاقتران النسبي هو اقتران يمكن كتابته على الصورة م(س) = $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ، ق(س) ، هـ(س) كثيرا حدود، هـ(س) ≠ ٠

نشاط ٢: أَجِدُ قيمة $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٣ + ٢٧}{(س + ٣)}$

عند التعويض المباشر نحصل على _____ .

$$\lim_{س \to -٣} \frac{س^٣ + ٢٧}{(س + ٣)} = \lim_{س \to -٣} \frac{(س + ٣)(س^٢ - ٣س + ٩)}{(س + ٣)}$$

$$\lim_{س \to -٣} (س^٢ - ٣س + ٩) = _____ .$$

تمارين ومسائل ٣-٢:

١ إذا كان $\lim_{س \to ٢} ق(س) = -٢$ ، $\lim_{س \to ٢} ٣هـ(س) = ٩$. أَجِدْ قيمة النهايات الآتية:

أ) $\lim_{س \to ٢} ٢(ق(س) + هـ(س))$

ب) $\lim_{س \to ٢} (ق^٢(س) - هـ(س))$

جـ) $\lim_{س \to ٢} \frac{٥ ق(س)}{هـ^٢(س)}$

د) $\lim_{س \to ٢} (٤ق(س) + س^٢ - ٣)$

٢ أَجِدْ قيمة النهايات الآتية:

أ) $\lim_{س \to ٨} (٢س - ١١)$

ب) $\lim_{س \to ٠} (-٢س^٣ - ٨س + ٧)$

جـ) $\lim_{س \to ٦} \left(\frac{س}{س^٢ - ٣٦} - \frac{٦}{س^٢ - ٣٦} \right)$ ، $س \neq \pm ٦$

د) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ - س - ١٢}{س^٢ - ٩}$ ، $س \neq \pm ٣$

هـ) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ١}{س - ١}$ ، $س \neq ١$

و) $\lim_{س \to ٢\sqrt{٧}} \frac{س^٢ - ٢}{س - ٢\sqrt{٧}}$ ، $س \neq ٢\sqrt{٧}$

٣ إذا كان $\lim_{س \to -٢} (أ س^٢ - ٣٦) = ٠$ ، فما قيمة أ ؟

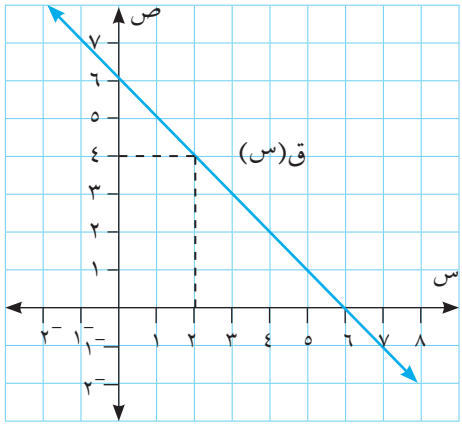
مهمة تعليمية (١)

إذا كانت: $\lim_{س \to ٢} ن(س) = ل$ ، $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ك$ ،

وكان $\lim_{س \to ٢} (هـ(س) - ن(س)) = ١$ ، $\lim_{س \to ٢} (ن^٢(س) + هـ(س)) = ١٣$ ،

أجد: $\lim_{س \to ٢} (٥هـ(س) + س)$.

نشاط ١ : أَتأَمّلُ الأشكال المرسومة للاقترانات ق(س)، هـ(س)، ل (س)، ك (س).



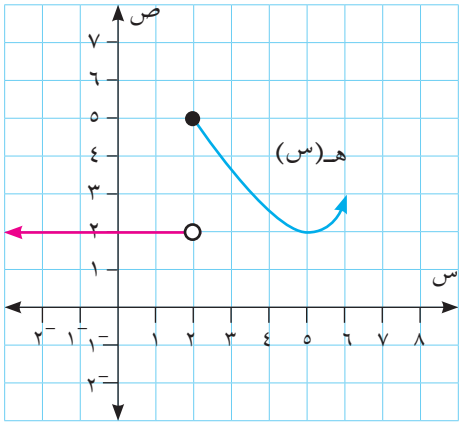
١ في الشكل المجاور:

ق(٢) = ٤

نهـــا ق(س) = ٤
س ← ٢

مثال ١ :

ق(٢) = نهـــا ق(س) = ٤
س ← ٢

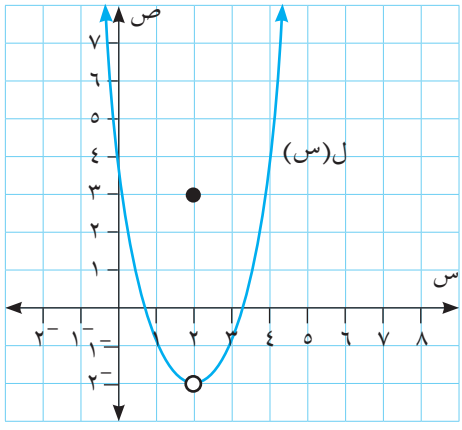


٢ في الشكل المجاور:

هـ(٢) = _____ .

نهـــا هـ(س) = _____ .
س ← ٢

أُقارنُ بين نهـــا هـ(س) وقيمة هـ(٢) .
س ← ٢



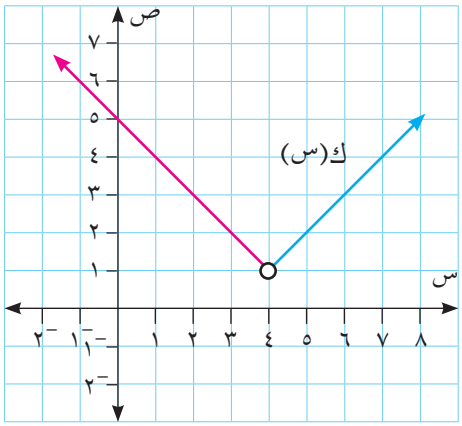
٣ في الشكل المجاور:

ل(٢) = _____ .

نهـــا ل(س) = _____ .
س ← ٢

أُقارنُ بين نهـــا ل(س) وقيمة ل(٢) .
س ← ٢

مثال ٢ :



٤ في الشكل المجاور:

ك(٤) = _____ .

$\lim_{س \to ٤}$ ك(س) = _____ .

أُقارنُ بين $\lim_{س \to ٤}$ ك(س) وقيمة ك(٤) .

تعريف: **يكون الاقتران ق(س) متصلاً عندما س = أ ، إذا تحققت الشروط الآتية:**

١ **ق(س) معرفة عند س = أ.**

٢ **$\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة.**

٣ **$\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ).**

مثال ١ : أَبحثُ في اتصال الاقترانات الآتية عند قيم س المشار إليها في كل حالة من الحالات الآتية:

١ ق(س) = ١١ ، عند س = ٩

٢ هـ(س) = $س^{٣}$ + ٢س + ١ ، عند س = -١

الحل :

١ ق(٩) = ١١

$\lim_{س \to ٩}$ ق(س) = ١١

ق(٩) = $\lim_{س \to ٩}$ ق(س) = ١١

إِذن ق(س) متصل عند س = ٩

٢ هـ(-١) = $(-١)^{٣}$ + ٢(-١) + ١ = -٢

$\lim_{س \to -١}$ هـ(س) = $(-١)^{٣}$ + ٢(-١) + ١ = -٢

هـ(-١) = $\lim_{س \to -١}$ هـ(س) = -٢

إِذن هـ(س) متصل عند س = -١

أتعلم: الاقترنات كثيرة الحدود متصلة في مجالها.

أتعلم: إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين عند س = أ فإن:

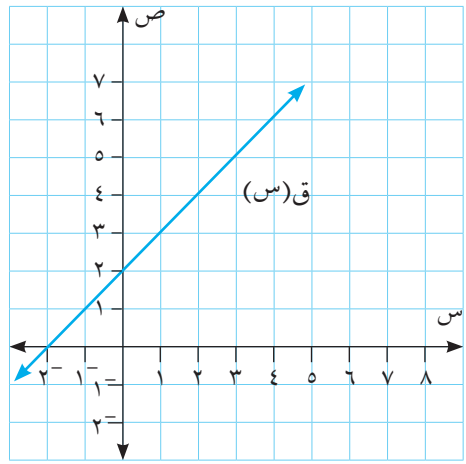
١ (ق ± هـ)(س) يكون متصلاً عند س = أ.

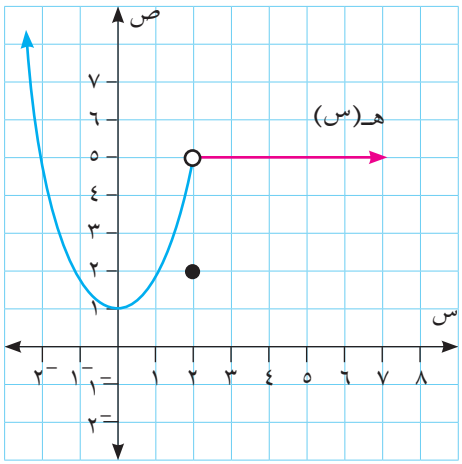
٢ (ق × هـ)(س) يكون متصلاً عند س = أ.

٣ $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$ (س) يكون متصلاً عند س = أ، حيث هـ (أ) ≠ ٠

تمارين ومسائل ٣-٣:

١ أَتأَمّل الاقترانين ق(س)، هـ(س) المرسومين في الشكلين الآتيين ثم أُجب عن الآتي:





أ أَبحثُ في اتصال الاقتران ق(س) عند س = صفر .

ب أَبحثُ في اتصال الاقتران هـ(س) عند س = ٢ .

٢ أَبحثُ في اتصال الاقترانات الآتية عند قيم س المشار إِليها في كل حالة:

أ ق(س) = ٣ س – ٦ عند س = ١

ب ق(س) = (س – ٣) (س + ٣) عند س = ٣

مهمة تعليمية (٣)

إذا كان: ن(س) + هـ(س) = ٣ ن(س)، وكان : $\lim_{س \to ٧}$ ٢ ن(س) = ٦، وكان:

ن(س) و هـ(س) اقترانين متصلين عند س = ٧ ، أجد هـ(٧) .

تمارين عامة:

١ اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما قيمة $\lim_{س \to -٢}$ (٥س^{٣} + ٣س^{٢} – ٦) ؟

أ) ٣٤ ب) –٣٤ جـ) ٤٣ د) –٤٣

٢ إذا كان $\lim_{س \to ٥}$ ق(س) = ٣ ، $\lim_{س \to ٥}$ ٤ هـ(س) = ٨. ما قيمة $\lim_{س \to ٥}$ ٢ق(س) + $\lim_{س \to ٥}$ هـ^{٢}(س)؟

أ) ٧٠ ب) ١١ جـ) ٦ د) ١٠

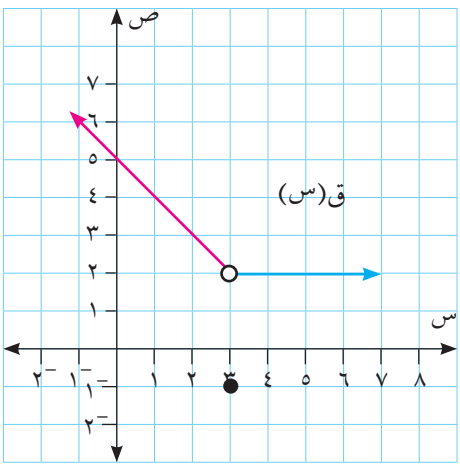
٣ إذا كان ق(س) = أ س^{٢} + س – ٢ وكان $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ١٠ ما قيمة الثابت أ ؟

أ) ٩ ب) –٩ جـ) –١١ د) ١١

٤ ما قيمة $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{س - ٢}{س^{٢} - ٢س - ٣}$ ؟

أ) –١ ب) ١ جـ) صفر د) ٢

٥ في الشكل المجاور ما قيمة $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) ؟



أ) ٢

ب) غير موجودة

جـ) صفر

د) ٣

٦ إذا كان $\lim_{س \to أ}$ (٣ س − ٥) = ١ ما قيمة الثابت أ ؟

أ) ٣ ب) −٣ جـ) ٢ د) −٢

٧ إذا كان ق(س) = $\frac{٢س^{٢} - ٥}{٦س^{٤} + س + ٣}$. ما قيمة $\lim_{س \to ٠}$ ق(س)؟

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) $\frac{-٥}{٣}$ جـ) صفر د) $\frac{-٣}{١٠}$

٨ إذا كان $\lim_{س \to ١}$ ق(س) + ١ = ١١ ، ما قيمة $\lim_{س \to ١}$ (٣س ق(س) − ٣٣) ؟

أ) −٣ ب) ٠ جـ) −٣٠ د) ١٠

٢ إذا كان $\lim_{س \to -١}$ ق(س) = $\lim_{س \to -١}$ هـ(س) ، هـ(س) = س^{٢} + ٣س، أَجِدْ ما يأتي:

أ $٢ \lim_{س \to -١}$ ق(س) + $\lim_{س \to -١}$ هـ(س)

ب $\lim_{س \to -١}$ $\frac{ق(س)}{هـ^{٢}(س) + ٦س}$

٣ أَجِدْ النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to -٤}$ ٤س^{٢} + ٣س − ٥

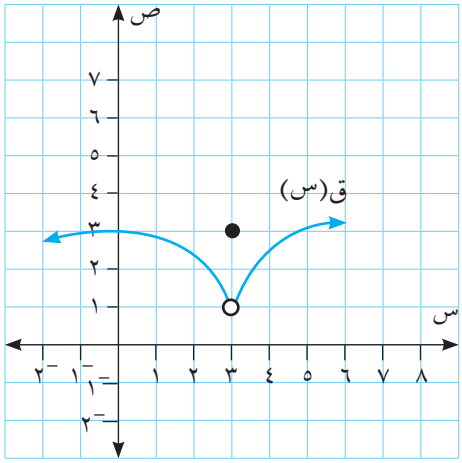
ب $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{٣س^{٢} - ٢س - ٣}{س^{٢} + ٧س + ١٢}$

جـ $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٤}$

د $\lim_{س \to ٢٥}$ $\frac{\sqrt{س} - ٥}{س - ٢٥}$

٤ إذا كان $\lim_{س \to ٢} \frac{٥أ س^{٢} - ٨}{س^{٢} + س + ٢} = ١٠$ ، فما قيمة/ قيم الثابت أ .

٥ أَتأَمّل الشكل المجاور ثم أَجِدْ ما يأتي:



أ $\lim_{س \to ٣^{+}}$ ق(س)

ب $\lim_{س \to ٣^{-}}$ ق(س)

جـ $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

د ق(٣)

هـ $\lim_{س \to ٠}$ ق(س)

و ق(٠)

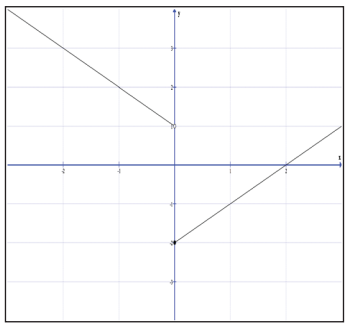
أقيّم ذاتي

أعبر بلغتي عن المفاهيم الاكثر متعة والمفاهيم التي واجهت بها صعوبات في هذه الوحدة بما لا يزيد عن أربعة أسطر.

نموذج اختبار

السؤال الأول: أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

١ – اعتماداً على الشكل المجاور، ما قيمة: $\lim_{س \to ٠} ق(س)$؟



أ) –٢ ب) –١

جـ) ١ د) غير موجودة.

٢– ما قيمة $\lim_{س \to -١} (س^{٢} - ٢س + ٣)$

أ) ٦ ب) ٥ جـ) ٠ د) –٢

٣– إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{أ س^{٢} - ٤أ}{س - ٢} = ٦$ ، فما قيمة الثابت أ؟

أ) $-\frac{١}{٥}$ ب) $\frac{١}{٥}$ جـ) ٠ د) $\frac{٢}{٣}$

٤– إذا كانت $\lim_{س \to ٢} (٣ق(س) + ٥س) = ٢٢$ ، فما قيمة: $\lim_{س \to ٢} ق^{٢}(س)$ ؟

أ) ٤ ب) ٢ جـ) ١٦ د) $\frac{١}{١٦}$

السؤال الثاني:

أحسبُ النهايات الآتية :

أ- $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س^{٣} - ١٦}{س+٢}$ ، س $\neq -٢$

ب- $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{س}{س^{٢} - ٣س} - \frac{٣}{س^{٢} - ٣س} \right)$ ، س $\neq ٠ ، ٣$

السؤال الثالث:

إذا كان $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = -٣، $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) = ٢ . أَجدُ قيمة كل من النهايات الآتية:

أ- $\lim_{س \to ١} (س^{٢}$ ق(س) - ٥ هـ(س))

ب- $\lim_{س \to ١} \left(\frac{٧ + ق^{٢}(س) - هـ(س)}{س^{٢} - ٣س} \right)$ ، س $\neq ٠ ، ٣$