١٠

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دولــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الرزمة التعليمة

٢٠٢٤

مركز المناهج

moehe.gov.ps | mohe.pna.ps | mohe.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
+970-2-2983280 هاتف | +970-2-2983250 فاكس

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

المحتويات

الوحدة الأولى

الدرس الأول: تمثيل الاقترانات باستخدام الانسحاب	٥
الدرس الثاني: تمثيل الاقترانات باستخدام الانعكاس	٧
الدرس الثالث: اشارة الاقتران	٩
الدرس الرابع: الاقترانات متعددة القاعدة	١٤
الدرس الخامس: اقتران القيمة المُطْلَقة	١٧
الدرس السادس: اقتران أكبر عدد صحيح	٢٠
ورقة عمل	٢٣
اختبار ذاتي:	٢٦

الوحدة الثانية

الدرس الأول: الأسس واللوغاريتمات	٢٨
الدرس الثاني: الاقتران الأسّي	٣٢
الدرس الثالث: الاقتران اللوغاريتمي	٣٧
الدرس الرابع: الارتباط الخطي	٤٠
الدرس الخامس: معامل ارتباط بيرسون	٤٢
الدرس السادس: معامل ارتباط سبيرمان........	٤٥
الدرس الثامن: مبدأ العدّ	٤٨
الدرس التاسع: التباديل	٥٠
الدرس العاشر: التوافيق	٥٢
الدرس الحادي عشر: نظرية ذات الحدين	٥٣
اختبار ذاتي	٥٤

الوحدة الثانية

الدرس الأول: الزّاوية في الوضع القياسي	٥٦
الدرس الثاني: قياس الزوايا	٦٠
الدرس الثالث: الاقترانات المثلثية	٦٣
الدرس الرابع: تمثيل الاقترانات المثلثية بيانيّاً	٧٠
الدرس الخامس: المتطابقات والمعادلات المثلثيّة	٧٥
ورقة عمل	٧٨
اختبار ذاتي	٨٠

الوحدة الرابعة

الدرس الأول: إنشاءات هندسيّة (١)	٨٢
الدرس الثاني: إنشاءات هندسيّة (٢)	٨٦
الدرس الثالث: المثلّث	٩٠
الدرس الرابع: تكافؤ الأشكال الهندسيّة	٩٤
الدرس الخامس: الأسهم	٩٩
الدرس السادس: التأمين	١٠١
ورقة عمل	١٠٢
اختبار ذاتي	١٠٤

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الرزمة التعليمية المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الاقترانات بأنواعها المختلفة في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- استخدام التحويلات الهندسيّة في رسم منحنى اقترانٍ ما، في المستوى الديكارتي.
- تحديد إشارةِ بعض الاقترانات.
- تمثيل اقترانٍ متعددِ القاعدة بيانيّاً.
- التعرّف إلى مفهوم اللوغاريتم وعلاقته بالأُسس.
- استنتاج قوانين اللوغاريتمات.
- حلّ معادلات الوغاريتمية.
- تمثيل الاقترانات الأسّيَة بيانيّاً.
- استنتاج خصائص الاقتران الأسّي.
- تمثيل الاقتران اللوغاريتمي بيانياً.
- استنتاج خصائص الاقتران اللوغاريتمي.
- توظيف التحويلات الهندسيّة المختلفة في رسم الاقترانات اللوغاريتمية والأسّيّة.
- استنتاج العلاقة بين الاقترانين الأسّي واللوغاريتمي.
- رسم شكل الانتشار الذي يمثّل العلاقة بين متغيّريْن.
- إيجاد معامل ارتباط بيرسون.
- كتابة معادلة الانحدار.
- استخدام مبدأ العد في سياقات حياتيّة.
- حساب التباديل والتوافيق الرائية لمجموعة تحتوي ن من العناصر.
- استخدام نظرية ذات الحدّين في إيجاد مفكوك مقدار جبري.
- التعرُّف إلى مفهوم الزوايا الموجّهة.
- التعرُّف إلى مفهوم قياسي الزاوية: الستيني والدائري.
- التحويل من القياس الستيني إلى القياس الدائري وبالعكس.
- التعرُّف إلى الوضع القياسي للزاوية، والزوايا المتكافئة.
- تمثيل منحنيات الاقترانات الدورية (المثلثية) بيانياً.
- إثبات متطابقاتٍ مثلثيّة.
- حلّ معادلاتٍ مثلثيّة.
- تنصيف قطعةٍ مستقيمةٍ، وتنصيف زاوية.
- رسم مستقيم موازٍ لمستقيم آخر.
- تمثيل العمليات الحسابية بالإنشاءات الهندسية.
- إقامة عمودٍ على مستقيمٍ من نقطةٍ واقعةٍ عليه.
- إنزال عمودٍ على مستقيم من نقطةٍ خارجةٍ عنه.
- التعرُّف إلى نظريّات تكافؤ الأشكال الهندسيّة.
- التعرف إلى مفهوم الأسهم.
- التعرف إلى مفهوم التأمين وأنواعه المختلفة.

١ تمثيل الاقترانات باستخدام الإنسحاب (Translation)

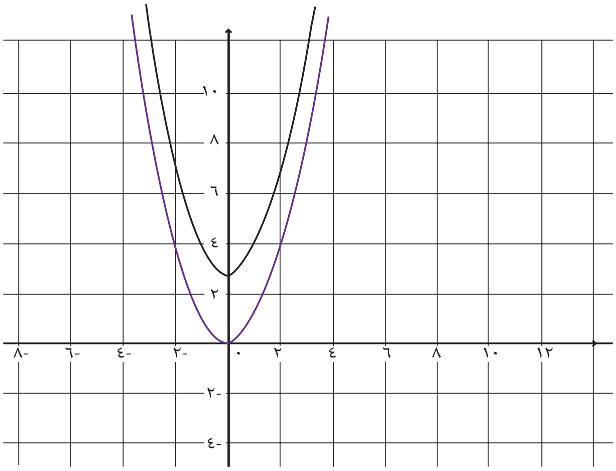
نشاط ١

في الشكل المجاور ، أنظرُ إلى منحنى الاقتران

ق(س) = $س^{٢}$، س ∈ ح،

ومنحنى الاقتران

ل(س) = $س^{٢}$ + ٣



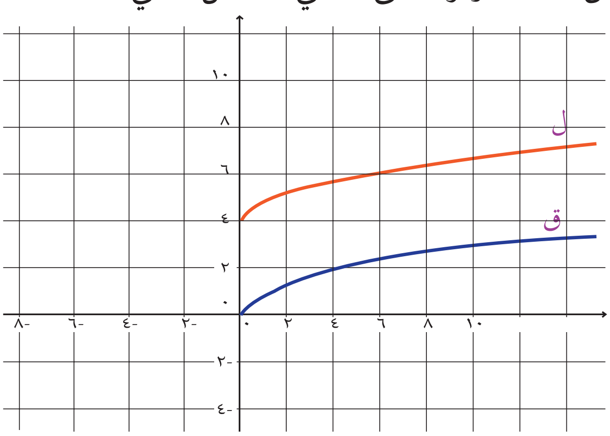
ألاحظ أنّ: منحنى ل(س) هو انسحاب لمنحنى ق(س) بمقدار .... للأعلى.

- أمثّلُ بيانيّاً منحنى الاقتران: هـ(س) = $س^{٢}$ – ٤.

أتعلّمُ: منحنى الاقتران ل(س) = ق(س) + جـ هو انسحاب لمنحنى الاقتران ق(س) بمقدار جـ وحدة إلى الأعلى إذا كانت جـ > صفر ، وانسحاب بمقدار | جـ | وحدة إلى الأسفل إذا كانت جـ < صفر.

نشاط ٢

أنظرُ إلى منحنى الاقتران: ق(س) = $\sqrt{س}$، س ≥ صفر ومنحنى ل في الشكل الآتي:



منحنى الاقتران ل هو انسحاب لمنحنى الاقتران ق بمقدار

- قاعدة الاقتران ل هي: ....

أمثّلُ بيانيّاً منحنيات الاقترانات الآتية:

- ك(س) = $\sqrt{س}$ – ٢
- هـ(س) = $\sqrt{س}$ + ١

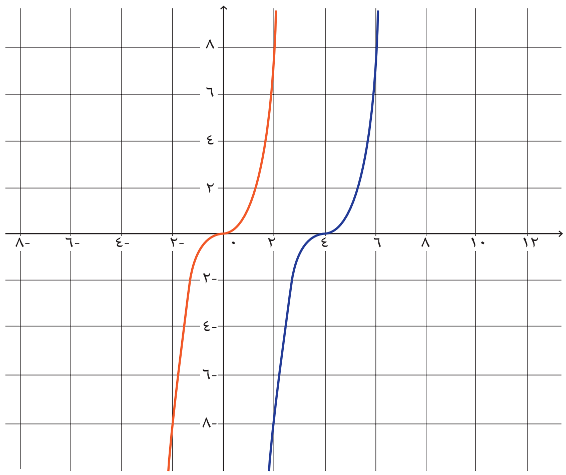
نشاط ٣

اعتماداً على منحنى

ق(س) = س^{٣} ، س ∈ ح

ومنحنى الاقتران:

ل(س)= (س − ٤)^{٣}



منحنى الاقتران ل هو انسحاب لِـ ..... بمقدار ...... وحدات.

أمثّلُ منحنيات الاقترانات: هـ(س)=(س + ٥)^{٣} ، ك(س)=(س + ٣)^{٣} − ٢، في المستوى الديكارتي.

أتعلّمُ: منحنى الاقتران ق(س + جـ) هو انسحاب إلى اليسار لمنحنى الاقتران ق(س) بمقدار جـ وحدة، إذا كانت جـ $>$ صفر ، وانسحاب الى اليمين بمقدار | جـ | وحدة، اذا كانت جـ $<$ صفر.

تمارين ومسائل:

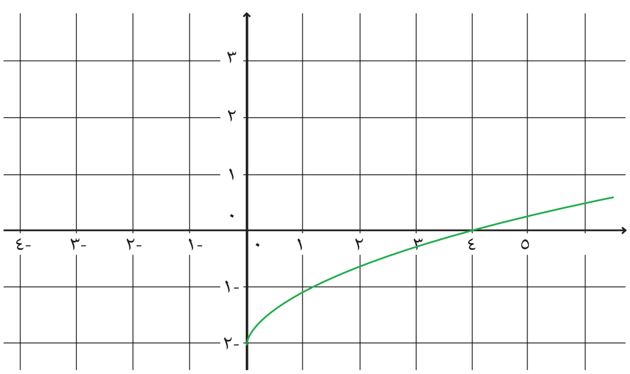
(١) بالاعتماد على منحنى ص = ق(س) ، س ≤ ٠ ، الممثّلِ في المستوى الديكارتي،

أمثل منحنى كل من الاقترانات الآتية في المستوى نفسه

أ) هـ(س) = ق(س) − ٥

ب) ل(س) = ق(س + ٤)

جـ) د(س) = ق(س − ١) + ٣



٢ تمثيل الاقترانات باستخدام الإنعكاس (Reflection)

أتذكّرُ **انعكاس النقطة ﺃ (س،ص) في محور السينات هي النقطة ﺃَ (س،-ص).**

أُكملُ الجدول الآتي:

نشاط ١

س	٢	١	٠	١-	٢-
ق(س) = س^{٣} + ١			١		٧-
- ق(س) = - (س^{٣} + ١)	٩-				

- أُعيّنُ النّقاطَ من الجدول في المستوى الديكارتي، وأمثّلُ منحنى الاقتران ق(س).
- أُعيّنُ النّقاطَ من الجدول في المستوى نفسه، وأمثّلُ منحنى الاقتران -ق(س).

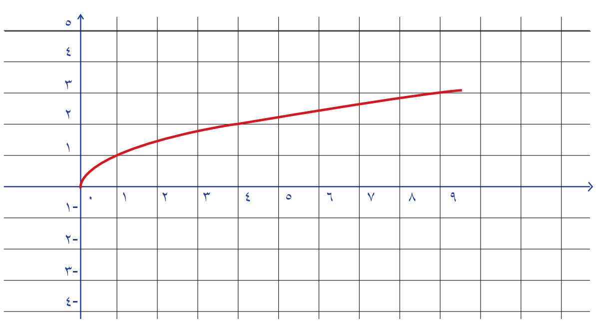
أُلاحظُ أنّ:..............................

أتعلّمُ: منحنى الاقتران -ق(س) هو انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) في محور السينات.

نشاط ٢

يُمثّلُ الشكلُ الآتي منحنى الاقتران:

ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ ، س ≥ صفر .



أُمثّلُ منحنى الاقتران ل(س) = – $\sqrt{\text{س}}$ على المستوى.

أتذكّرُ **انعكاس النقطة ﺃ (س،ص) في محور الصادات هي النقطة ﺃَ (-س،ص).**

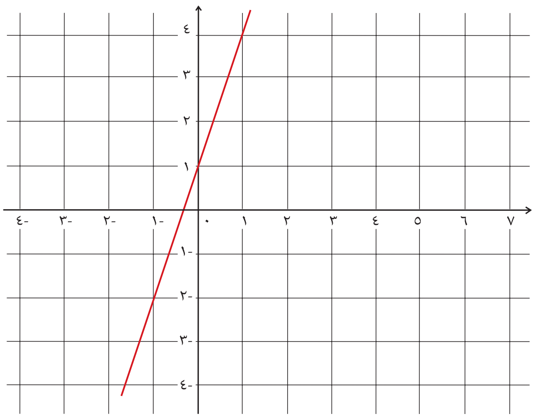
نشاط ٣

يُمثّلُ الشكلُ المجاورُ منحنى الاقتران

ق(س) = ٣س + ١

أُكملُ: بالاعتماد على القاعدة، يكون

ق(-س) = ٣(-س) + ١ = ...



س	٣	٠	-١
ق(-س)		١	

بالاعتماد على الجدول، أمثّلُ منحنى الاقتران ق(-س) في المستوى الديكارتي.

أتعلّمُ: منحنى الاقتران ق(-س) هو انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) في محور الصادات.

تمارين ومسائل:

(١) أكتبُ الزوجَ المرتّبَ الذي يمثّلُ التحويلات الهندسيّةِ على النقطة (٣، -٤)، في الحالات الآتية:

أ) انعكاس في محور الصادات. ب) انعكاس في محور السينات.

(٢) أصِفُ بالكلمات التحويلاتِ الهندسيّة الآتية على منحنى ق(س):

أ) ق(-س) ب) -ق(س) + ١ جـ) ق(س − ٢) + ٣

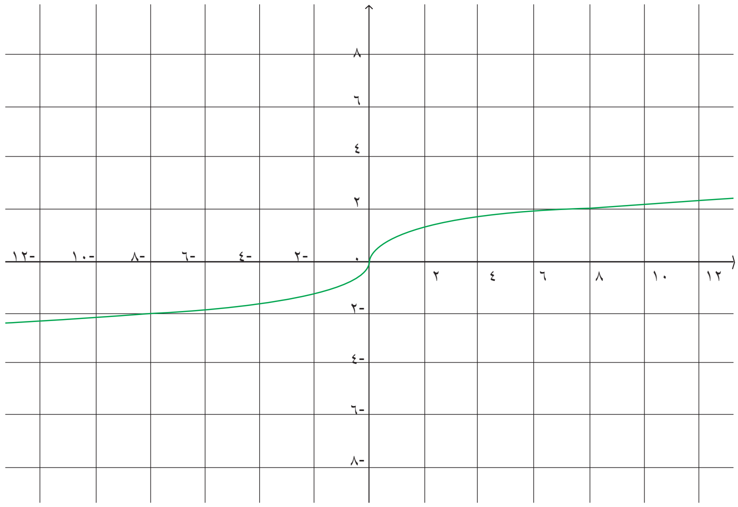
مهم تقويمية:

اعتماداً على منحنى ق(س) المرسوم، أرسمُ منحنيات الاقترانات الآتية:

أ) ق(-س) − ١

ب) -ق(س) + ١

جـ) -ق(-س)



٣ إشارة الاقتران (Sign of a Function)

نشاط ١

أولاً: إشارة الاقتران الثابت

أُعطي أمثلةً على اقترانات ثابتة.

• ق(س)= ١٢، وإشارته موجبة.

• ق(س)= -π، وإشارته سالبة.   • ل(س)= -٢٣، وإشارته ....

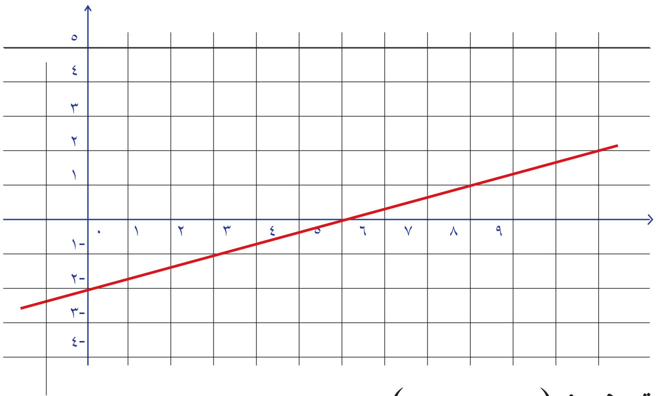
• ك(س)= ....، وإشارته موجبة.   • هـ(س)= ....، وإشارته ....

أتعلّمُ: إشارة الاقتران الثابت ق(س) = جـ ، جـ ∈ ح، هي إشارة جـ نفسها.

ثانياً: إشارة الاقتران الخطّي

نشاط ٢

يبين الشكل المجاور منحنى اقتران خطي ، قاعدته ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س − ٢



• نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات هي: (.....،.....).

• صفر الاقتران هو: ....

• الفترة التي وقع فيها المنحنى فوق محور السينات هي: ....، وتكونُ إشارتُه ....

• الفترة التي وقع فيها المنحنى تحت محور السينات هي: .... ، وتكونُ إشارتُه ....

• أعيّنُ إشارة الاقتران على خط الأعداد:

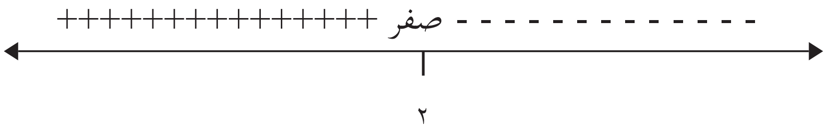
أتعلم: إشارة الاقتران الخطي ق(س) = أس + ب ، س ∈ ح، أ ≠ صفر هي نفس إشارة معامل س ، لكلّ س أكبر من صفر الاقتران، وعكس إشارة معامل س، لكلّ س أصغر من صفر الاقتران.

يُمكنُ توضيحُ ذلك على خط الأعداد:

مثال(١): أعيّنُ إشارة الاقتران ق(س) = ٤ − ٢س

الحلّ: صفر الاقتران = ٢، إذن: يقطعُ منحنى الاقتران محورَ السينات في النقطة (٢،٠).

- إشارة الاقتران (+) موجبة "عكس إشارة معامل س"، لكلّ س < ٢.
- إشارة الاقتران (−) سالبة "إشارة معامل س نفسها"، لكلّ س > ٢.
- أعيّنُ الإشارة على خط الأعداد الآتي:



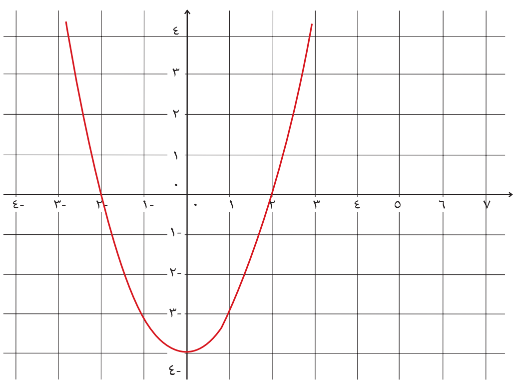
- يُمكنُ كتابةُ الحلّ بالصورة: ق(س) > صفر (موجبا)، في الفترة] -∞،٢[
  ق(س) < صفر (سالبا)، في الفترة]٢،∞[
  ق(س) = صفر ،عندما س= ٢.

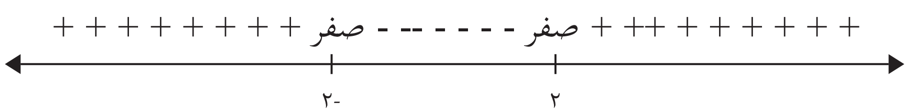
نشاط ٣

ثالثا: إشارة الاقترانِ التربيعيّ

أتأمل منحنى الاقتران المرسوم ق(س) = س^{٢} − ٤،

وإشارة الاقتران الموضّحة على خط الأعداد:





- يقطع المنحنى محور السينات في النقطتين: (......،......) ، (........،......)
- يقع منحنى الاقتران تحت محور السينات في الفترة ....
- يقع منحنى الاقتران فوق محور السينات في الفترة ....
- إشارة الاقتران موجبة في الفترة ....، بينما إشارته سالبة في الفترة ....
- أصفار الاقتران هي: ....

أتعلّمُ: إشارة الاقتران التربيعيّ تكون عكس إشارة معامل س^{٢} بين صفريّ الاقتران، وما عدا ذلك فهي إشارة معامل س^{٢}.

ويُمكنُ توضيحُ ذلك بالشكل؛ حيث ل،م هما صِفرا الاقتران ق ، ل > م :

نشاط ٤

أعيّنُ إشارةَ الاقتران ق الذي قاعدته ق(س) = ١ – س^{٢}

- أصفار الاقتران هي: ....
- إشارة معامل س^{٢} هي: ....
- إشارة الاقتران موجبة (عكس إشارة معامل س^{٢}) في الفترة ....
- إشارة الاقتران سالبة (نفس إشارة معامل س^{٢}) في الفترة ....
- أرسمُ خطّ الأعداد، وأعيّنُ عليه إشارة الاقتران:

- يقعُ منحنى الاقتران فوق محور السينات في الفترة ....
- يقعُ منحنى الاقتران تحت محور السينات في الفترة ....

أتعلّمُ:

- إشارة الاقتران التربيعيّ: هي إشارة معامل س^{٢} ، إلّا عند صفر الاقتران، إذا كان له صفر واحد فقط.
- **إشارة الاقتران التربيعيّ هي إشارة معامل س^{٢}، إذا لم يقطعْ منحناهُ محورَ السينات.**

رابعا: إشارة الاقتران النسبيّ

يُسمّى الاقترانُ ق اقتراناً نسبيّاً إذا كانت قاعدتُه على الصورة الآتية:

$$\text{ق(س)} = \frac{\text{ل(س)}}{\text{م(س)}}$$ حيث ل،م كثيرا حدود ، م(س) $\neq$ صفر.

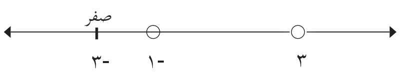
نشاط ٥

أعيّنُ إشارة الاقتران: $\text{ق(س)} = \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣}$ ، س $\neq$ ٣ ، -١

أعيّنُ إشارةَ البسطِ (س + ٣)، كاقترانٍ خطيّ على خطّ الأعداد:

أعيّنُ إشارةَ المقامِ $(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣)$، كاقترانٍ تربيعيّ على خطّ الأعداد

أُعيّنُ إشارةَ الاقترانِ النسبيّ ق على خطّ الأعداد:



نشاط ٦

أعيّنُ إشارةَ الاقترانِ ق الذي قاعدته: $\text{ق(س)} = \frac{٥}{١ + \text{س}}$ ، س $\neq$ -١

- إشارة البسط هي ....
- أُعيّنُ إشارةَ البسط على خطّ الأعداد:
- أُعيّنُ إشارةَ المقام (س+١) على خط الأعداد:
- أُعيّنُ إشارةَ الاقتران النسبي ق على خط الأعداد:

تمارين ومسائل:

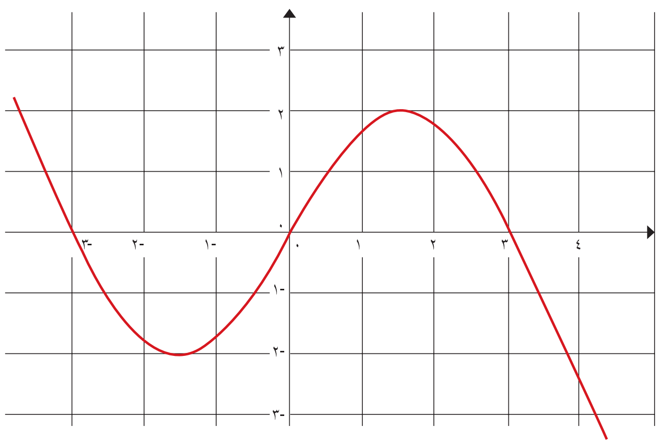
(١) أُعيّنُ إشارةَ كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) هـ (س) = ٤ – س

ب) ع (س) = -٤ – ٤س – س^{٢}

جـ) م (س) = $\frac{-١}{س}$ ، س ≠ صفر

(٢) أُعيّنُ إشارةَ الاقتران ق على الفترة [-٣ ، ٤]:



مهم تقويمية:

ابحث في اشارة كل من الاقترانات الآتية:

أ) هـ(س)= ٤س - ٤

ب)ق(س)= س٢-٥س+٦

ج) م(س)= $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ، هـ(س) ≠ صفر

الاقتراناتُ متعدّدةُ القاعدة (Piecewise Functions)

تعريف: الاقتران متعدد القاعدة : هو اقتران له أكثر من قاعدة معرفة على مجاله.

نشاط ١

من الأمثلة على الاقترانات متعددة القاعدة:

١) $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} + ١ &، \text{س} \geq ١ \\ ٢\text{س} &، \text{س} < ١ \end{cases}$

٢) $\text{ق(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} &، \text{س} \leq -٥ \\ ٤ &، -٥ < \text{س} < ٥ \\ \text{س} - ٣ &، \text{س} \geq ٥ \end{cases}$

٣) أعطِ مثالاً لاقتران متعدد القاعدة

تمثيلُ الاقترانات متعددة القاعدة بيانيّاً:

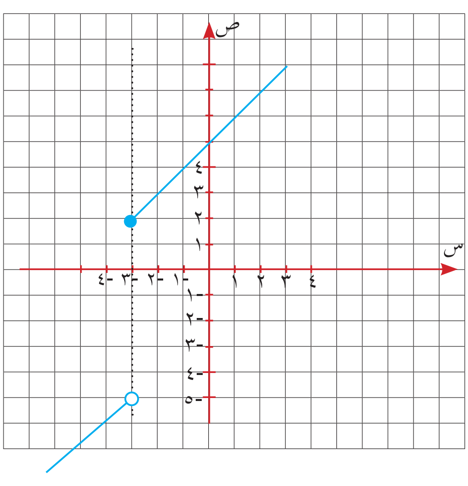
نشاط ٢

أمثّلُ بيانيّاً الاقترانَ الذي قاعدتُه: $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} - ٢ &، \text{س} < -٣ \\ \text{س} + ٥ &، \text{س} \geq -٣ \end{cases}$

أُكملُ الجدولَ الآتي:

س	-٨	-٦	-٤	-٣	-٢	-١	٠	٣	٥
ص		-٨		٢			٥		

- أعيّنُ النقاطَ في المستوى الديكارتي، وأرسمُ منحنى الاقتران.



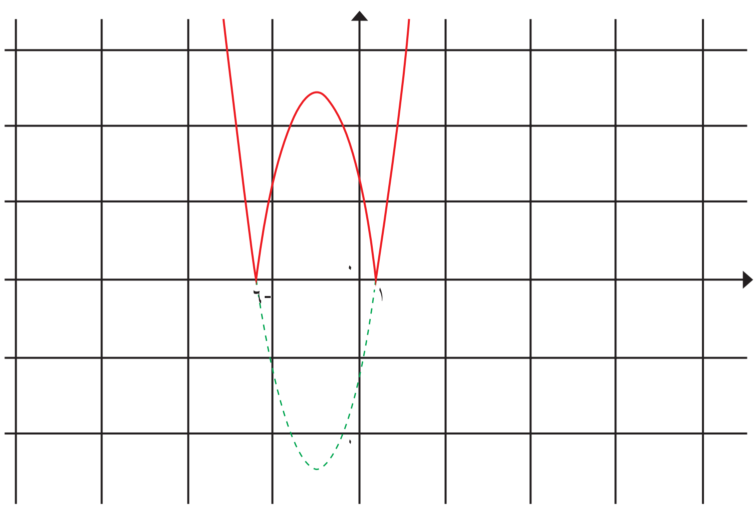
نشاط ٣ أمثّلُ بيانيّاً الاقترانَ الذي قاعدتُه: $ق(س) = \begin{cases} ٢س + ٥ &، \quad س \leq -٣ \text{ *} \\ ٢س &، \quad -٣ < س < ١ \\ س^{٢} &، \quad س \geq ١ \end{cases}$

أكملُ الجدولَ الآتي:

س	-٨	-٦	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص		-٧		-١		-٢		١				

أعيّنُ النقاط في المستوى الديكارتي، وأرسمُ منحنى الاقتران:

مثال: أُمثّلُ بيانياً الاقتران $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٥س - ٦ &، \quad س \leq -٦ \\ -(س^{٢} + ٥س - ٦) &، \quad -٦ < س < ١ \\ س^{٢} + ٥س - ٦ &، \quad س \geq ١ \end{cases}$



* عند التمثيل البياني لاقتران متعدد القاعدة يتم تعويض نقطة التحول في القاعدتين ونضع دائرة مفتوحة عند القاعدة التي لا تنتمي إليها النقطة.

تمارين ومسائل:

(١) أرسمُ منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية:

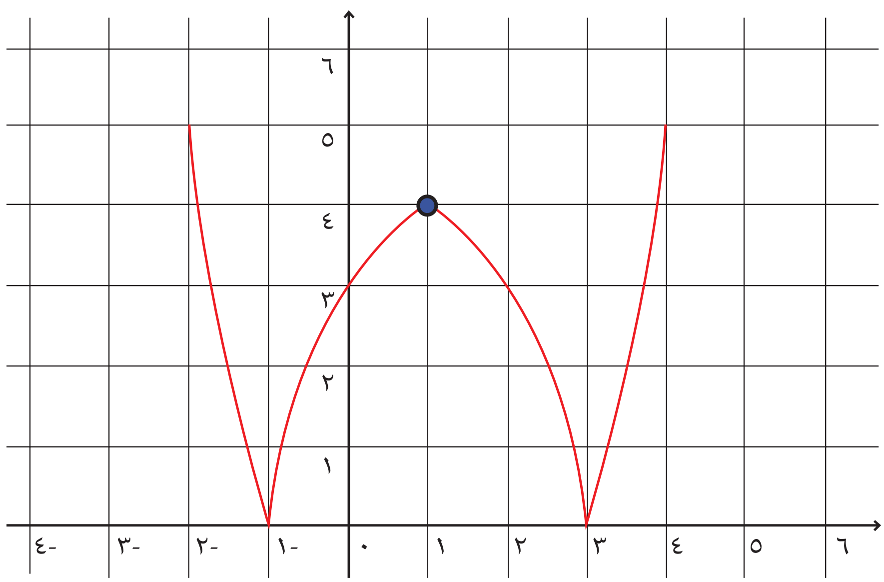
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٣ & \text{، س} < -٤ \\ \text{س} & \text{، } -٤ \leq \text{س} \leq ٢ \\ -\text{س} + ٦ & \text{، س} > ٢ \end{cases}$$

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} ٢\text{س} + ١ & \text{، س} < \text{صفر} \\ \text{س}^{٢} & \text{، س} \geq \text{صفر} \end{cases}$$

مهم تقويمية:

(٢) للاقتران الذي يظهرُ منحناه في المستوى الديكارتي أدناه:

- ما إحداثيّاتُ نقطةِ الرأس؟ وما معادلةُ محور تماثُل المنحنى؟



٥ اقتران القيمة المُطْلقة* (Absolute Value)

نشاط ١

أجد ناتج ما يأتي:

| -٣ | = ... ، | ٤ | = ... ، | -١/٢ | = ...

| ٤ − ٣ | = ... ، | -١ − -٤ | = ... ، | ٠ − ١٢ | = ...

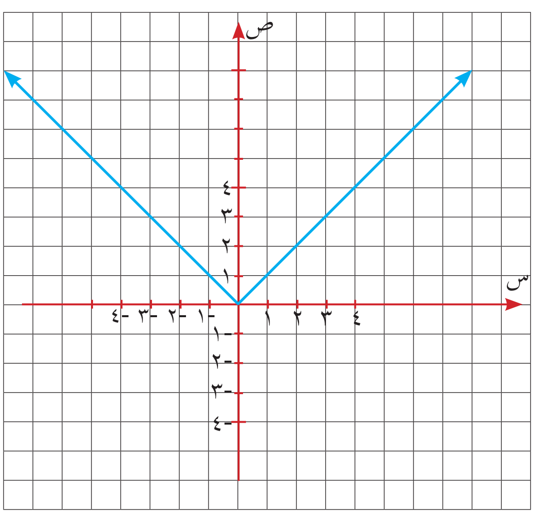
تعريف

يُسمّى الاقتران المكتوب على صورة ق(س) = | س | **اقترانَ القيمةِ المُطْلَقة**، ويمكن كتابة الاقتران ق(س)، دون استخدام رمز القيمة المُطلقة، كما يأتي:

ق(س) = | س | = { س ، س ≥ صفر
                          - س ، س < صفر

نشاط ٢

عند تمثيل الاقتران ق(س) = | س | في المستوى الديكارتي يظهر كما في الشكل:



أجب عمّا يلي:

أ) مجال الاقتران هو ح.

ب) مدى الاقتران هو ....

جـ) أرسم محور التماثل.

د) أحدّد صفر الاقتران ....

هـ) هل الاقتران واحد لواحد؟ لماذا؟

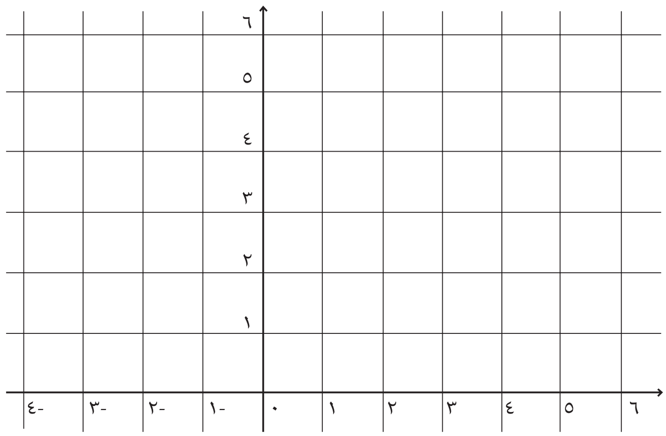
* يعتبر اقتران القيمة المطلقة من الاقترانات متعددة القاعدة.

نشاط ٣

أُعيدُ تعريف الاقتران ق(س) = | س – ٣ |، دون استخدام رمز القيمة المطلقة ثم أمثله بيانياً:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} - ٣ & ، \quad \text{س} - ٣ \geqslant \text{صفر} \\ -(\text{س} - ٣) & ، \quad \text{س} - ٣ < \text{صفر} \end{cases}$$

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} - ٣ & ، \quad \text{س} \geqslant ٣ \\ -\text{س} + ٣ & ، \quad \text{س} < ٣ \end{cases}$$



مجال ق(س): ....

مدى ق(س): ....

منحنى ق(س) = | س – ٣ |
انسحاب لمنحنى | س | ....
وحدة إلى ....

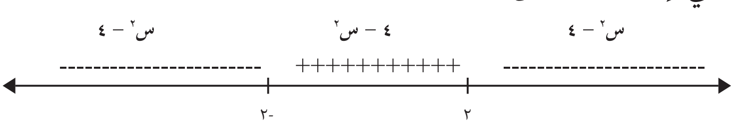
نشاط ٤

أعيد تعريف ق(س) = | ٤ – س^{٢} | ثم أمثله بيانياً.

$$|٤ - \text{س}^{٢}| = \begin{cases} ٤ - \text{س}^{٢} & ، \quad ٤ - \text{س}^{٢} \geq ٠ \\ \text{س}^{٢} - ٤ & ، \quad ٤ - \text{س}^{٢} < ٠ \end{cases}$$

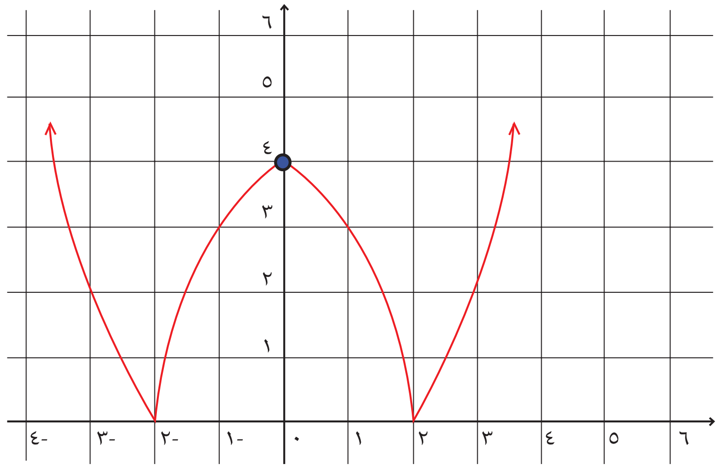
لحل المتباينات نبحث في إشارة ٤ – س^{٢}

٤ – س^{٢} = (٢ – س) (٢ + س)



$$|٤ - \text{س}^{٢}| = \begin{cases} .... & ، \quad \text{س} < ٢- \\ ٤ - \text{س}^{٢} & ، \quad ٢- \leq \text{س} \leq ٢ \\ \text{س}^{٢} - ٤ & ، \quad \text{س} > .... \end{cases}$$

التمثيل:



تمارين ومسائل:

(١) إذا كان: ق(س) = |س − ٣|، هـ (س) = |٢ − ٣س|، أجد:

ق(٢) ، ق(-٥) ، هـ (-١) ، هـ (٠) ، ق ($\frac{٢}{٣}$)

(٢) ١) أُعيدُ تعريف الاقترانات الآتية، دون استخدام رمز القيمة المطلقة وأمثلها بيانياً:

أ) ق(س) = |٣س + ٢| ب) ق(س) = |٤ − س|

جـ) ق(س) = -|٣س + ٣| د) ق(س) = |١ − $\frac{١}{٢}$ س|

٢) أجد مجال ومدى وأصفار الاقترانات السابقة.

(٤) أُعيد تعريف كل من الاقترانات الآتية ثم أمثلها في المستوى الديكارتي:

أ) ق(س) = | ٥س − س^{٢} | ب) ق(س) = | س^{٢} − ٥س + ٦ |

مهم تقويمية:

أُمثّل منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية باستخدام التحويلات الهندسية:

أ) ق(س) = |س + ٢| ب) ق(س) = -|س|

جـ) ق(س) = -|س − ٣| + ٢

٦ اقترانُ أكبرِ عددٍ صحيح (Greatest Integer Function)

تعريف

تعريف: أكبرُ عددٍ صحيحٍ للعدد الحقيقيّ س: هو أكبرُ عددٍ صحيحٍ أقلّ من أو يساوي العددَ س، ويُرمَزُ له بالرّمز [ ].

نشاط ١

أكملُ الجدولَ الآتي :

[٢٢,٥]	[٥٩,٩]	[٣٢]	[٧,٣-]	[٢٧-]	[١,٦-]	[٦٨]	[١٨,٥-]	[٠,٧-]
٢٢			٨-			٦٨		

أتعلّمُ: لكلِّ س ∈ ح ، [س] = ن ، حيث ن ≤ س < ن + ١ ، ن ∈ ص.

إذا كان ق(س) = [أ س + ب] ، فإنّ [أ س + ب] = ن ، حيث ن ≤ أ س + ب < ن + ١.

مثال (١): أحلُّ المعادلة: [٢س + ١] = ٧

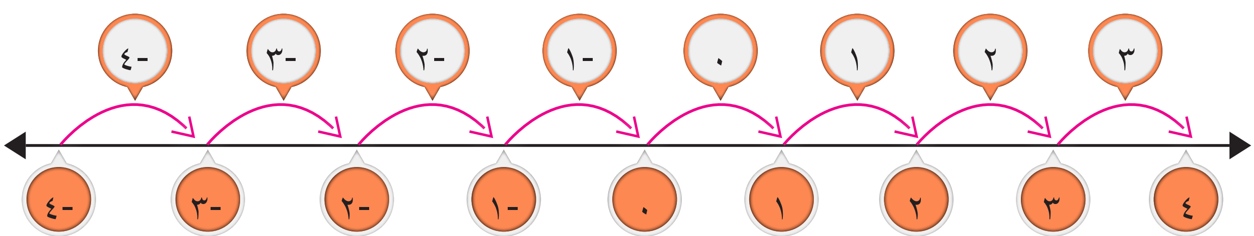
الحلّ: ٧ ≤ ٢س + ١ < ٨

٦ ≤ ٢س < ٧ ومنها ٣ ≤ س < ٣,٥

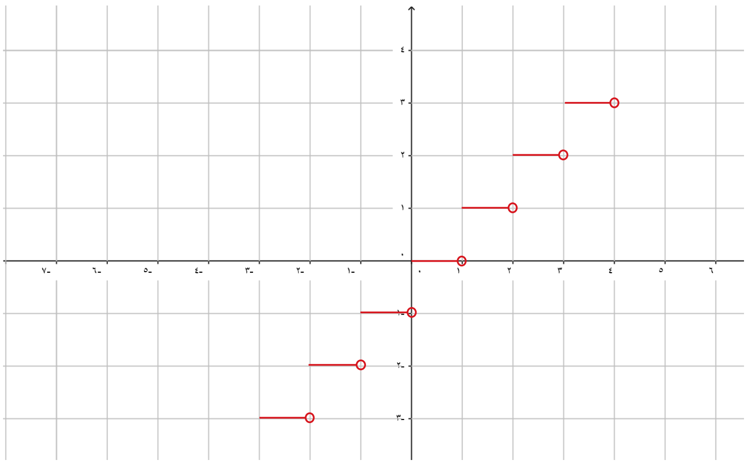
مثال (٢): أكتبُ ق (س) = [س]، باعتباره اقتراناً متعدّدَ القاعدة، ثمّ أمثّلُهُ في المستوى الديكارتي.

الحل: أصفارُ الاقتران هي: [س] = صفر: صفر ≤ س < ١

طولُ الفترةِ الجزئيّة: صفر ≤ س < ١ يساوي ١



$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \vdots \\ \text{-٢} ، & \text{-٢} \le \text{س} < \text{-١} \\ \text{-١} ، & \text{-١} \le \text{س} < \text{٠} \\ \text{٠} ، & \text{٠} \le \text{س} < \text{١} \\ \text{١} ، & \text{١} \le \text{س} < \text{٢} \\ \text{٢} ، & \text{٢} \le \text{س} < \text{٣} \\ \vdots \end{cases}$$



ألاحظُ: . نظراً لشكل منحنى الاقتران في المستوى يُطلَقُ عليه الاقتران السُّلَمي

. يسمى المقدارُ $\frac{\text{١}}{|\text{معامل س}|}$ طول درجة الاقتران

نشاط ٢

أكتبُ الاقتران: ق(س) = [٢س]، باعتباره اقتراناً متعددَ القاعدة، في الفترة [-١ ، ١]

- طول الدرجة = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$
- أصفار الاقتران: [٢س] = صفر إذن صفر ≤ ٢س < ١
- أكتبُ ق(س) باعتباره اقتراناً متعددَ القاعدة = { ....
- أمثّلُ منحنى الاقتران بيانيّاً.

نشاط ٣

أكتبُ الاقتران الذي قاعدته: ق(س) = [٣ − $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ س] ، في الفترة [-٢ ، ٧] ، باعتباره اقتراناً متعددَ القاعدة، ثمّ أمثّلُهُ بيانيّاً في المستوى الديكارتي.

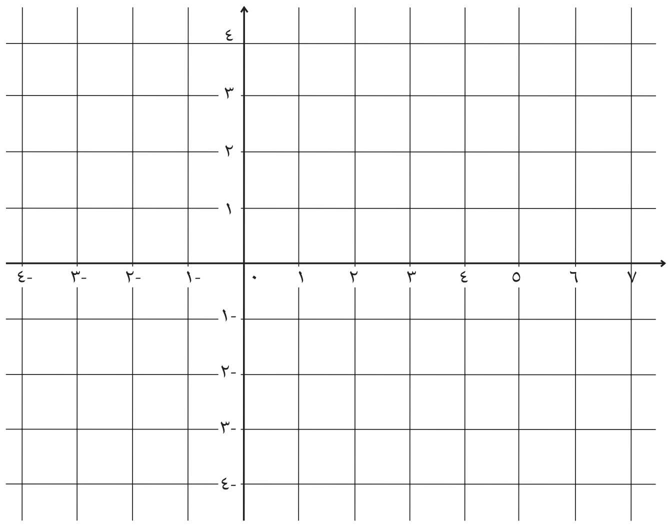
- طول درجة الاقتران ق = ...
- أصفار الاقتران: [٣ − $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ س] = صفر ⇐ صفر ≤ ٣ − $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ س < ١

وعليه: .... < س ≤ ....

• أكتبُ الاقتران ق(س)، باعتباره اقتراناً متعددَ القاعدة:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \vdots \\ ١ \text{ ، } & ٢ < \text{س} \le ٤ \\ ٠ \text{ ، } & ٤ < \text{س} \le ٦ \\ -١ \text{ ، } & ٦ < \text{س} \le ٧ \end{cases}$$

• أُمثلُ منحنى الاقتران، في المستوى الديكارتي.



أتعلّمُ: الاقتران ق(س) = [-س] هو انعكاس للاقتران ق(س) = [س] في محور الصّادات.

تمارين ومسائل:

(١) أحلُّ المعادلات الآتية:

أ) [٣س + ١] = ٤

ب) [٣ – ٢س] = -٤

(٢) أمثل كلٍّ من الاقترانات الآتية ؟

أ) ق(س) = [١٠ – ٥س] على الفترة [٢ – ٣]

ب) هـ(س) = [س – ٣] على الفترة [٠ – ٤]

جـ) ق(س) = [$\frac{١}{٣}$س + ٢]

ورقة عمل:

عزيزي الطالب: أجب عن الأسئلة الآتية.

السؤال الأول:

أضعُ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

(١) ما قاعدة الاقتران الناتجة من انسحاب منحنى ق(س) وَحدتين إلى اليسار، ثم وَحدتين إلى الأعلى ؟

أ) ق(س) + ٤ ب) ق(س) − ٤ جـ) ق(س + ٢) + ٢ د) ق(س − ٢) + ٢

(٢) ما صورة منحنى ق(س) المعكوس في محور السينات، من منحنيات الاقترانات الآتية ؟

أ) ق(-س) ب) -ق(-س) جـ) -ق(س) د) ق(س − ١)

(٣) ما طول درجة الاقتران ق(س) = [٣ − ٢س] ؟

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) ٢ د) ١

(٤) أيٌّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ نسبيّ ؟

أ) $\frac{٣}{\sqrt{س}}$ ب) $\frac{س^{\frac{٢}{٣}} - ١}{س}$ جـ) $\frac{١}{س}$ د) $\sqrt{\frac{س - ١}{س}}$

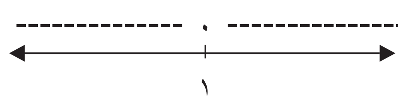
(٥) محور تماثل ق(س) = | ١٠ − ٢س | ، هو الخط المستقيم:

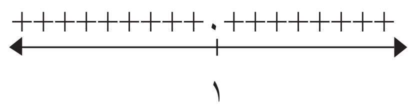
أ) س = ٥ ب) س = -٥ جـ) ص = ٥ د) ص = -٥

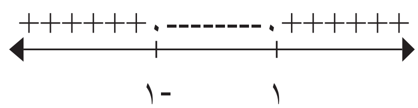
(٦) محور تماثل ق(س) = | ١٠ − ٢س | ، هو الخط المستقيم:

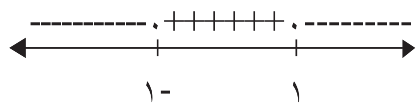
أ) س = ٥ ب) س = -٥ جـ) ص = ٥ د) ص = -٥

(٧) أيٌّ من الآتية خطُّ إشارة الاقتران ق(س) = (س − ١) (١ − س) ؟

أ)


ب)


جـ)


د)


(٨) ليكن: ق(س) = |٣س + ٤| فما قيمة ق(-٣) ؟

أ) -٥ ب) ٣ جـ) ٥ د) ١٣

السؤال الثاني:

أُمثّلُ منحنياتِ الاقتراناتِ الآتيةَ بيانيّاً مستعيناً بالتحويلات الهندسية الملائمة:

أ) ت(س) = س^{٢} + ٣ ب) هـ(س) = (س + ٣)^{٣}

جـ) ل(س) = - (س^{٣} − ١) د) ع(س) = $\sqrt{\text{س} - ٤}$ ، س ≥ ٤

السؤال الثالث:

أبحثُ في إشارة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ل(س) = س^{٢} + ٣س + ٢

ب) م(س) = ٨ − ٢س

جـ) ق(س) = $\frac{\text{ل(س)}}{\text{م(س)}}$، م(س) ≠ صفر.

السؤال الرابع:

أكتبُ الاقترانات الآتية، باعتبارها اقتراناتٍ متعدّدةَ القاعدة ثم أمثلها في المستوى الديكارتي:

أ) ق(س) = | ٦ + ٢س |

ب) ل(س) = | س^{٢} − ٢٥ |

جـ) ك(س) = ⟦ $\frac{١}{٢}$ س − ٣ ⟧

د) ع(س) = ⟦ ٥ − $\frac{١}{٣}$ س ⟧

اختبار ذاتي

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

١) إشارة الاقتران ق(س) = - π هي:

أ) موجبة عندما س > ٠ ب) سالبة عندما س $\in$ ح

جـ) موجبة عندما س $\in$ ح د) سالبة عندما س > ح

٢) محور تماثل الاقتران ق(س)= ١٠- ٢ |س| هو:

أ) ص= ٥ ب) ص= - ٥ ج) س= ٥ د) س = ٠

٣) العدد الذي ينتمي إلى مجموعة حل [٣س -١] = ٢

أ) -١ ب) $\frac{٤}{٣}$ ج) ١,٢ د) ٢

٤) قيم س التي تجعل ق(س)= ٨ - ٤س فوق محور السينات هي:

أ)س ≤ ٢ ب) س ∈]-∞ ، ٢[ج) س ∈]٢ ، ∞[د) س = ٢

٥) قاعدة الاقتران الممثل بيانياً كما في الشكل المجاور:

أ)ق (س) = |س^٢- ٢س-١| ب) ق(س) = - |س-٢ -١|

ج) ق (س) = - |س-٢ -٢س+١| د) ق (س) = |س-٢ -١|

٦) إذا كان ق(س) = [٣+ ٢ س]، فإنّ طول الدرجة يساوي :

أ) ٣ ب) ٢ ج) $\frac{١}{٢}$ د) $\frac{١}{٣}$

٧) انعكاس النقطة (-٢ ، ٥) في محور الصادات هي :

أ) (-٢ ، -٥) ب) (٢ ،-٥) ج) (٢ ، ٥) د) (-٢ ، ٥)

٨) إشارة الاقتران ق(س)= - π:

أ) موجبة دائماً. ب) سالبة دائماً. ج) لا يمكن التحديد. د) موجبة فقط عند π

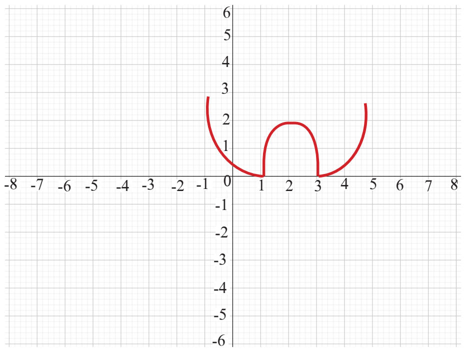
٩) منحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{\text{س+١}}$ هو انسحاب لمنحنى الاقتران هـ (س) = $\sqrt{\text{س}}$ بمقدار وحدة واحدة إلى:

أ) اليمين . ب) اليسار. ج) الأعلى. د) الأسفل.

١٠) الفترة [-٢ ، ٠] هي مجموعة حل المعادلة :

أ) [$\frac{١}{٢}$ س] = -١ ب) [$\frac{١}{٢}$س] =٠ ج) [س] = -٢ د) [٢ س] = -١

السؤال الثاني:



أ) بالاعتماد على الشكل المجاور أجيب عما يأتي :

أ) ما أصفار الاقتران؟

ب) ما مدى الاقتران ؟

ج) ما قاعدة الاقتران ؟

ب) إذا علمت أن ل(س) = [٢س ـ ١]، أجبْ عما يأتي :

أ) أعد تعريف الاقتران.

ب) مثل الاقتران بيانياً.

(١) الأسس واللّوغاريتمات

نشاط ١

أكملُ الجدولَ الآتي:

المقدار	$٢^{٣}$	$٣^{-٢}$	$٨^{\frac{٢}{٣}}$	$٤^{٠}$	$٥^{٩} \div ٥^{٧}$	$٢^{\frac{١}{٢}}$	$٤^{٣} \times ٤^{-١}$
قيمة المقدار	٨	$\frac{١}{٩}$					

تعريف: إذا كان ص = $أ^{س}$ ، حيث ص، أ ∈ $ح^{+}$ ، أ ≠ ١، نسمي س لوغاريتم العدد ص للأساس أ، ويُعَبَّر عنه رياضيّاً: $لو_{أ}$ (ص) = س (الصّورة اللّوغاريتميّة)، ويُقرأ لوغاريتم ص للأساس أ يساوي س. المثال الآتي يوضِّح العلاقة بين الصّورة الأُسِّيَّة، والصّورة اللّوغاريتميّة:

الصّورة الأُسِّيَّة	الصّورة اللّوغاريتميّة
$١٠^{٣} = ١٠٠٠$	$٣ = لو_{١٠}$ ١٠٠٠

الأس

الأساس

العدد

نشاط ٢

أُكمِلُ الجدولَ الآتي بما يناسبه:

الصّورة الأُسِّيَّة	$٢^{٣} = ٨$		$٣^{-٤} = \frac{١}{٨١}$	$٩^{٠} = ١$
الصّورة اللّوغاريتميّة	______	$لو_{١٠}$ (١٠٠٠٠) = ٤		$لو_{٩}$ ١ = ٠

نشاط ٣

أحول الآتي من الصّورة الأُسِّيَّة إلى الصّورة اللّوغاريتميّة:

أ) $٣^{١}$ = ٣   ب) $٢^{١}$ = ٢   جـ) $٣^{٠}$ = ١

د) $٥^{٠}$ = ١   هـ) $٣^{٤}$ = ٨١   و) $٢^{٥}$ = ٣٢

أ) لو$_{٣}$ (٣) = ١   ب) لو$_{٢}$ (٢) = ____   جـ) لو$_{٣}$ (١) = صفر

د) لو$_{٥}$(١) = ______   هـ) لو$_{٣}$ ٨١ = ٤   د) لو$_{٢}$ ٣٢ = ____

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: لو$_{م}$ (م) = ١،   لو$_{م}$ (١) = صفر،   لو$_{م}$ م^{س} = س

نشاط ٤

أَجِدُ قيمة اللّوغاريتمات الآتية:

١) لو$_{٢}$ ($٢^{٦}$) = ٦.

٢) لو$_{٧}$ ($\sqrt{٧}$) = __________.

٣) لو$_{٣}$ ($\frac{١}{٩}$) = ___________.

نشاط ٥

أُكْمِلُ الجدول الآتي ثم أُجيب عما يليه:

س	٢		٨	١٦	٣٢
لو$_{٢}$ (س)	١	٢	٣	٤	٥
لو$_{٤}$(س)	$\frac{١}{٢}$			٢	

(١) لو$_{٢}$ (٢ × ٤) = لو$_{٢}$ (٨) = ٣ ،   لو$_{٢}$ (٢) + لو$_{٢}$ (٤) = ١ + ٢ = ٣

(٢) لو$_{٢}$ (٢ × ٨) = _______ ،   لو$_{٢}$ (٢) + لو$_{٢}$ (٨) = _________

(٣) لو$_{٤}$ (٢ × ٤) = ________ ،   لو$_{٤}$ (٢) + لو$_{٤}$ (٤) = _________

(٤) لو$_{٤}$ (٢ × ٨) = ________ ،   لو$_{٤}$ (٢) + لو$_{٤}$ (٨) = __________

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: إذا كان س، ص عددَيْنِ حقيقيَّيْن موجبيْن، وكان م عدداً حقيقيّاً موجباً غير الواحد، فإنَّ: لو$_{م}$ (س × ص) = لو$_{م}$ (س) + لو$_{م}$ (ص).

نشاط ٦

أُكْمِلُ الجدول الآتي ثم أُجيب عما يليه:

س	٣		٢٧	٨١	
لو$_{م}$ (س)	١	٢			٥

(١) لو$_{م}$ ($\frac{٨١}{٢٧}$) = لو$_{م}$ (٣) = ١ ، لو$_{م}$ (٨١) – لو$_{م}$ (٢٧) = ٤ – ٣ = ١

(٢) لو$_{م}$ ($\frac{٢٤٣}{٩}$) = ______________ ، لو$_{م}$ (٢٤٣) – لو$_{م}$ (٩) = ________________

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: إذا كان س، ص عددَيْنِ حقيقيَّيْن موجبيْن، وكان م عدداً حقيقيّاً موجباً غير الواحد، فإنَّ: لو$_{م}$ ($\frac{س}{ص}$) = لو$_{م}$ (س) – لو$_{م}$ (ص)

- إذا كان ص عدداً حقيقيّاً موجباً، فإنَّ: لو$_{م}$ (ص)^{م} = م لو$_{م}$ (ص)، بحيث م ∈ ح*.

نشاط ٧

أكتب كل ممّا يأتي بصورة لوغاريتم واحد:

١) (لو$_{م}$ (٨) – لو$_{م}$ (ص)) = لو$_{م}$ ($\frac{٨}{ص}$)

٢) (لو$_{م}$ (٤) + لو$_{م}$ (س)) – (٣ لو$_{م}$ (٢)) = لو$_{م}$ (٤س) – لو ________

= ________________

نشاط ٨

إذا كان لو$_{م}$ (٧) = ٢٫٨١ ، أَجِدُ قيمة كل مما يأتي:

١) لو$_{م}$ (٢٨) ٢) لو$_{م}$ (٧)^{٣} ٣) لو$_{م}$ (٣٫٥)^{٢}

١) لو$_{٢}$ (٢٨) = لو$_{٢}$ (٤×٧) = لو$_{٢}$ (٤) + لو$_{٢}$ (٧) = ٢ + ٢,٨١ = ٤,٨١

٢) لو$_{٢}$ (٧)^{٣} = ____ × لو$_{٢}$ (٧) = ٣ × ______ = ٨,٤٣

٣) لو$_{٢}$ (٣,٥)^{٢} = لو$_{٢}$ ( )^{٢} = ___________

= __ × (لو$_{٢}$ ( ) − لو$_{٢}$ ( )) = ___________

مثال: أحل المعادلة: لو$_{٢}$ (س + ٢) − لو$_{٢}$ (س − ١) = ٢

الحل: لو$_{٢}$ (س + ٢) − لو$_{٢}$ (س − ١) = لو$_{٢}$ $\frac{\text{س+٢}}{\text{س−١}}$ = ٢

$\frac{\text{س+٢}}{\text{س−١}}$ = ٢^{٢}

س + ٢ = ٤(س ـ ١)

س= ٤س − ٤ − ٢ ، ومنها: س = ٢

نشاط ٩

أحلّ المعادلة: لو$_{١٠}$ (س) + لو$_{١٠}$ (٣) = ٢

لو$_{١٠}$ (   ) = ٢

١٠^{٢} = __________

١٠٠ = __________

س = $\frac{\text{١٠٠}}{\text{٣}}$

تمارين ومسائل:

(١) أحسبُ قيمة كل من:

أ) لو$_{٢}$ (٦٤)　　　　ب) لو$_{٣}$ (٨١)

(٢) أُحوّلُ من الصّورة الأُسِّيَّة إلى اللّوغاريتميّة:

أ) ٢^{٤} = ١٦　　　　ب) ٠,١٠ = ١٠$^{-١}$

(٣) أُحوّلُ من الصّورة اللّوغاريتميّة إلى الصّورة الأُسِّيَّة:

أ) لو$_{٦}$ ١ = ٠　　　　ب) لو$_{١٠}$ (٠,٠٠١) = - ٣

(٤) إذا كان لو$_{٢}$ (٧) = ٢,٨١ ، لو$_{٢}$ (٥) = ٢,٣٢ ، أَجِدُ قيمة ما يأتي:

أ) لو$_{٢}$ (٣٥)　　　　ب) لو$_{٢}$ $\left(\frac{٧}{١٠}\right)$

(٥) أَجِدُ قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

أ) لو$_{٢}$ $\sqrt{٣٢}$ + لو$_{٢}$ $\sqrt{٢}$　　　　ب) لو$_{٣}$ (٨١) − لو$_{٣}$ (٩)　　　　جـ) لو$_{٥}$ (٥^{٢})^{٣}

(٦) أَحُلُّ المعادلاتِ الآتية:

أ) لو$_{٢}$ (٧س) = لو$_{٢}$ (س^{٢} + ١٢)　　　　ب) لو$_{١٠}$ (٥س^{٢} − ٣) − لو$_{١٠}$ (س^{٢} + ١) = ٠

(٢) الاقتران الأسّي (Exponential Function)

تعريف: يُسمّى الاقترانُ اقتراناً أسّيّاً إذا كان على الصورة: ق(س) = أ^س ، أ ≠ ١ ، أ > ٠ ، س ∈ ح

أناقش لماذا أ > ٠ ، أ ≠ ١ ؟

نشاط ١

أيٌّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ أُسّيٌّ ؟

ألاحظُ انّ: ق(س) = ٢^س اقترانٌ أسّيٌّ؛ لأنّ ....

بينما هـ(س) = (-٣)^س ليس اقتراناً أسياً؛ لأن الأساس أ = -٣ > ٠ .

وعليه فإنّ: ل(س) = س^٢ هو اقترانٌ ....؛ لأنّ المتغير ليس أساً.

م(س) = $(\frac{١}{٦})$^س هو اقترانٌ ....؛ لأنّ ....

نشاط ٢

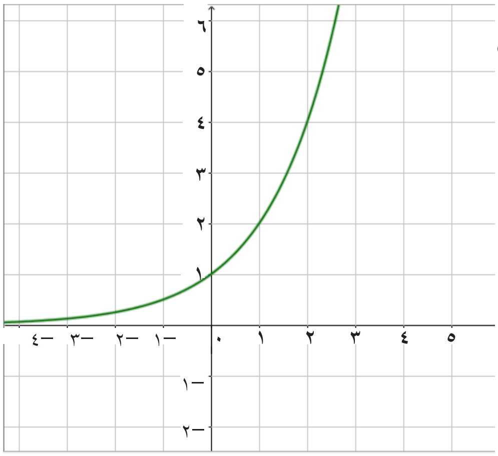
أمثّلُ الاقترانَ: ق(س) = ٢^س ، س ∈ ح في المستوى الديكارتي.

أكملُ الفراغاتِ في الجدول الآتي:

س	٣	٢	١	٠	١-	٢-	
ق(س)	٨			١	$\frac{١}{٢}$		$\frac{١}{٨}$

• أعيّنُ النّقاطَ من الجدول السابق في المستوى الديكارتي،

وألاحظُ شكل منحنى الاقتران:



من التمثيل البياني لمنحنى الاقتران، أتعلّمُ أهم خصائص منحنى

١) مدى الاقتران الأسّي هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (ح +).

٢) منحنى الاقتران يقطع محور الصادات في النقطة (٠، ١).

٣) كلّما زادت قِيمُ س تزداد قيمَ ص المُناظِرةُ لها.

نشاط ٣

أُكملُ الجدولَ الآتيَ لِقيَمِ س ، والاقتران ق(س) ، ثم أرسمُ منحنى الاقتران.

س	٣	٢	١		١-		٣-
ق(س)= $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$	$\frac{١}{٨}$			١	٢	٤	

أعيّنُ النقاطَ على المستوى الديكارتي، وأرسم منحنى الاقتران.

- ألاحظُ من الرسم أنّ: منحنى ق(س) = ٢^{س} هو انعكاس لمنحنى الاقتران هـ(س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ في محور الصادات، أوضح ذلك جبريّاً.
- من التمثيل البياني للاقتران في النشاط السابق، ألاحظُ أهمَّ خصائص الاقتران الأسّي: ق(س) = أ^{س} ، ٠ < أ < ١ وهي:

١) مدى الاقتران الأسّي هو: ....

٢) يقطعُ منحنى الاقتران محورَ الصادات في النقطة: ....

٣) كلما زادت قيم س، فإنّ قيمَ ص المناظِرَةَ لها ....

نشاط ٤

أكملُ الفراغاتِ في الجدول الآتي اذا كان ق(س) = $٣^{س}$ + ٢ :

س	٣	٢		٠		-٢	-٣
ص= ق(س)	٢٩		٥		$٢\frac{١}{٣}$	$٢\frac{١}{٩}$	

- أعيّنُ النقاطَ في الجدول السابق على المستوى الديكارتي، وأرسمُ منحنى الاقتران.
- **ألاحظُ أنّ:** الاقتران ق(س) = $٣^{س}$ + ٢هو انسحاب لمنحنى الاقتران هـ(س) = $٣^{س}$ وَحدتين إلى الأعلى.

أتعلّمُ: يُمكنُ تطبيقُ جميعِ التحويلاتِ الهندسيّةِ التي تعلمتُها على الاقتران الأسّي.

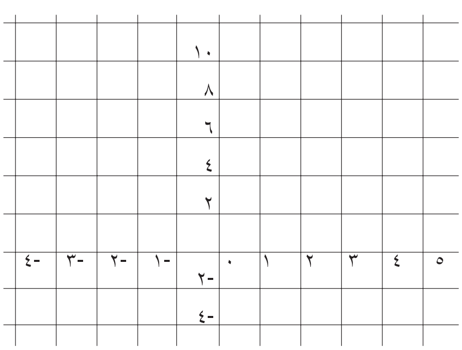
الاقتران الأسّي الطبيعيّ

الاقتران الأسّي الطبيعي: هو اقترانٌ أسّيٌّ يكون أساسُه العددَ هـ ، حيثُ هـ عددٌ غيرُ نسبي له أهمية خاصة في الرياضيات ويسمى العدد النيبيري نسبة إلى (John Napier) ويساوي تقريباً ٢,٧١٨٢٨

نشاط ٥

أكملُ الجدولَ الآتيَ لقيم س ، ق(س) للاقتران ق(س) = $هـ^{س}$، باستخدام الآلة الحاسبة، ثمّ أرسمُ منحنى الاقتران:

س	٣	٢	١	$\frac{١}{٢}$	٠	-١
ق(س)		٧,٣٩		١,٦٥		



تمارين ومسائل:

(١) أيٌّ من الاقترانات الآتية يُعَدُّ اقتراناً أُسّيّاً ؟ مع بيان السبب.

أ) ق(س) = $٥^{س}$

ب) م(س) = $٤^{-س}$

جـ) هـ(س) = ٢$س^{٣}$

د) ص = $(-٢)^{س}$

هـ) ص = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

(٢) أمثّلُ منحنى الاقترانات الآتية في المستوى الديكارتي، وأجدُ مدى كل اقتران منها:

أ) ص = $٣^{س}$ − ٢

ب) ص = ٥ − $٢^{س}$

جـ) ص = $٤^{-س}$

د) ص = -$\left(\frac{١}{٤}\right)^{س}$

مهمة تعليمية:

(١) استخدمُ منحنى ق(س) = $هـ^{س}$، والتحويلات الهندسيّة المناسبة لرسم الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = $هـ^{-س}$

ب) ق(س) = ٣ − $هـ^{س}$

جـ) ق(س) = $هـ^{(س-١)}$

(٢) أجدُ قيمةَ كلٍّ من: ﻫ ، ب لمنحنى ق(س) = ﻫ $(٣)^{س}$ + ب، الذي يمرُّ بالنقطتين: (١،٣) ، (٠،٢).

(٣) الاقتران اللوغاريتمي (Logarithmic Function)

نشاط ١

أجدُ قيمةَ ما يأتي:

لـو$_{٤}$ ٦٤ = ...

لـو$_{١٠}$ ١٠٠ = ...

لـو$_{٨}$ ١ = ...، لـو$_{٣}$ ٣ = ...، لـو$_{٧}$ $\frac{١}{٤٩}$ = ...

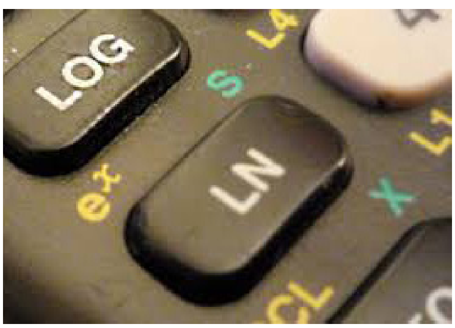
أتعلم: الاقتران على الصورة ق(س) = لـو$_{أ}$ س ، حيث أ > ٠ ، أ ≠ ١ ، س > ٠ يُسمّى اقتراناً لوغاريتميّاً.

أناقش

لماذا أ > ٠ ، أ ≠ ١ ؟

ملحوظة: من اللوغاريتمات الأكثر شيوعاً اللوغاريتم ذو الأساس ١٠، ويُسمّى اللوغاريتم العادي، ويُكتبُ عادةً على الصورة ص= لـو س ، س > ٠ (لا يُكتبُ له الأساس ١٠).

وإذا كان الأساسُ العدد هـ يُسمّى اللوغاريتم الطبيعي، ويُكتب على الصورة: ق(س) = لـو$_{هـ}$ س.



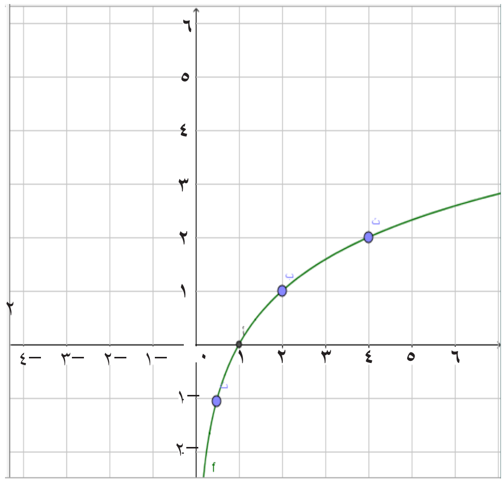
نشاط ٢

أكوّنُ جدولاً لقيم س ، ق(س) المناظرة لها، للاقتران ق(س) = لـو$_{٢}$ س، ثم أرسمُ منحنى الاقتران.

س	٨	٤		١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	
ق(س) = لـو$_{٢}$ س	٣		١			-٢	-٣

أتذكرُ أنّ: $\text{لـو}_{٢} \frac{١}{٤} = -٢$ لأن $٢^{-٢} = \frac{١}{٢^{٢}} = \frac{١}{٤}$

عيّنُ النقاط في المستوى البياني، وأرسمُ منحنى الاقتران ، كما هو في الشكل (٢-٣):



من منحنى الاقتران ص= $\text{لـو}_{٢}$س ، ألاحظُ خصائصَ الاقتران ص= $\text{لـو}_{أ}$س ، حيث أ > ١ :

- مجال الاقتران اللوغاريتمي هو: .... ومداه هو: ....
- نقطة (أو نقاط) تقاطع منحنى الاقتران مع محوريّ الإحداثيات هي: ....
- كلما زادت قيمُ س فإنّ قيمَ ص المناظِرة لها ....

نشاط ٣

أرسم منحنى ص = $٢^{س}$ على المستوى المرسوم عليه منحنى الاقتران ص= $\text{لـو}_{٢}$س ثم أقارنُ بين منحنييّ الاقترانين.

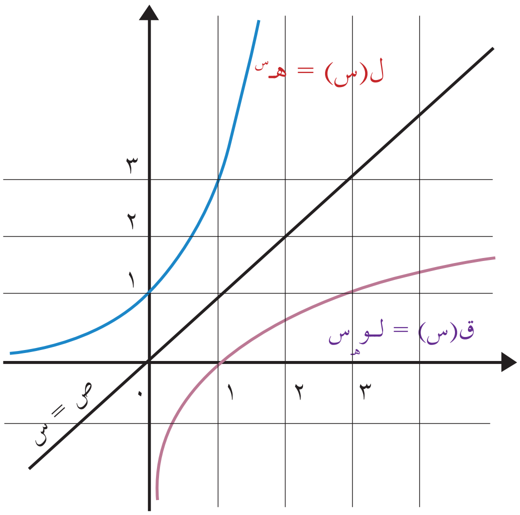
أتعلّمُ: بشكلٍ عام، يُمكنُ تطبيقُ جميعِ التحويلات الهندسيّة التي تعلمتها على الاقتران اللوغاريتمي.

نشاط ٤

مثال(١): بالاعتماد على منحنى الاقتران الأسّيّ الطبيعيّ ل(س) = $هـ^{س}$ ، وخصائص منحنى الاقتران اللوغاريتمي، أرسمُ منحنى الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي ق(س) = $\text{لـو}_{هـ}$س

الحلّ: عرفت من النشاط السابق أن منحنى الاقتران ق(س) = $\text{لـو}_{هـ}$س ، هو انعكاسٌ لمنحنى ص = $هـ^{س}$ في المستقيم ص = س.

نرسم منحنى $ل(س) = هـ^{س}$ ، ثم نرسمُ انعكاسَه في الخط المستقيم $ص = س$ ، فيكون لدينا منحنى الاقتران، كما هو في الشكل المجاور.



نشاط ٥

أجدُ مجالَ كلٍّ من الاقترانات الآتية:

- $ق(س) = لو_{٢}(س - ٣)$
- $هـ(س) = لو_{٣}(س^{٢} - ١)$

مجال الاقتران اللوغاريتمي هو $ح^{+}$، فإن مجال ق(س) معرّفٌ عندما $س - ٣ > ٠$.

مجال ق(س) هو : ....

أما مجال هـ (س) فهو معرّفٌ عندما $س^{٢} - ١ > ٠$.

وعليه فإن: مجال هـ (س) هو : ....

تمارين ومسائل:

(١) مستعيناً بالتحويلات الهندسية ومنحنى الاقتران $ق(س) = لوس$، أمثّلُ الاقترانات الآتية في المستوى الديكارتي:

أ) $هـ(س) = لوس_{٢} - ١$

ب) $ل(س) = لو_{٢}(س + ٢)$

جـ) $م(س) = -لو_{٢}(س + ١)$

(٢) أجدُ مجال كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) $ق(س) = لو_{هـ}(٥س - س^{٢})$

ب) $ق(س) = لو_{٢}\sqrt{٢س - ٣}$

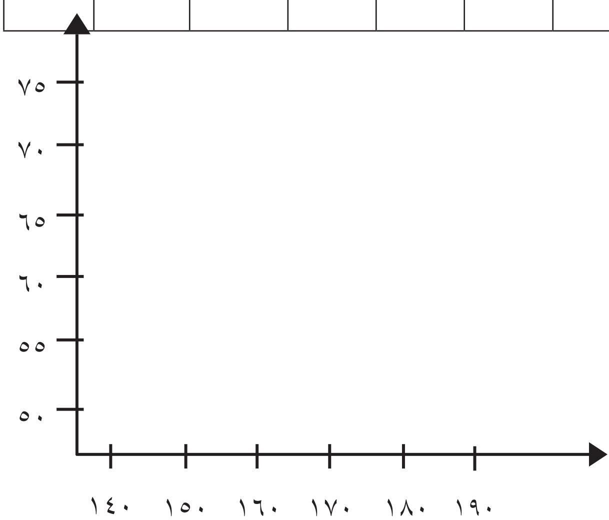
(٤) الارتباط الخطي (Linear Correlation)

نشاط ١

قام قيس بجمع بيانات حول أطوال مجموعة من طلبة الصف العاشر، وكُتلِهِم، فكانت كما في الجدول الآتي:

الطول بالسنتمتر	١٧٠	١٦٠	١٦٥	١٦٠	١٥٥	١٦٢	١٥٠	١٦٧	١٥٨
الكتلة بالكيلوغرام	٧٠	٦٥	٦٢	٦٠	٥٨	٦٠	٥٥	٦٨	٥٦

أمثلُ شكل الانتشار لهذه البيانات:



- هل توجد علاقة بين طول الإنسان وكتلته ؟
- هل يمكنُ رسمُ مستقيم يمرُّ بمعظم النقاط ؟

أتعلمُ: إذا أمكنَ رسمُ مستقيم يمرُّ بمعظم النقاط في شكل الانتشار، فإن العلاقة بين المتغيّريْن خطيّة، وتسمى هذه العلاقة الارتباط الخطيّ.

- هل بالإمكان تحديد قيمة عددية لقوة الارتباط بين المتغيّريْن؟

أستنتج: شكل الانتشار يفيد في تحديد ما إذا كانت هناك علاقة، ونوعها خطيّة، أو غير خطيّة بين متغيّريْن، ولكن لا يكفي للحكم على قوة الارتباط بين المتغيّريْن؛ لأنّ تقديرَه يختلفُ باختلاف الشخص الذي يقومُ بالحكم على قوة الارتباط؛ ولذلك يجبُ استخدامُ طريقةٍ أكثر دقّة، يتمُّ بواسطتها تحديدُ قيمةٍ عدديةٍ لقوة الارتباط بين المتغيّريْن، وهي ما يسمّى معامل الارتباط، وهذا ما سيتم تعلمه في الدرس القادم.

تمارين ومسائل:

١) يمثلُ الجدولُ الآتي علاماتِ مجموعةٍ من الطلبة في مبحثيّ الفيزياء (س)، والكيمياء (ص).
أرسمُ شكل الانتشار، وأبيّنُ نوع الارتباط.

س	٥	٩	٨	١٢	١٠	١١	٢	٤
ص	٧	١٠	٨	١٥	٩	١٣	٤	٦

٢) في الجدول الآتي أعمارُ مجموعةٍ من الأشخاص (س)، وعدد الساعات اليومية التي يمارسون فيها التمارين الرياضية (ص):

س	٣٠	٢٥	٢٢	٢٠	٣٥	٤٠	٥٠	٥٥	٦٠
ص	٣	٢	١,٥	١	٤	٥	٣,٥	٢	١

- أرسمُ شكل الانتشار لهذه البيانات.
- هل يوجد ارتباطٌ خطيٌّ بين عمر الشخص وعدد الساعات اليومية التي يقضيها في ممارسة التمارين الرياضية؟

(٥) معامل ارتباط بيرسون
(Pearson Correlation Coefficient)

أناقش

• إذا اتّخذ شكلُ الانتشار خطاً مستقيماً فهناك ارتباطٌ بين المتغيريْن، يُمكنُ التعبيرُ عنه عددياً بمعامل ارتباط، يُسمّى معاملَ ارتباط بيرسون.

تعريف: إذا كانت س ، ص مجموعتين من القيم المتناظرة فيعرّفُ معامل ارتباط بيرسون ر كما يأتي:

$$\text{ر} = \frac{\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}}\,\text{ص}_{\text{ك}} - \text{ن}\,\overline{\text{س}}\,\overline{\text{ص}}}{\sqrt{\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}}^{2} - \text{ن}\,\overline{\text{س}}^{2}}\;\sqrt{\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ك}}^{2} - \text{ن}\,\overline{\text{ص}}^{2}}}$$

حيث: $\overline{\text{س}}$ الوسط الحسابي لمجموعة قيم س ، $\overline{\text{ص}}$ الوسط الحسابي لمجموعة قيم ص ، ن عدد القيم.

نشاط ١

خالدٌ ورفاقُهُ في الصف العاشر، يعيشون في حيّ الياسمينة في نابُلُسَ، استلموا علاماتِهم المدرسيّة، بعد اختبارات الشهرين، فأرادوا دراسةَ العلاقةِ بين علاماتهم في مبحثيّ اللغة العربية واللغة الانجليزية، من خلال حساب معامل ارتباط بيرسون.

اللغة العربية س	٢٠	٢٥	٢٠	١٥	٣٠
اللغة الانجليزية ص	٢٥	٢٢	١٨	٢٠	٣٠

أكملُ الجدولَ الآتيَ

	س	ص	$س^٢$	$ص^٢$	س ص
	٢٠	٢٥			
	٢٥	٢٢		٤٨٤	
	٢٠	١٨	٤٠٠		
	١٥	٢٠			
	٣٠	٣٠			٩٠٠
المجموع	١١٠	١١٥		٢٧٣٣	

$\sum_{ك=١}^{ن} س_ك^٢ = \ldots\ldots$ $\sum_{ك=١}^{ن} ص_ك^٢ = \ldots\ldots$ $\sum_{ك=١}^{ن} س_ك ص_ك = \ldots\ldots$

- أحسبُ:

$\bar{س} = \ldots\ldots$ $\bar{ص} = \ldots\ldots$

- أحسبُ معاملَ ارتباطِ بيرسون:

$$ر = \frac{٢٦١٠ - ٥ \times ٢٢ \times ٢٣}{\sqrt{٢٥٥٠ - ٥ \times (٢٢)^٢}\ \sqrt{٢٧٣٣ - ٥ \times (٢٣)^٢}}$$

$ر = \ldots\ldots$

أتعلمُ: $-١ \leq ر \leq ١$

تمارين ومسائل:

١) حسبَ ثائرٌ معدّلَ درجاتِ الحرارةِ في قريتِه، في الأسابيعِ الثمانيةِ من شهريّ كانون أول وكانون ثاني، وعدّ أُسْطواناتِ الغاز التي تستهلكُها أسرتُه للتدفئة في كلِّ أسبوع، فكانت على النحو الآتي:

درجة الحرارة س	١-	٥	٨	١٢	٠	٢-	١٠	٨
عدد أُسطوانات الغاز ص	٣	٢	٢	١	٢	٣	١	٢

أحسبُ معاملَ ارتباط بيرسون.

٢) قام طلبةُ الصفّ العاشرِ الأساسيّ في مدرسة المجدل الثانوية، بدراسة العلاقةِ بين عددِ أفرادِ الأُسرةِ لَدى طلبةِ الصفّ، وكميّةِ استهلاكِ الماءِ شهريّاً، فجمعوا البياناتِ، وحصلوا على النتائج الآتية، عِلماً بأنّ عددَ الأُسَرِ خمسٌ. أحسبُ معاملَ ارتباط بيرسون.

$$\sum_{ك=١}^{ن} س_ك ص_ك = ٤٩٠ \qquad \sum_{ك=١}^{ن} ص_ك = ١١٠ \qquad \sum_{ك=١}^{ن} س_ك = ٢٠$$

$$\sum_{ك=١}^{ن} ص_ك^{٢} = ٢٧٠٠ \qquad \sum_{ك=١}^{ن} س_ك^{٢} = ٩٠$$

مهمة تقويمية:

- أحسبُ معاملَ ارتباطِ بيرسون للبيانات في الجدول الآتي:

س	١٠	٨	٥	١٦	٦	١٥
ص	٩	٧	٥	١٥	٦	١٢

(٦) معاملُ ارتباطِ سبيرمان
(Spearman Correlation Coefficient)

نشاط ١

قام معلمُ الصفِّ الثّالثِ الأساسيّ في مدرسةِ فِلَسطينَ الأساسيّة بدراسة العلاقةِ بين تقديراتِ مبحثيّ اللّغةِ العربيّةِ والرّياضيات، لأربعةِ طلابٍ، ودوّن النتائجَ في الجدول الآتي:

اسم الطالب	سعيد	أيمن	ناجح	شادي
اللغة العربية س	جيد	ضعيف	ممتاز	مقبول
الرياضيات ص	مقبول	جيد	جيد جدا	ضعيف

- أرادَ المعلمُ أنْ يُحدّدَ العلاقةَ بين تحصيلِ الطلبةِ في مبحثيّ اللغةِ العربيةِ والرياضياتِ، وإيجادَ معاملِ ارتباطٍ بينهما، فهل يستطيعُ إيجادَ معاملِ ارتباطِ بيرسون لهذه البيانات ؟ لماذا؟
- أُعبِّرُ عن البياناتِ الوصفيّةِ بِقِيَمٍ عدديّةٍ، بإعطاءِ رُتَبٍ للطلبة في المبحثيْن.

أُكملُ الجدولَ الآتي:

اسم الطالب	سعيد	أيمن	ناجح	شادي
اللغة العربية س	...	الرابع	الأول	الثالث
الرياضيات ص	الثالث	...	...	...

تعريف: يُعرّفُ معاملُ ارتباط سبيرمان بين متغيرين، ويُرمزُ له بالرّمزِ $ر_{س}$ حسب القانون:

$$ر_{س} = ١ - \frac{٦ \sum_{ك=١}^{ن} ف_{ك}^{٢}}{ن\,(ن^{٢} - ١)} \text{ ، حيث :}$$

ف : الفرق بين رُتَبِ المتغيّرِ س والمتغيّرِ ص.

ن : عددُ قِيمِ كلٍّ من المتغيّريْن.

ملاحظة: إذا تساوت الرتبُ نأخذ الوسط الحسابي لرتب القيم المكررة.

$$\text{ر}_{\text{س}} = ١ - \frac{٦ \sum_{\text{ك}=١}^{\text{ن}} \text{ف}_{\text{ك}}^{٢}}{\text{ن}\,(\text{ن}^{٢} - ١)} = ...$$

نشاط ٢

أحسبُ معاملَ ارتباطِ سبيرمان للبياناتِ في الجدول الآتي:

س	٦٠	٨٠	٦٥	٧٠	٨٥	٦٥	٧٥	٥٥	٦٥	٩٠
ص	٧٠	٦٠	٧٠	٩٠	٧٠	٦٠	٨٠	٧٥	٦٥	٩٠

أُكملُ الجدولَ الآتي:

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	$\text{ف}^{٢}$
٦٠	٧٠	٩	٦	٣	
٨٠	٦٠				
٦٥	٧٠	٧			
٧٠	٩٠		١,٥		
٨٥	٧٠	٢		-٤	
٦٥	٦٠				
٧٥	٨٠		٣		
٥٥	٧٥				
٦٥	٦٥				
٩٠	٩٠	١			٠,٢٥

$\text{ن} = ...$ $\sum_{\text{ك}=١}^{\text{ن}} \text{ف}_{\text{ك}}^{٢} = ...$

$\text{ر} = ...$

تمارين ومسائل:

١) يُمثّلُ الجدولَ الآتيَ الدخلَ الشهريَّ (س) لستِ أُسَرٍ فِلَسطينيّةٍ، ومجموعَ نفَقاتِها الشهريّة (ص)، بالدينارِ الأردنيّ:

س	٦٠٠	٨٠٠	٧٠٠	٤٠٠	٦٥٠	٥٥٠
ص	٥٥٠	٧٥٠	٧٠٠	٥٠٠	٥٠٠	٤٠٠

أحسبُ معاملَ ارتباطِ الرّتبِ (سبيرمان).

٢) إذا علمت أنّ مجموعَ مربّعاتِ فَرْقِ الرُّتبِ بين متغيريّ الطولِ والكتلةِ لدى عيّنةٍ من تسعةِ أطفالٍ، يساوي ٢١ ، أحسبُ معاملَ ارتباطِ سبيرمان.

مهمة تقويمية:

- يمثّلُ الجدولَ الآتيَ تقديراتِ مجموعةٍ من طلبةِ الصفّ الثاني، في الفصليْن الأول والثاني:

تقدير الفصل الأول	أ	ب	ج	أ	ب	أ	د	ج
تقدير الفصل الثاني	ب	ب	ب	أ	أ	ج	ج	د

أحسبُ معاملَ ارتباطِ سبيرمان.

(٨) مبدأُ العدّ (Counting Principle)

مبدأ العدِّ الأساسيّ:

إذا أمكننا إجراءُ عمليّةً ما على خطواتٍ عددُها ك، بحيث تتمُّ الأولى بطرقٍ عددها $ن_١$، وتتمُّ الثانية بطُرُقٍ عددها $ن_٢$، وهكذا حتى الخطوةِ الأخيرةِ التي تتمُّ بطرقٍ عددها $ن_ك$، فإنّ عددَ الطُّرقِ الكليّةِ التي تتمُّ بها هذه العملية هي: $ن_١ \times ن_٢ \times ن_٣ \times \ldots \times ن_ك$.

نشاط ١

يُرادُ تكوينُ مجلسِ إدارةٍ لشركةٍ ما، مكوَّنٍ من رئيسٍ، ونائبِ رئيسٍ، وأمينٍ للصندوقِ، بكم طريقةٍ يمكنُ تكوينُ هذا المجلسِ، إذا كان عددُ الأشخاصِ المرشّحين ٥ ؟

لاختيار الرئيسِ، هناك ٥ طرقٍ مختلفة.

لاختيار نائبِ الرئيس، هناك .... طرقٍ مختلفة، لماذا ؟

لاختيار أمينِ الصندوق، هناك .... طرقٍ مختلفة.

عدد الطرق المختلفة لتكوين المجلس= ... × ... × ٣ =... طريقة مختلفة.

نشاط ٢

كم عدداً مكوّناً من منزلتيْن، يمكنُ تكوينُه من مجموعة الأرقام: { ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٨ } ؟

أ) إذا سُمِحَ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

تتمُّ العمليّةُ في مرحلتين: المرحلةُ الأولى اختيارُ منزلةِ الآحاد، وتتمُّ بـ ... طُرُق، واختيارُ منزلةِ العشراتِ، وتتمُّ أيضا بـ ... طرق. إذن عددُ الطرقِ الكليّة = ... × ... = ١٦ طريقةً.

ب) إذا لم يُسمَحْ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

عددُ طرقِ اختيارِ منزلةِ الآحادِ... طرق، وعددُ طرقِ اختيارِ منزلةِ العشرات ... طرق.

عدد الطرق المختلفة = ... × ... = ١٢ طريقةً، أيّ أنّ: عدد الأعداد المختلفة ١٢ عدداً.

مضروبُ العدد:

بكم طريقةٍ مختلفةٍ يمكنُ لخمسةِ أشخاصٍ أن يجلسوا في خمسةِ أماكنَ في خطٍّ مستقيم؟

حسب مبدأ العدّ: عدد الطرق المختلفة هي ٥ × ... × ... × ... × ... = ١٢٠ طريقةً مختلفةً.

اصطلِحَ على كتابة حاصلِ الضرب ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ على الصورة ٥! ، وتُقرَأُ مضروب العدد ٥.

تعريف: إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً، فإنّ مضروبَ العدد ن ، ويُرمَزُ له بالرمز ن!

حيث: ن! = ن(ن − ١)(ن − ٢) .... ٣ × ٢ × ١ ، ٠! = ١

نشاط ٤

أحسبُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) ٦! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ...

ب) $\frac{\text{٥!}}{\text{٣!}} = \frac{\text{٥ × ٤ × ٣!}}{\text{٣!}} = \text{.....} = \text{٢٠}$

جـ) $\frac{\text{٨!}}{\text{٥! ٣!}} = \frac{\text{٨ × ٧ × ٦ × ٥!}}{\text{٥! × ٣ × ٢ × ١}}$

نشاط ٥

أكتبُ $\frac{\text{ن!}}{\text{(ن − ٢)!}}$ في أبسط صورة.

$\frac{\text{ن!}}{\text{(ن − ٢)!}} = \frac{\text{ن(ن − ١)(ن − ٢)!}}{\text{(ن − ٢)!}} = \text{......}$

قيمةُ المقدارِ، عندما ن = ٥ تساوي ....

تمارين ومسائل:

١) يقدِّمُ أحدُ المطاعمِ في مدينةِ نابُلُسَ ٣ أنواعٍ من اللّحوم، و ٤ أنواعٍ من الحَلْوى، ونوعيْن من المشروبات. بكم طريقةٍ يمكنُ لأحدِ مرتادي المطعم اختيارَ وجبةٍ مكوّنةٍ من نوعٍ من اللّحومِ، ونوعٍ من الحَلْوى، ومشروبٍ؟

٢) أُلقِيتْ قطعةُ نقدٍ ٣ مرات، فما عددُ النتائجِ الممْكِنةِ؟ أكتبُ النتائجَ في مجموعة.

٣) كم عدداً مؤلّفاً من ثلاث منازل، يمكنُ تكوينُهُ من مجموعة الأرقام: { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }؟

أ) إذا سُمِحَ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

ب) إذا لم يُسمحْ بتكرار الرقمِ في أكثر من منزلة.

(٩) التباديل (Permutations)

تعريف:

التباديل: عدد التراتيب المختلفة لمجموعة من العناصر مأخوذة كلها أو جزء منها في كل مرة
عددُ تباديل $ن$ من العناصر مأخوذةٌ جميعاً في كل مرة، هو $ن!$ ، ويُرمَزُ له بالرّمزِ ل($ن$،$ن$)،
حيث $ن \in ص^+$
ل($ن$،$ن$) = $ن!$ = $ن(ن - ١)(ن -٢)$ × .... × ٣ × ٢ × ١

نشاط ١

أجدُ قيمةَ: ل(٦،٦).
ل(٦،٦) = ٦ × ... × ... × ... × ... × ١ =٧٢٠
ل(٥،٥) = ... ماذا نلاحظ؟

نشاط ٢

أجدُ عددَ الأعداد المكوّنةِ من منزلتيْن، التي يمكنُ تكوينُها من مجموعة الأرقام:
{ ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ } ، إذا لم يُسمحْ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

ألاحظُ أنَّ المطلوبَ هو عددُ الترتيباتِ الثنائيّةِ لمجموعةِ الأرقامِ هذه، بشرط عدم التكرار،
ويساوي ....×....=....

وهذا ما يُسمَّى التباديلَ الثنائيّةَ لمجموعةٍ فيها ٥ عناصر، وبشكلٍ عام، فإنّ عددَ التباديلِ الرائيّةِ لمجموعةٍ مكوّنةٍ من ($ن$) من العناصر، ويُرمَزُ له بالرمز ل($ن$ ، $ر$)،

يساوي $\frac{ن!}{(ن - ر)!}$ حيث $ن$ ، $ر$ عددان طبيعيّان، $ن \geq ر$

نشاط ٣

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) ل(٥ ، ٣) = $\frac{٥!}{(٥ - ٣)!}$ = ...

ب) ل($ن$ ، ٣) = $\frac{ن!}{(ن - ٣)!}$ = ... = ...

أتعلمُ: يمكنُ كتابةُ ل(ن،ر) على الشكل: ن(ن−١)(ن−٢)(ن−٣)...(ن−ر+١).

نشاط ٤

أتحقّقُ ممّا يأتي:

أ) ل(ن ، ١) = $\frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - ١)!}$ = ... = ن

ب) ل(ن ، ٠) = ... = ١

جـ) ل(ن ، ن) = ... = ن!

نشاط ٥

بكم طريقةٍ يمكنُ تشكيلُ لجنةٍ مكوّنةٍ من رئيسٍ، ونائبِ رئيسٍ، وأمينِ سرٍّ من بين سبعة أشخاص ؟
عددُ الطرقِ التي يمكنُ تشكيلُ اللجنةِ بها هي:

ل(٧ ، ٣) = ... × ... × ... = ٢١٠ طرقٍ مختلفة.

تمارين ومسائل:

١) أحسبُ قيمةَ ما يأتي:

أ) ل(٦،٤) ب) $\frac{\text{ل}(٩،٢)}{\text{ل}(٩٠،٠)}$

٢) أرادَ أحمدُ وإخوانُه الثلاثةُ الذهابَ إلى المسجدِ الأقصى، واتفقوا على أنْ يدخلَ كلٌّ منهم من بابٍ مختلفٍ من أبوابِ القدسِ السبعةِ. بكم طريقةٍ مختلفةٍ يمكنُ للإخوةِ الأربعةِ الوصولُ إلى المسجد الأقصى؟

٣) أجدُ قيمةَ ن في كلٍّ ممّا يأتي:

أ) ل(ن ، ٢) = ٥٦ ب) ل(ن − ٣ ، ٢) = ٦

مهمة تقويمية:

أُعبِّرُ عن كلٍّ ممّا يأتي بالصورة ل(ن،ر) :

أ) ٩ × ٨ × ٥ × ٦ × ٧ ب) ٢٥٢٠ ج) ن(ن^{٢} − ٣ن + ٢)

(١٠) التوافيق (Combinations)

تعريف: عدد المجموعات الجزئية التي عناصرها ر مأخوذة من مجموعة عناصرها ن عدد التوافيق الرائيّةِ لمجموعة فيها ن من العناصر، ويُرمزُ له بالرّمز:

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \frac{\text{ل}(\text{ن}،\text{ر})}{\text{ر}!} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{ر})!\ \text{ر}!} \text{، } \text{ن} \geq \text{ر}$$

نشاط ١

لدى معرِضِ سيّاراتٍ ٦ أنواعٍ من السيارات، يريدُ صاحبُ المعرِضِ اختيارَ ٤ منها، لعرضها للزبائن. أجدُ عددَ الطرقِ التي يمكنُ بها الاختيار.

بما أنّ إعادة الترتيب لا تعطي نتيجة جديدة، أي أنّ الترتيبَ غيرُ مهم.

إذن: عددُ الطرق يساوي = $\binom{٦}{٤} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤!}{٢!٤!} =$ ......

أتعلم:

أ) $\binom{\text{ن}}{٠} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - ٠)!\ ٠!} = ١$ ب) $\binom{\text{ن}}{\text{ن}} = ١$

جـ) $\binom{\text{ن}}{١} = \text{ن}$ د) $\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \binom{\text{ن}}{\text{ن} - \text{ر}}$

تمارين ومسائل:

١) أحسبُ ما يأتي: أ) $\binom{٩}{٥}$ ب) $\binom{٩}{٤}$ جـ) $\binom{٧٥}{١}$

٢) أجدُ قيمَ ن في كلٍّ من الحالات الآتية: أ) $\binom{\text{ن}}{٢} = ٣$ ب) $\binom{\text{ن}}{٩} = \binom{\text{ن}}{٤}$

مهمة تقويمية:

١) بكم طريقةٍ يمكنُ تكوينُ فريقٍ لكرةِ السّلةِ، يتمُّ اختيارُه من بين ثمانية لاعبين ؟

٢) صفٌّ مكوّنٌ من ٩ طلابٍ، و٧ طالباتٍ، يُرادُ تشكيلُ لجنةٍ مكوّنةٍ من ٣ طلابٍ، و٤ طالباتٍ، بكم طريقةٍ مختلفةٍ يمكنُ تشكيلُ اللجنة ؟

(١١) نظريّةُ ذاتِ الحدّيْن (Binomial Theorem)

نظريّة ذات الحدّين:

$$(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}} = \sum_{\text{ر}=\text{٠}}^{\text{ن}} \binom{\text{ن}}{\text{ر}} \text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}}\ \text{ب}^{\text{ر}}$$

$$= \binom{\text{ن}}{\text{٠}} \text{أ}^{\text{ن}}\ \text{ب}^{\text{٠}} + \binom{\text{ن}}{\text{١}} \text{أ}^{\text{ن}-\text{١}}\ \text{ب}^{\text{١}} + \binom{\text{ن}}{\text{٢}} \text{أ}^{\text{ن}-\text{٢}}\ \text{ب}^{\text{٢}} + \ldots\ldots + \binom{\text{ن}}{\text{ن}} \text{أ}^{\text{٠}}\ \text{ب}^{\text{ن}}$$

حيث ن عدداً طبيعياً

نشاط ١

أجدُ مفكوكَ: $(\text{س} + \text{٢})^{\text{٥}}$

$$(\text{س} + \text{٢})^{\text{٥}} = \sum_{\text{ر}=\text{٠}}^{\text{٥}} \binom{\text{٥}}{\text{ر}} \text{س}^{\text{٥}-\text{ر}}\ \text{٢}^{\text{ر}}$$

$$= \text{س}^{\text{٥}} + \text{٥س}^{\text{٤}} \times \text{٢} + \text{١٠س}^{\text{٣}} \times \text{٤} + \text{١٠س}^{\text{٢}} \times \text{٨} + \text{٥س} \times \text{١٦} + \text{٣٢}$$

= ....

أستنتجُ:

- عددُ حدودِ مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}}$ = ...
- مجموعُ أُس أ وأس ب في أيّ حدٍّ من حدود المفكوك = ...

تمارين ومسائل

(١) أجُد مفكوكَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) $(\text{س} + \text{٣})^{\text{٦}}$

ب) $\left(\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٣}} + \frac{\text{٣}}{\text{س}}\right)^{\text{٤}}$ ج) $(\text{٢} - \text{س})^{\text{٥}}$

نموذج اختبار ذاتي

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

١) أحد الاقترانات الآتية اقتران أسي:

أ) (٢)^س ب) س^٢ ج) (-٣)^س د) (-١/٢)^س

٢) منحنى الاقتران ق(س)= (٢)^س -٣ :

أ) متزايد ويمر بالنقطة (٠، ١) ب) متناقص ويمر بالنقطة (٠ ، ١)

ج) متزايد ويمر بالنقطة (٠ ، -٢) د) متناقص ويمر بالنقطة (٠ ، -٢)

٣) إذا كان ن! = ٢٤ فإنّ ل(٢ن، ٣) =

أ) ٢٤ ب) ٥٠٤ ج) ٤ د) ٣٣٦

السؤال الثاني: أوجد قيمة ما يأتي:

١) لـو٢٠ + لـوه

٢) [١ - √٢]

٣) (٧ ٣) + (٧ ٤) - ل (٧ ، ١)

السؤال الثالث: إذا كان مجموع مربعاتٍ فرق الرتب للمتغيريْن (س،ص) لعينة حجمها ٦ يساوي ٢٤ احسب معامل ارتباط سبيرمان موضّحاً نوع الارتباط ومدى الارتباط.

السؤال الرابع:

أ) بالاعتماد على رسم ق(س)= هـ^س^ ارسم منحنى م (س)= - هـ^س^ - ٣ ،موضّحاً التحويلات الهندسية .

ب) الجدول الآتي يمثل العلاقة بين المتغيرين س ، ص ، بالاعتماد على الجدول أوجد.

- معامل ارتباط بيرسون

س	ص				
١-	٤				
٢-	٥				
١	٢				
٢	١				
٥	٢-				

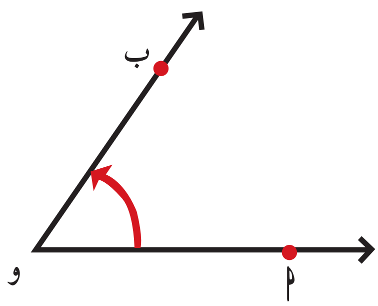
السؤال الخامس: أ) لديك المجموعة: س { ٢، ٣، ٥ ، ٤ ، ٧ } ، كم عدداً زوجياً مؤلفاً من ٣ منازل يمكن تكوينه من المجموعة س إذا لم يسمح بتكرار الرقم؟

ب) إذا كان ق (س)= أس + ب، وكان منحنى ق(س) يمر بالنقطة (٠ ،٣) ، وكان $\left(\frac{أ}{ب}\right)$ = ١٥

أوجد قيمة الثوابت أ ، ب .

(١) الزّاوية في الوضع القياسي
The Angle in Standard Position

نشاط ١



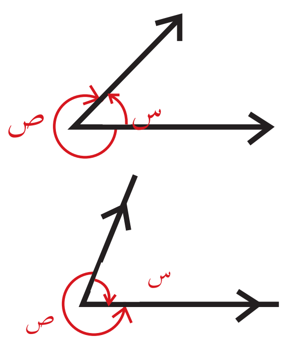
في الشكل المجاور

- ضلع الابتداء للزاوية ﺃ و ب هو: ......
- ضلع الانتهاء لها هو: .... ، لماذا ؟ ....
- اتّجاه حركة ضلع الابتداء لينطبق على ضلع الانتهاء هو: ......
- تُسمّى زاوية ﺃ و ب زاويةً موجّهة.

أتعلّم: الزاوية الموجّهة: هي زاويةٌ يتحدّد اتّجاهُها باتّجاه دوران ضلع الابتداء لينطبقَ على ضلع الانتهاء، وتكون الزاويةُ الموجّهة زاويةً موجبةً إذا كان اتّجاه الدوران عكس عقارب الساعة، وتكون الزاويةُ الموجّهة سالبةً إذا كان اتّجاه الدوران مع عقارب الساعة.

نشاط ٢

في الشكل المجاور:



∠س = ٦٠°،

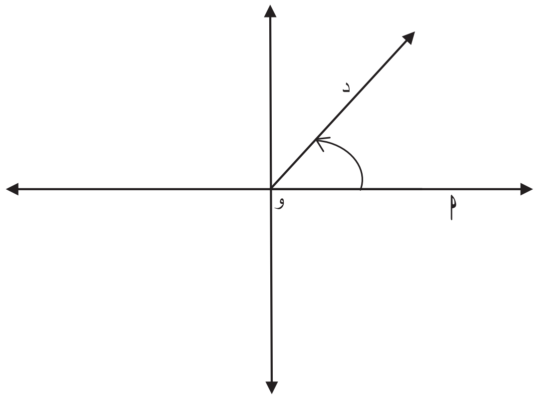
∠ص = ...

∠ص = ٢٨٠°، ∠س = ...

نشاط ٣

أُسمّي الزاوية الموجّهة في الشّكل ....

ضلع الابتداء لها هو و م ، ضلع الانتهاء لها هو: ....، رأس الزاوية هو: ....

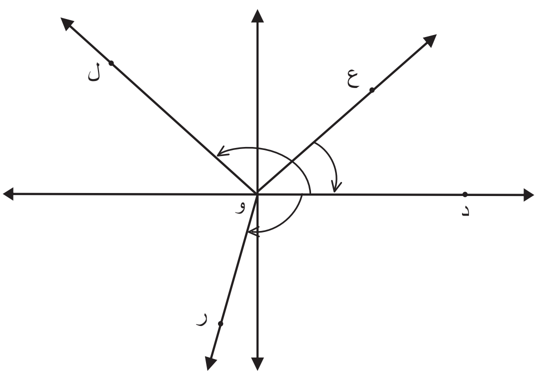


أتعلّم: تكون الزاويةُ في الوضع القياسي إذا كان رأسُها نقطةَ الأصل، وانطبق ضلعُ الابتداء على محور السّينات الموجب.

نشاط ٤

في الشكل المجاور: الزاوية الموجهة ع و د ليست في وضعٍ قياسيّ؛ لأنّ ....

- الزاوية الموجّهة .... في الوضع القياسي؛ لأنّ ....
- الزاوية الموجّهة د و ر في ....، لأنّ ....

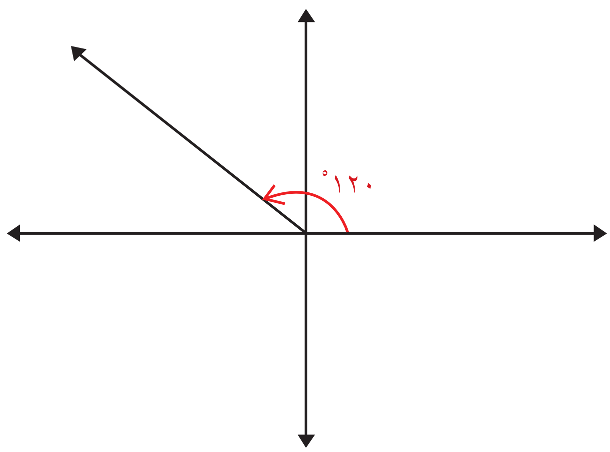


أستنتج أنّ:

- إذا كانت ∠هـ زاويةً في الوضع القياسيّ، وكان ٠° < ∡هـ < ٩٠°، فإنّ ضلع انتهائها يقع في الرّبع الأوّل.
- إذا كانت ∠هـ في الوضع القياسيّ، وكان ..... < ∡هـ < ......، فإنّ ضلعَ انتهائها يقع في الرّبع الثاني.

نشاط ٥

أرسمُ الزّوايا التي قياسها ١٢٠° ، ٢٢٥° ، -٣٠٠° ، -٦٠° في الوضع القياسي، ثم أحدّدُ الربع الذي تقع فيه:



تقع الزّاوية التي قياسها ١٢٠° في الربع ....

بينما تقع الزّاوية التي قياسها ٢٢٥° في الربع ....

تقع الزّاوية التي قياسها – ٣٠٠° في الربع ....

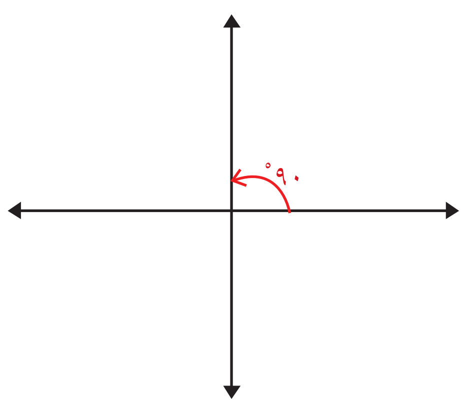
تقع الزّاوية -٦٠° في الربع ....

أتعلّم: عند رسم زاويةٍ في الوضع القياسي فإنّ ضلعَ انتهائها يحدّدُ موقعَها في المستوى الديكارتي.

نشاط ٦

أرسمُ الزّوايا التي قياسها:

٩٠°، ١٨٠°، -٩٠°.



ينطبق ضلعُ انتهاء الزّاوية التي قياسها ٩٠° على محور ....

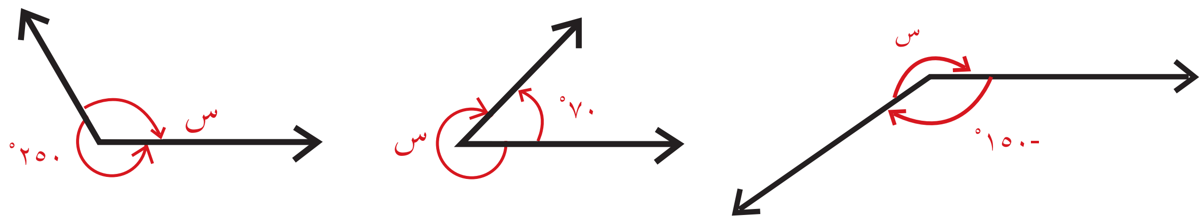
بينما ينطبق ضلعُ انتهاء الزّاوية التي قياسها ١٨٠° على ....، أما ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها -٩٠° فينطبق على ....

تُسمّى الزّاوية التي في الوضع القياسي، وينطبق ضلعُ انتهائها على أحد المحاور الإحداثيّة زاويةً رُبعيّةً.

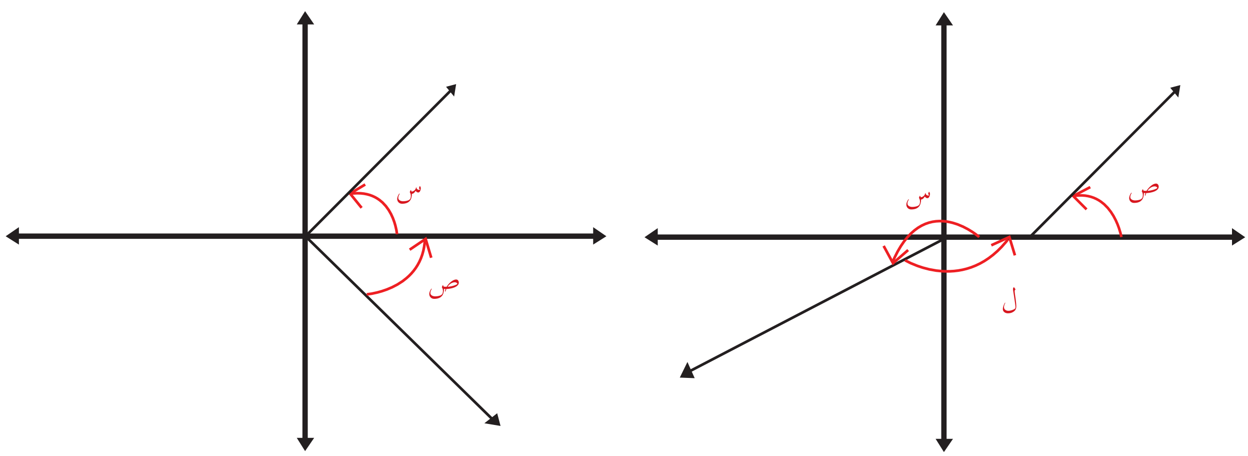
أعطِ ثلاثة أمثلة لزوايا ربعيّة: ....، ....، ....

تمارين ومسائل:

(١) ما قيمةُ س التي تُمثّل قياس الزاوية في كلٍّ من الأشكال الآتية:



(٢) أميّزُ الزّوايا التي في الوضع القياسي:



(٣) أُحدّدُ الرّبع من المستوى الذي تقع فيه الزّوايا الآتية:

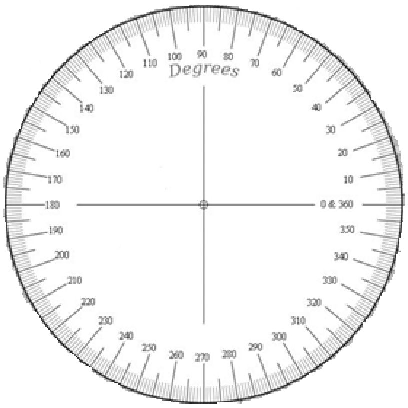
-١٢٠° ، ١٣٠° ، -٢٥٠° ، ٣٢٠° ، ٤٥٠°

قياس الزوايا
Angles and their Measurements

(٢)

نشاط ١

في الشّكل المجاور، تمّ تقسيمُ الدائرة إلى ٣٦٠ قوساً متساوياً في الطّول، فانّ الزاوية المركزيّة التي تقابل كلُّ قوسٍ، قياسها ١°. والزاوية التي تقابل ٥٠ قوساً يكون قياسها ....°.



والدرجة الواحدة تقسم إلى ٦٠ جزءاً أصغر منها، وهو الدقيقة،

وتُكتَبُ على الصورة: ١° = (...)´

والدقيقة الواحدة تُقسم إلى ٦٠ جزءاً أصغر منها، وهو الثانية، وتُكتَبُ على الصورة: ١´ = ٦٠´´

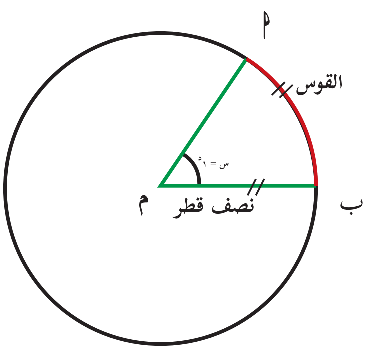
الزّاوية ٣٢,٦° = ٣٢° و ٠,٦ × ٦٠´ = (...)´ = ٣٢° ٣٦´

يُسمى قياسُ الزّاوية بالدرجات والدقائق والثواني القياسَ الستيني للزّاوية.

أفكر: لماذا سُمِّي القياسُ الستيني بهذا الاسم؟

نشاط ٢

في الشكل المجاور، دائرةٌ مركزها م ونصفُ قطرِها وحدة واحدة.



طول القوس أ ب = طول نصف قطر الدائرة

طول القوس الذي يقابل الزاوية المركزية التي قياسها (س) في الشكل = ...

أتعلم: يكون قياس الزاوية س بالقياس الدائري = ١ راديان (Radian) ونرمز له بالرمز ١ء

تعريف: الزّاوية النصف قطريّة: هي زاويةٌ مركزيّةٌ في دائرةٍ يقابلها قوسٌ طولُه يساوي طولَ نصفِ قطرِ الدائرة، ويُرمَزُ لها بالرمز (١ء)، وهي وحدة قياس الزاوية بالقياس الدائري للزّوايا.

نشاط ٣

محيط الدائرة =٢ نق π ⟵ محيط دائرة الوحدة = ...

الدورة الكاملة = ٣٦٠° يقابلها ٢ $\pi^{\text{د}}$

⟵ $\pi^{\text{د}}$ يقابلها .... درجة

باستخدام التقريب (π = ٣,١٤) نستنتج أنّ: ١ د = ٥٧,٣ °

أُكمل: ٣ د = ...° ، ١,٥ د = ...°

نشاط ٤

أوّلاً: أُحوّلُ قياس الزّوايا الآتية من درجات إلى زاوية نصف قطرية (راديان):

٩٠° ، ١٢٠° ، -٢٢٥ °

- ٩٠° :

للتحويل من درجات إلى دائري: $\pi^{\text{د}}$ يقابلها ١٨٠°

٩٠ درجة ⟵ هـ بالتقدير الدائري

$$\text{هـ} = \frac{٩٠^\circ}{١٨٠^\circ} \times \pi^{\text{د}} = \frac{١}{٢}\pi^{\text{د}}$$

- $١٢٠^\circ = \frac{١٢٠^\circ}{١٨٠^\circ} \times \pi^{\text{د}} =$ ....
- -٢٢٥° = ...

ثانياً: أُحوّل قياس الزّوايا من دائري إلى درجات:

$$\frac{٥}{٦}\pi^{\text{د}} ،\ \frac{٣}{٤}\pi^{\text{د}} ،\ -\frac{١٥}{١٨}\pi^{\text{د}}$$

للتحويل من دائري إلى درجات: $\pi^{\text{د}}$ يقابلها ١٨٠°

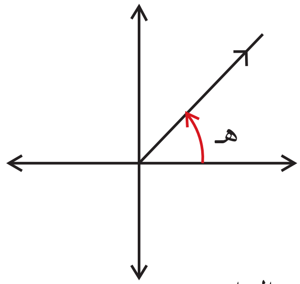
$\frac{٥}{٦}\pi^{\text{د}}$ ⟵ س بالدرجات.

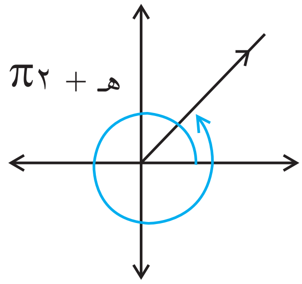
$$\text{س} = \frac{٥}{٦}\pi^{\text{د}} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi^{\text{د}}} = ١٥٠^\circ$$

أتعلم: يُقال لزاويتيْن أنّهما متكافئتان: إذا كان لهما ضلع الابتداء نفسه، وضلع الانتهاء نفسه.

في الشكل المجاور:

∠هـ تكافئ ∠هـ + ٢π





وبشكلٍ عام:

∠هـ تكافئ ∠هـ + ٢ن π ، ∀ هـ بالقياس الدائري.

∠هـ تكافئ ∠هـ + ٣٦٠ ن ، ∀ هـ بالقياس الستيني ، حيث ن عدد صحيح.

نشاط ٦

أجدُ ثلاث زوايا مكافئة لكلٍّ من الزوايا التي قياسها: ٦٠°، π/٤ د .

الزاوية التي قياسها ٦٠° تكافئ الزاوية التي قياسها ٦٠° + ٣٦٠° = ٤٢٠°، ن = ١

الزاوية التي قياسها ٦٠° تكافئ الزاوية التي قياسها ٦٠° + ٣٦٠° × ٢ = ...، ن = ٢

الزاوية التي قياسها ٦٠° تكافئ الزاوية التي قياسها ٦٠° + ٣٦٠° × -١ = ...، ن = ...

الزاوية التي قياسها π/٤ د تكافئ .... عندما ن = ١

الزاوية التي قياسها π/٤ د تكافئ -٧π/٤ د عندما ن = ...

تمارين ومسائل:

(١) أ) أحوّل القياسات الآتية من الدرجات إلى راديان:

٢٤٠° ، -٩٠° ، ٤٢٠° ، -١٣٥°

ب) أحوّل القياسات الآتية من راديان إلى درجات:

٥π/٦ ، ٢π/٣ ، -١١π/٢١ ، -π/٤ ، ٢,٥ د

(٢) أوجد ثلاث زوايا تكافئ الزاوية التي قياسها ٥٠°.

مهمة تقويمية:

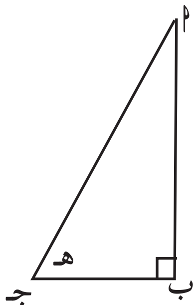
- أوجد ثلاث زوايا تكافئ الزاوية التي قياسها π/٤ د

- أعطي زاويتين قياس احداهما موجب والآخر سالب مكافئتين لكل من الزوايا التي قياسها: - π/٣ د ، ١٢٠° .

الاقترانات المثلثية (٣)

Trigonometric Functions

نشاط ١



في المثلث القائم الزاوية ﺃ ب جـ ، النسب المثلثية للزاوية الحادة التي قياسها هـ

جاهـ = $\frac{\text{ﺃب}}{\text{ﺃجـ}}$ ، جتاهـ = ... ، ظاهـ = ...

أفكر

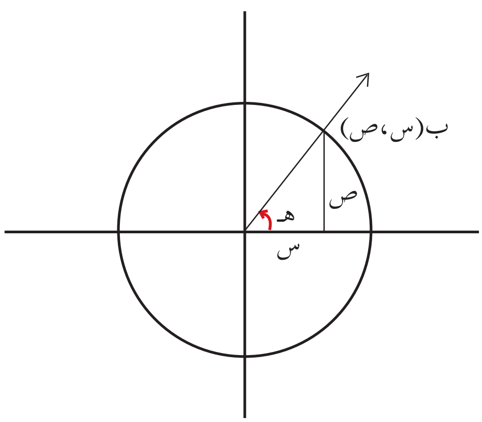
هل يمكن إيجاد النسب المثلثية للزوايا التي قياسها أكبر من ٩٠°، أو قياسها سالب؟

أتعلّم: الدائرةُ التي مركزُها نقطةُ الأصل، وطولُ نصفِ قطرها وحدة واحدة، تُسمَّى دائرةَ الوحدة.

معادلة دائرة الوحدة: س^{٢} + ص^{٢} = ١

نشاط ٢

لتكنْ هـ زاوية في الوضع القياسي، إذا قطع ضلعُ انتهائها دائرةَ الوحدة في النقطة ب (س،ص). أجدُ النسب المثلثيّة الأساسيّة للزّاوية هـ.



جاهـ = $\frac{\text{ص}}{١}$ = ص ، جتاهـ = ... ،

ظاهـ = ...

بشكلٍ عام: إحداثيّات النقطة ب (جتاهـ ، جاهـ).

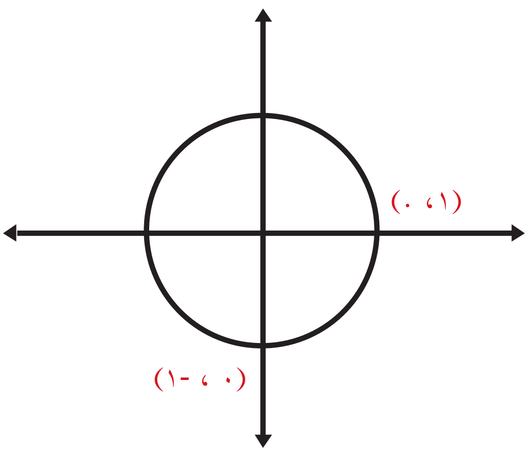
أتعلّم: إذا قطع ضلعُ انتهاءِ الزاويّة هـ في الوضع القياسي دائرةَ الوحدة في النقطة ب (س،ص)، فإنّه يمكن تعريفُ الاقترانات المثلثية جاهـ = ص ، جتاهـ = س، ظاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠ وتُسمّى هذه الاقترانات، الاقتراناتِ المثلثية الأساسيّة للزّاوية هـ.

ملاحظة: إذا كانت النقطة ب (س ، ص) تقع على دائرة الوحدة،

فإن -١ ≤س ≤١، و -١ ≤ص ≤١ ، وعليه فإن -١ ≤ جتاهـ ≤ ١ و -١ ≤ جاهـ ≤ ١

نشاط ٣

أجدُ الاقترانات المثلثية للزّوايا الربعيّة:
٠°، ٩٠°، ٢٧٠° .



- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (١،٠)، وينتج جا٠°= ....، جتا٠°=.......، ظا٠°= ....
- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٩٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (.....، ....)، وينتج جا٩٠°= .... ، جتا٩٠°=.......، ظا٩٠°= ....
- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٢٧٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (.....، ....)، وينتج جا٢٧٠°= .... ، جتا٢٧٠°=.......، ظا٢٧٠°= ....

- أُكملُ الجدول الآتي:

قياس الزّاوية الربعية (س°)	جاس	جتاس	ظاس
صفر	صفر		
٩٠°			
١٨٠°		-١	صفر
٢٧٠°			
٣٦٠°		١	٠

نشاط ٤

إذا قطع ضلعُ انتهاء الزاوية التي قياسها هـ° دائرةَ الوحدة في النقطة أ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ، \frac{1}{2}\right)$ فإنّ:

- جاهـ $= \frac{1}{2}$ ؛ لأن الإحداثي الصادي لنقطة تقاطع ضلع انتهائها هو ....

جتا هـ = ... ؛ لأنّ: ....

ظاهـ = ...

نشاط ٥

- أرسم دائرة الوحدة
- أرسم زاويةً قياسها هـ° في الوضع القياسي
- نقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية مع الدائرة هي النقطة أ (س ، ص).
- تكون إشارةُ س موجبةً، إذا وقعت النقطة أ في الربع ....، أو الربع .... من المستوى.
- تكون إشارةُ ص موجبة، إذا وقعت النقطة أ في الربع ....، أو الربع ....من المستوى.

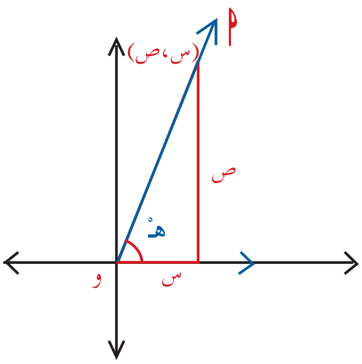
أتعلَّمُ: تتحدد إشارة الاقترانات المثلثية للزاوية هـ حسب الربع الذي تقع فيه.

إذا كانت هـ زاويةً في الوضع القياسي، النقطة أ (س ، ص) تقع على ضلع انتهائها، بعد النقطة أ (س ، ص) عن نقطة الاصل = ...

جاهـ، جاهـ $= \frac{ص}{ر}$

جتاهـ $= \frac{س}{ر}$

ظاهـ $= \frac{ص}{س}$ ، س $\neq$ صفر



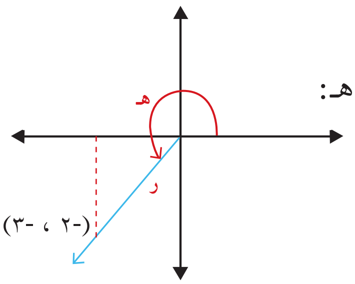
نشاط ٦

في الشكل المجاور، أجدُ قيم الاقترانات المثلثيّة جاهـ ، جتاهـ ، ظاهـ:

ر = ...

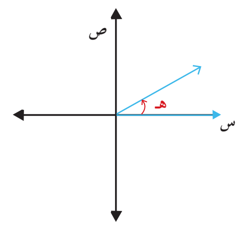
جاهـ = ... ، جتاهـ ....

ظاهـ = ...

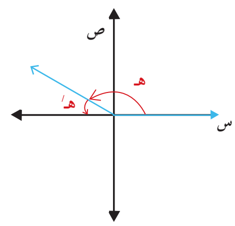


نشاط ٧

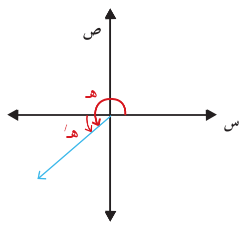
لكلِّ زاويةٍ قياسها هـ درجة في المستوى زاويةُ اسنادٍ قياسها هـَ درجة، أُكمل:



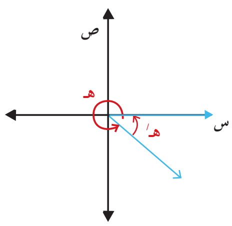
هـَ = هـ



هـَ = ...



هـَ = هـ – ١٨٠°



هـَ = ...

أتعلم: زاوية إسناد الزاوية (هـ): هي الزّاوية الحادّة (> هـَ) الناتجة من إتحاد ضلع انتهاء الزاوية (> هـ) ومحور السينات.

قيمُ الاقترانات المثلثيّة لزاويةِ الإسناد هي ذاتها قيمُ الاقترانات المثلثيّة للزّاوية الأساسيّة، بينما تحدّدُ إشارة تلك القيمة موضعَ ضلع انتهاء الزّاوية الاساسيّة.

نشاط ٨

أتذكّر قيمَ الاقترانات المثلثيّة للزّوايا الخاصّة، وأُكمل الجدول الآتي:

قياس الزاوية (س)	جاس	جتاس	ظاس
٣٠°	٠,٥		
٤٥°			١
٦٠°			$\sqrt{٣}$

نشاط ٩

أوّلاً: أجد قيمة جا ١٢٠°

الحل: الزاوية في الوضع القياسي والتي قياسها ١٢٠° تقع في الربع ....

إشارة جا١٢٠° موجب.

قياس زاوية الإسناد هـ = ١٨٠° – ١٢٠° = ...

جا١٢٠° = جا٦٠° =

ثانياً: أجد قيمة جتا ٢٤٠°

الحل: الزاوية في الوضع القياسي، التي قياسها ٢٤٠° تقع في الربع ....

إذن: إشارة جتا ٢٤٠°..................

قياس زاوية الإسناد (هـَ) = ...

إذن: جتا٢٤٠° = - جتا.....° = ...

نشاط ١٠

أجدُ جا -٣٠°

الزاوية في الوضع القياسي، التي قياسها -٣٠° تقع في الربع .... ،

إشارة جا -٣٠° هي: ......

قياس زاوية الإسناد (هـَ) = ...

جا -٣٠° = ... = ...

• أجد ظا $\frac{٣\pi}{٤}^{د}$

الزاوية في الوضع القياسي، التي قياسها $\frac{٣\pi}{٤}^{د}$ تقع في الربع .... ،

إشارة ظا $\frac{٣\pi}{٤}^{د}$ هي: ....

قياس زاوية الإسناد (هـَ) = ... ، إذن: ظا $\frac{٣\pi}{٤}^{د}$ = ... = ...

نشاط ١١

أجد قيمة ٢جا ٣٠°جتا ٣٠° وأقارنه بقيمة جا ٦٠°

٢جا ٣٠°جتا ٣٠° = ٢ × ...... × ..... = ...

جا ٦٠° = ... ماذا تلاحظ؟

أجد:

- ٢جا ٤٥°جتا ٤٥° = ٢ × ..... × ..... = ...
- جا ٩٠° = ... ماذا تلاحظ؟ ماذا تلاحظ؟

أستنتج أن: جا٢أ = ٢جاأجتاأ

نشاط ١٢

أجد قيمة جتا٣٠°^{٢} _ جا٣٠°^{٢} وأقارنه بقيمة جتا٦٠°

جتا٣٠°^{٢} _ جا٣٠°^{٢} = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ _ $(\ldots)^{٢}$

جتا٦٠° = ... ماذا تلاحظ؟

نشاط ١٣

أجد ناتج جتا^{٢} ١٥° _ جا^{٢} ١٥° دون استخدام الحاسبة

جتا^{٢} ١٥° _ جا^{٢} ١٥° = جتا..... = ...

أستنتج أن: جتا٢أ = جتا^{٢}أ _ جا^{٢}أ ، جتا٢أ = ٢جتا^{٢}أ _ ١ ، جتا٢أ = ١ _ ٢جا^{٢}أ

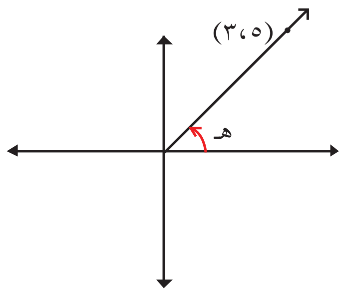
تمارين ومسائل:

(١) أجدُ قيمةَ الاقترانات المثلثية الأساسيّة لقياسات الزّوايا الآتية:

-٩٠° ، ٤٥٠° ، $٥\pi^{د}$

(٢) أجدُ قيمةَ الاقترانات المثلثية الأساسيّة للزاوية هـ ، إذا قطع ضلعُ انتهائها دائرةَ الوحدة في النقطة:

أ) ($\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$) ، ب (-١ ، ٠) ، جـ (- $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)



(٣) ما قيمةُ جا هـ ، جتا هـ، ظا هـ في الشّكل المجاور؟

(٤) أحدّدُ إشارةَ ما يأتي:

جتا -١٣٥° ، ظا ٨٤٠° ، جتا $\frac{٢\pi}{٣}^{د}$ ، ظا $\frac{٣\pi}{٤}^{د}$

(٥) أجد قيمة ما يلي دون استخدام الحاسبة ٢جتا^{٢} ٢٢,٥° − ١

مهمة تقويمية:

(١) أجد قيمة ما يلي دون استخدام الحاسبة

أ) ١ − ٢ جا^{٢} $\frac{\pi}{٦}^{د}$ ب) ٦جا $\frac{\pi}{١٢}^{د}$ جتا $\frac{\pi}{١٢}^{د}$

(٢) أجدُ قياسَ زاوية الإسناد للزّوايا التي قياساتها ما يأتي:

٢٢٥° ، $\frac{٢\pi}{٣}^{د}$ ، -١٥٠° ، $\frac{٣\pi}{٤}^{د}$ ، ٢١٠°

(٧) أجدُ قيمة ما يأتي، دون استخدام الآلة الحاسبة:

جا ٣٣٠°، ، جا -٣٠٠°

تمثيل الاقترانات المثلثية بيانيّاً
Graphing Trigonometric Functions

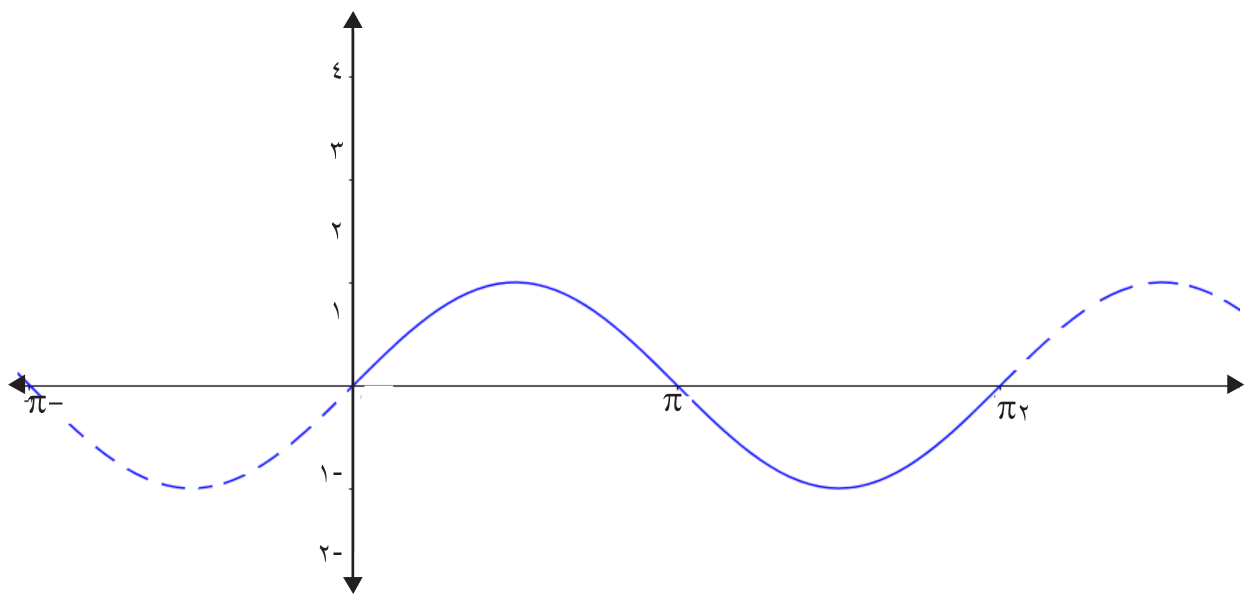
(٤)

نشاط ١

أُمثّلُ الاقتران ق(س)= جاس في المستوى الديكارتي، أكملُ الجدولَ الآتي:

قياس الزاوية س	$-\pi$	$-\frac{\pi}{٢}$	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	π	$\frac{٥\pi}{٤}$	$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
ق(س)= جا س		١-	...	...	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	...	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	...	...	١-	...	...

أُعيّنُ النّقاط من الجدول، وأرسمُ منحنى الاقتران:



أُلاحظ شكل المنحنى، وأستنتج خصائصه.

- بما أنّ الزّوايا المتكافئة لها النسبُ المثلثيّةُ المناظرة نفسها، فإنّ منحنى ق(س) =جا س يكرّرُ نفسه في فتراتٍ متساوية، طولُ كلٍّ منها ٢π. ومثل هذه الاقترانات تُسمّى اقتراناتٍ دوريّةً، ومقدار

دورة هـذا الاقتـران = ٢π

- مجال الاقتران ق(س) =جا س هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة ح، ومداه هو [-١، ١]
- أكبرُ قيمةٍ للاقتران = ... وأصغر قيمةٍ له = ...

- مثل هذه الاقترانات لها سعةٌ، وتُعرف سعة الاقتران = $\frac{\text{أكبر قيمة له – أصغر قيمة له}}{٢}$

وعليه فإنّ: سعة الاقتران ق(س) = جا س = $\frac{١ - {}^{-}١}{٢} = ١$

نشاط ٢

أُمثّل الاقتران: ق(س) = جتاس في المستوى الديكارتي، س ∋ ح .
أُكمل الجدول الآتي:

قياس الزاوية س	$-\pi$	$-\frac{\pi}{٢}$	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	π	$\frac{٥\pi}{٤}$	$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
ق(س)= جتا س	-١	...	...	...	...	...	٠	$-\frac{١}{٢}$	-١	...	...	...	

أُعيّن النقاط من الجدول، وأرسمُ منحنى الاقتران.

ألاحظُ شكل المنحنى، وأستنتج خصائصه:

- مجال الاقتران ق(س) = جتا س هو ....، ومداه ....
- أكبر قيمةٍ للاقتران = ...، وأصغر قيمةٍ له = ...
- الاقتران ق (س) = جتا س اقتران دوري، دورته = ...
- سعة الاقتران = $\frac{\text{أكبر قيمة له – أصغر قيمة له}}{٢}$ = ...

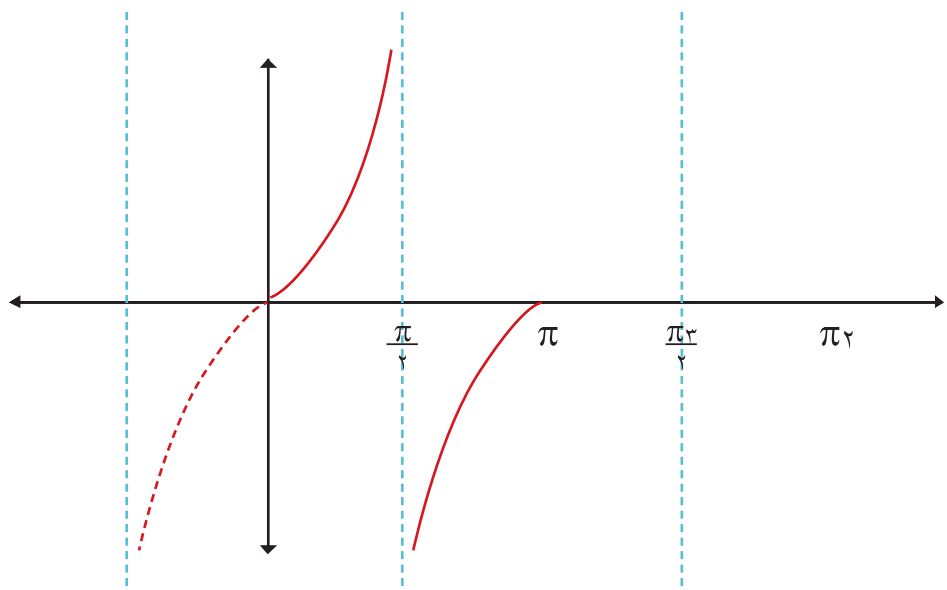
نشاط ٣

أمثل الاقتران ق(س) = ظا س في المستوى الديكارتي.

أُكملُ الجدول الآتي:

قياس الزاوية س	$-\pi$	$-\frac{\pi}{٢}$	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	π	$\frac{٤\pi}{٣}$	$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
ق (س) = ظا س	...	...	صفر	...	١	...	...	...	...	$\sqrt{٣}$	...	$-\frac{١}{\sqrt{٣}}$	...

أُعيّنُ النّقاط من الجدول، وأُكملُ رسم منحنى الاقتران.



ألاحظ شكل المنحنى، وأُدوّن خصائصه:

مجال ق(س) = ظاس هو مجموعةُ جميع الأعداد الحقيقيّة، ما عدا .... ، ومداه هو: ح

دورته = ...

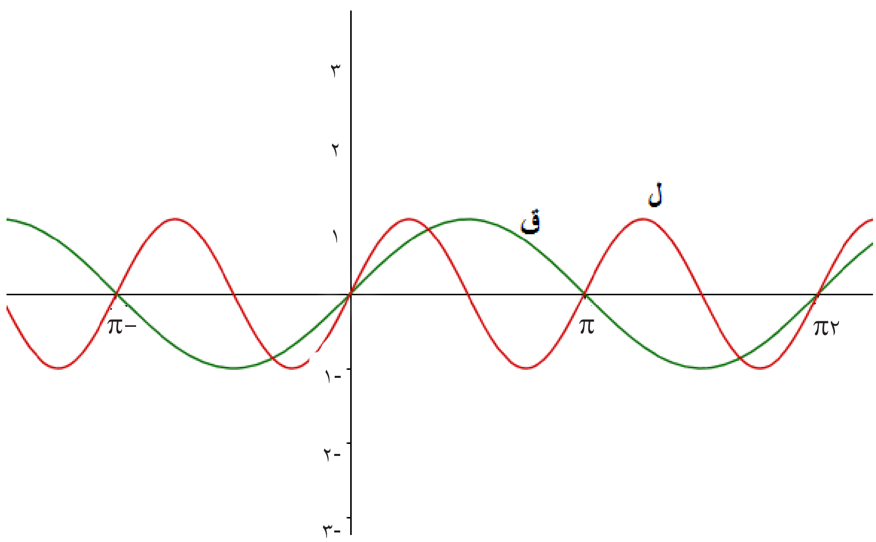
نشاط ٤

أُمثّلُ منحنى الاقتران ق(س) = جاس، ل(س) = جا٢س على المستوى البياني نفسه، ثم أجدُ السّعة والدورة لِلاقتران ل(س).

أُكملُ الجدول الآتي:

قياس الزاوية س	π-	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	π	$\frac{٥\pi}{٤}$	$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
ل (س)= جا٢س	...	صفر	...	...	...	...	$-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	...	١	...	...	...

أُعيّنُ النّقاط في المستوى الديكارتي، وأُلاحظُ التمثيل البياني للمنحنى:



من التمثيل البياني لمنحنى ل(س)، ألاحظُ أنّ دورة الاقتران ل(س) هي: ....

بينما سعته =........................ ، مدى الاقتران ل =........................

أستنتج: الاقتران الدوري ق(س) = ﺃ جا (ب س) + جـ ، او الاقتران هـ(س) = ﺃجتا (ب س) + جـ

حيث: ﺃ ، ب ، جـ أعداد حقيقيّة ، ﺃ ، ب ≠ .

فتكون: دورة الاقتران = $\frac{2\pi}{|ب|}$

سعة الاقتران = | أ |

مدى الاقتران = [- | أ | + جـ ، | أ | + جـ]

نشاط ٥

لديك الاقتران ق(س) = ٢ جتا $\frac{س}{٢}$ − ٣، أجدُ دورته، سعته، ومداه، دون تمثيله بيانيّاً.

دورة الاقتران = $\frac{2\pi}{|ب|}$ = ... ، سعة الاقتران = ...

مجال الاقتران = ... ، مدى الاقتران = ...

تمارين ومسائل:

(١) أُمثّلُ منحنيات الاقترانات المثلثية الآتية:

- ق(س) = جا س + ٢ ، ل(س) = جتا ٢س ـ ١ ، م(س) = جتا (-س)
- ع(س) = ظاس + ١ ، ك(س) = جا (س + π)

(٢) أجدُ: أكبرَ قيمة وأصغرَ قيمة (إن وجدت)، السعة، الدورة لكلٍّ من الاقترانات الواردة في السؤال الأوّل.

(٣) أجدُ: دورة، وسعة، ومدى الاقتران: ق(س) = -٣ جتا ($\frac{س}{٢}$)، دون تمثيله بيانيّاً.

مهمة تقويمية:

أ) أرسم منحنى الاقتران ق(س) = جتاس، وعلى المستوى الديكارتي نفسه أرسمُ منحنى الاقتران ل (س) = جا (س + $\frac{\pi}{٢}$)، ماذا تلاحظ؟

ب) أرسمُ منحنى الاقتران ق(س) = جاس، وعلى المستوى الديكارتي نفسه أرسمُ منحنى الاقتران ل (س) = جتا (س − $\frac{\pi}{٢}$)، ماذا تلاحظ؟

(٥) المتطابقات والمعادلات المثلثيّة
(Trigonometric Identities and Equations)

معادلة دائرة الوحدة س^{٢} + ص^{٢} =١، النقطة ب تقع على الدائرة، إذن: تحقّقُ معادلتها وينتج أنّ:
جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١، مثل هذه العلاقة صحيحة لأيّة زاوية هـ، وتُسمّى متطابقة.
جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١

أتعلّم: المتطابقة المثلثيّة هي معادلة بمتغير تحتوي اقتراناً مثلثياً، وتكون صائبة لجميع قيم المتغيّر.

أستنتج أنّ: جا^{٢} هـ = ١ – جتا^{٢} هـ ، جتا^{٢} هـ = ١ – جا^{٢} هـ ، وضّح ذلك.

نشاط ١

زاويةٌ قياسها س درجة بحيث جا س = $\frac{٣}{٥}$ ، أجدُ جتا س، ظا س.

- جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١
- $(\frac{٣}{٥})^{٢}$ + جتا^{٢} س = ١
- جتا^{٢} س = ١ – .... = ... ، جتا س = ...
- ظا س = ...

نشاط ٢

باستخدام المتطابقة جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١، أثبت أنّ:

- ظا^{٢}هـ + ١ = قا^{٢}هـ صحيحة لأيّة زاوية.

نقسم طرفيّ المتطابقة على جتا^{٢}هـ.
وينتج أنّ: ....، حيث إنّ جتاهـ ≠ .

- بنفس الطريقة اثبت أن ظتا^{٢}هـ + ١ = قتا^{٢}هـ صحيحة لأيّة زاوية.

نشاط ٣

أثبتُ صحّة المتطابقة $\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{١ - \text{جتا س}}$ = ١ + جتا س ، جتا س ≠ ١
الطرف الأيمن = ...
أضربُ البسط والمقام في (١ + جتا س)
أستبدل (١ – جتا^{٢} س) بـ جا^{٢} س
أختصرُ البسط والمقام بالقسمة على جا^{٢} س
أقارنُ النتيجةَ بالطرف الأيسر من المتطابقة الأصليّة.

نشاط ٤

أثبتُ صحّة المتطابقة: جتا^٢^هـ – جا^٢^هـ = ١ – ٢جا^٢^هـ

الطرف الأيمن: من المتطابقة جا^٢^ س + جتا^٢^ س = ١، ينتج أنّ: جتا^٢^ هـ = ١ – جا^٢^ هـ

(١ – جا^٢^ هـ) – جا^٢^ هـ = ... = الطرف الأيسر / وهو المطلوب.

نشاط ٥

أثبت أنّ: $\dfrac{\text{١ + ظا}^٢\text{هـ}}{\text{١ + ظتا}^٢\text{هـ}}$ = ظا^٢^هـ

الطرف الأيمن: $\dfrac{\text{١ + ظا}^٢\text{هـ}}{\text{١ + ظتا}^٢\text{هـ}} = \dfrac{\text{قا}^٢\text{هـ}}{\text{قتا}^٢\text{هـ}}$ = ...

ملاحظة: لإثبات صحّة المتطابقة، يمكن البدءُ بأحد الطرفيْن، والوصول إلى الطرف الآخر، ويمكن البدءُ بكلا الطرفين، والوصول إلى مقداريْن متساوييْن.

تسمى الجملة المفتوحة التي تحتوي اقتراناً مثلثياً وتكون صائبة لبعض القيم الحقيقية معادلة مثلثية.

أتذكّر: إذا كان س ، ص قياسيْن لزاويتيْن متتامتيْن فإنّ: جاس = جتا ص.

نشاط ٦

أحلّ المعادلة المثلثيّة: جا (٢س + ٣٠) = جتا ٤س ، صفر ≤ س ≤ ٩٠°.

٢س + ٣٠ + ٤س = ...

٦س = ...، إذن س = ...°

مثال (١): أجدُ مجموعة حلّ المعادلة:

جتا^٢^س + ٢جتاس – ٣ = صفر ، صفر ≤ س ≤ ٢ π

جتا^٢^س + ٢جتاس – ٣ = صفر

(جتاس +٣) (جتا س – ١) = صفر

إذن: جتا س + ٣ = صفر ⟵ جتا س = -٣ (تُرفض)، لماذا ؟

أو جتا س = ١ ⟵ س = ٠ أو س = π ⟵ مجموعة الحلّ = {٠، π}

نشاط ٧

أجدُ مجموعةَ حلّ المعادلة:

جا س جتا س − $\frac{١}{٢}$ جا س = صفر ، صفر ≤ س ≤ ٢ π

جا س جتا س − $\frac{١}{٢}$ جا س = صفر ، ⟵ (جا س) (... − ...) = صفر

إذن: جا س = صفر، س زاوية ربعية، ⟵ س = صفر، ⟵ أو س =.... ، أو س = ...

جتاس − $\frac{١}{٢}$ = صفر ، جتا س = ... ، زاوية الإسناد = ...

جتا س قيمة موجبة ⟵ تقع الزاوية في الربع .... ، أو الربع ......

إذن: س = ... ، أو س = ...

مجموعة الحل= ....

تمارين ومسائل:

(١) أثبتْ صحّةَ المتطابقات الآتية:

أ) (جا س + جتا س)^{٢} = ١ + جا٢س

ب) $\frac{١ - جتاس}{١ + جتاس} = \left(\frac{١ - جتاس}{جا س}\right)^{٢}$

جـ) $\frac{١ - جتا٢هـ}{١ + جتا٢هـ}$ = ظا^{٢}هـ

(٢) ما مجموعة حلّ كل من المعادلات الآتية، حيث:صفر ≤ س ≤ ٢ π ؟

أ) ٢ جتا^{٢} س − ١ = صفر

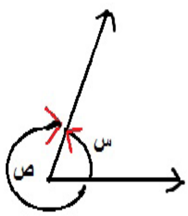
ب) ٢ جا^{٢} س + جا س = صفر

جـ) ظا^{٢} س + ١ = ٢

ورقة عمل

السؤال الأوّل:

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:



(١) ما قيم س ، ص الممكنة في الشكل المجاور؟

أ) (٣٠٠° ، ٦٠°)   ب) (٦٠°، -٣٠٠°)   ج) (-٦٠° ، ٣٠٠°)   د) (-٦٠°، -٣٠٠°)

(٢) أي القياسات الآتية قياسٌ لزاوية ربعيّة ؟

أ) ١٢٠°   ب) ١٩٠°   ج) ٣٠٠°   د) ٣٦٠ °

(٣) أي القياسات الآتية قياسٌ لزاويةٍ مكافئةٍ للزاوية التي قياسها ١٣٥° ؟

أ) -٢٢٥°   ب) ٢٢٥°   ج) -١٣٥°   د) ٤٥°

(٤) ما قياس زاوية الإسناد للزاوية التي قياسها ٢٠٠ °:

أ) ١٦٠°   ب) -٦٠°   ج) ٢٠°   د) -٢٠°

(٥) زاوية قياسها $\left(\frac{٣\pi}{٥}\right)^{د}$ ، ما قيمة قياسها بالدرجات؟

أ) ٢١٦°   ب) ٥٤°   ج) ١٠٨°   د) ٣٤,٤ °

(٦) زاوية قياسها ٣١٥°، ما قياسها بالراديان؟

أ) $\frac{٧\pi}{٨}$ ب) $\frac{٧\pi}{٤}$ ج) $\frac{٣١٥\pi}{٣٦٠}$ د) $\frac{٤\pi}{٧}$

(٧) إذا كان ظاس= $\frac{٦}{٨}$ ، فما قيمةُ جا س ؟

أ) ٦   ب) $\frac{٣}{٥}$ ج) $\frac{٨}{١٠}$ د) ٨

(٨) ما سعة الاقتران: ق(س) = ٢جتا ٣س − ١ ؟

أ) ٢　　ب) ٣　　جـ) -١　　د) ١

(٩) ما دورة الاقتران: ل(س) = ٣جا ٢س + ١ ؟

أ) ٢π　　ب) π　　جـ) $(\frac{٢}{٣})\pi$　　د) $(\frac{٣}{٢})\pi$

السؤال الثاني:

ما قيمة ما يأتي:

أ) جا -٢٤٠°　　ب) جتا - $\frac{٧\pi}{٤}$　　جـ) ظا ٣٣٠°　　د) جا ٤٠٥° ؟

السؤال الثالث:

أُبيّنْ خطأَ كلٍّ من العبارات الآتية:

أ) جتا (س + ص) = جتا س + جتا ص

ب) جا ٢س = ٢ جاس

جـ) ظا $\frac{٢}{٣}$ س = $\frac{\text{ظا ٢س}}{٣}$

السؤال الرابع:

أرسمُ منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س)= ٣جا ($\frac{٢}{٣}$ س)

ب) هـ(س)= ٢ − جتا (-س)

جـ) ل(س)= ظاس − ١

د) ك(س)= جتا (س − $\frac{\pi}{٢}$)

نموذج اختبار ذاتي

السؤال الأول: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١) أي من الأزواج الآتية زوايا لها ضلع الانتهاء نفسه؟

أ) (٧٠°، -٢٩٠°) ب) (١٥٠°، ٢١٠°) ج) (١٠٠°، ٦١٠°) د) ($\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$)

٢) المثلث الذهبي هو مثلث متساوي الساقين فيه نسبة طول أحد الساقين إلى طول القاعدة يساوي:

أ) $\frac{١+\sqrt{٥}}{٢}$ ب) $\frac{١-\sqrt{٥}}{٢}$ ج) $\frac{١+\sqrt{٥}}{٣}$ د) $\frac{١-\sqrt{٥}}{٣}$

٣) زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٥}$ قيمة قياسها بالدرجات يساوي:

أ) ١٤٤° ب) ١٣٥° ج) ٧٢° د) ١٠٨°

٤) ضلع انتهاء الزاوية (-٦٠٠°) يقع في الربع:

أ) الأول. ب) الثاني. ج) الثالث. د) الرابع.

٥) زاوية الإسناد للزاوية ٢٢٠° يساوي:

أ) ٨٠° ب) ٤٠° ج) ٦٠° د) ١٤٠°

٦) جتاس=

أ) جاس + $\frac{\pi}{٢}$ ب) جا (س + $\frac{\pi}{٢}$) ج) جا (س - $\frac{\pi}{٢}$) د) جاس - $\frac{\pi}{٢}$

السؤال الثاني:

1) إذا كانت هـ في الوضع القياسي، ومر ضلع الانتهاء لها بالنقطة ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) أجب عن الأسئلة الآتية:

أ) في أي ربع تقع الزاوية هـ ؟ وما قياسها؟

ب) اكتب النسب المثلثية الأساسية للزاوية هـ .

السؤال الثالث:

١) جد مجموعة حل المعادلة الآتية علماً بأنّ: $-\pi \leq$ س ≤ ٠

٢ ظا^{٢} س - ظاس -١ =٠

٢) أثبت صحة المتطابقات الآتية:

(١ - جا^{٢}س) (١+ ظا^{٢} س) =١

٣) مثّل على خط الأعداد: ٢$\sqrt{٥}$ + ١

السؤال الرابع:

- جد القيمة الصغرى، والقيمة العظمى، والدورة، والسعة للإقتران ص=٥ جتا (٣س -٤)

١ إنشاءات هندسيّة (١)
Geometric Constructions (1)

الإنشاء الهندسيّ: هو رسم الأشكال والزّوايا بدقّةٍ، باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار فقط.

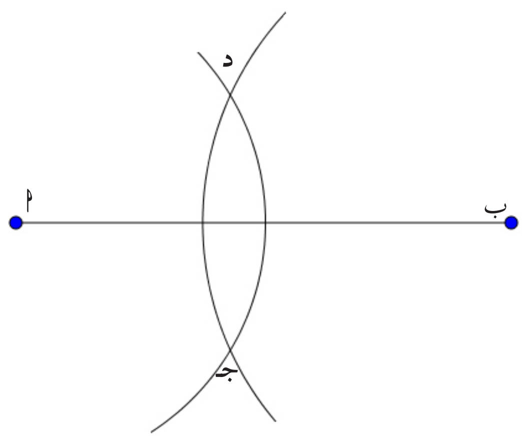
أتعلّم: يُمكن إثباتُ أيِّ إنشاءٍ هندسيّ بأدلةٍ وبراهينَ رياضيّة.

أفكر

لماذا تُستخدَمُ الحافة المستقيمة والفرجارُ فقط في الإنشاءات الهندسيّة ؟

نشاط ١

تنصيف قطعةٍ مستقيمة



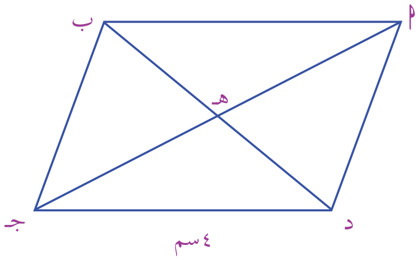
- أفتحُ الفرجارَ فتحةً مناسبة (أكبر من نصف طول أ ب)، لماذا؟
- أُثبّتُ الفرجار في النقطة أ، وأرسم دائرة (أو جزءاً من دائرة يقطع القطعة المستقيمة).
- بالفتحة نفسها أُثبّت الفرجار في النقطة ب، وأرسم دائرةً أخرى تتقاطع مع الدائرة الأولى.
- أحدّدُ نقاط تقاطع الدائرتيْن، وأُسمّيهما جـ ، د ، وأصلُ بينهما.
- نقطة تقاطع المستقيم جـ د مع القطعة المستقيمة أ ب هي نقطة المنتصف ولتكنْ م. لإثبات أنّ النقطة م هي منتصف القطعة المستقيمة أ ب هندسيّاً، أصل بين النقاط أ، جـ، ب، د.
- الشكل الناتج هو: ....

العلاقة بين أقطاره: .... و ....

أستنتج: أنّ النقطة م هي: ....

نشاط ٢

أجدُ محيطَ المثلث جـ ب هـ في متوازي الأضلاع المجاور، إذا علمت أنّ ب د = ٤سم.



هـ م = ٣سم   م د = ٣ سم

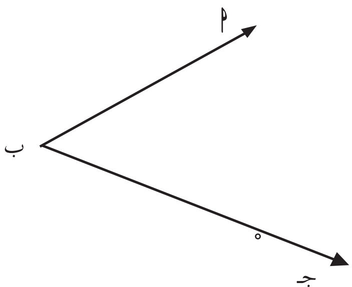
ب هـ = ... ؛ لأنّ هـ هي نقطة منتصف القطعة

....

محيط المثلث = ...

نشاط ٣

تنصيف زاوية:



- أُسمّي الزّاوية في الشّكل المجاور: ....
- عناصرها: ....،.......................،

....

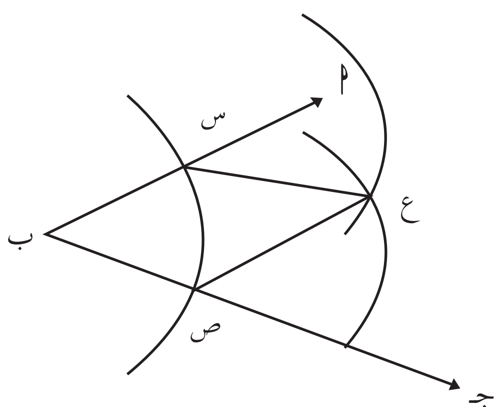
.............، ....، ....

أفتحُ الفرجار فتحةً مناسبةً، وأثبّت رأس الفرجار عند رأس الزاوية ب، وأرسم قوساً يقطع ضلعيّ الزاوية في النقطتين س ، ص على التوالي.

أثبّتُ الفرجار عند النقطة س، وأرسم قوساً بفتحة مناسبة.

أثبّت الفرجار عند النقطة ص، وبالفتحة نفسها أرسم قوساً آخر، يقطع القوس الأوّل في النقطة ع.

فيكون $\overleftrightarrow{\text{ب ع}}$ منصّف الزاوية.

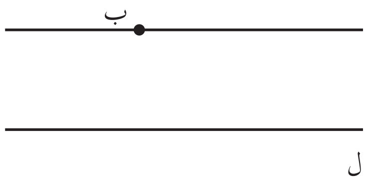


للتحقّق هندسيّاً أنّ المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب ع}}$ هو منصّف

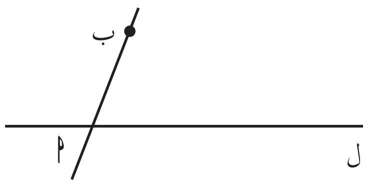
للزّاوية س ب ص:

من تطابق المثلث ب س ع ، والمثلث ب ص ع فيهما:

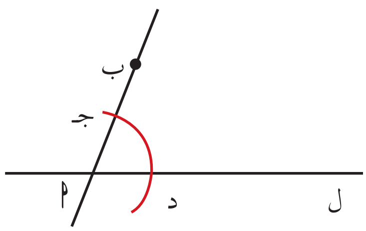
مثال: رسم مستقيم موازٍ لآخر من نقطةٍ معلومة.



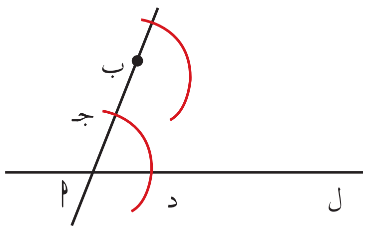
- أرسمُ مستقيماً موازياً للمستقيم ل، ويمرُّ بالنقطة ب:



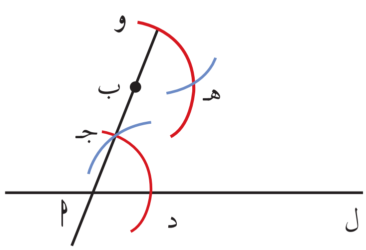
- أرسم من النقطة ب أيّ مستقيم، يقطع المستقيم ل في النقطة أ.



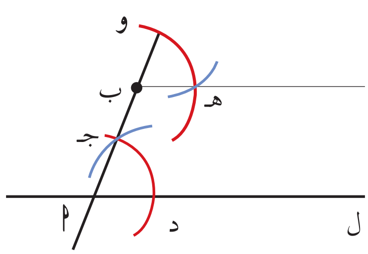
- أفتحُ الفرجارَ فتحةً مناسبةً (أقلّ من أ ب)، وأرسمُ قوساً من دائرة مركزُها أ ويقطع المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ في النقطة جـ ، والمستقيم ل في النقطة د.



- أُثبّتُ الفرجار في النقطة ب، وبالفتحة نفسها أرسمُ قوساً آخر يقطع المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ في النقطة و.



- أفتحُ الفرجار فتحةً تساوي جـ د، وأرسمُ قوساً من دائرة مركزها و يقطع القوس السابق في النقطة هـ.



- المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ يوازي المستقيم ل.

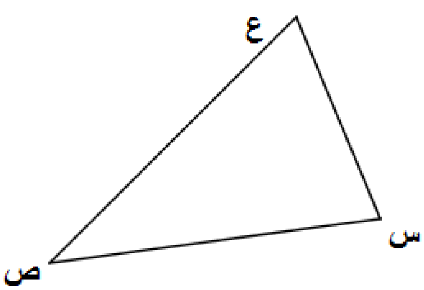
ألاحظ: من التوازي ينتج أنّ ∢ د أ جـ = ∢ هـ ب و بالتناظر، ويُسمّى هذا الإنشاء نقلَ زاويةٍ معلومة.

ملاحظة: يمكن الإفادة من إنشاء خطٍّ موازٍ لآخر في تمثيل حاصلِ ضربِ عدديْن، وناتج قسمة عدديْن.

الإنشاء الهندسي لحاصل ضربِ العدديْن: ﺃ ، ب.

- أرسم المثلّث فيه س ص ع بحيث س ص = وحدة واحدة، س ع = ب وحدة.
- على امتداد الضلع س ص أرسمُ قطعةً مستقيمة، طولها ﺃ وحدة، ولتكن س ل.
- طول القطعة المستقيمة س هـ يمثّلُ حاصل الضرب ﺃ ب.

تمارين ومسائل:



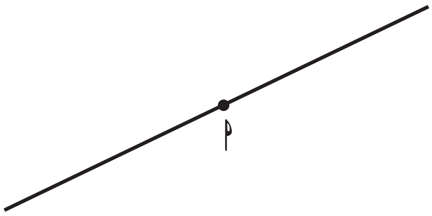
(١) القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفيّ ضلعيْن في مثلث توازي الضلع الثالث، وطولها يساوي نصف طوله. أرسمُ القطعةَ الواصلة بين منتصفيّ ضلعيْن في المثلث س ص ع باستخدام الحافة المستقيمة، وأتحقّقُ من النظريّة بالقياس.

(٢) مُنصّفات زوايا المثلث تتلاقى في نقطةٍ واحدة، وهي مركز للدائرة المرسومة داخل المثلث. أرسمُ شكلاً هندسيّاً باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار يوضّحُ ذلك.

إنشاءات هندسيّة (٢)
Geometric Constructions (2)

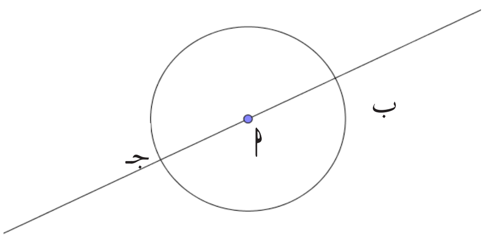
٢

نشاط ١



إقامة عمود على قطعةٍ مستقيمةٍ من نقطة واقعة عليها.

أفتحُ الفرجار فتحةً مناسبة، وأرسم دائرةً مركزها ﻡ ، تقطع القطعة المستقيمة في النقطتيْن: جـ ، ب.



أفتحُ الفرجار فتحةً مناسبةً، وأثبّتهُ عند النقطة جـ، وأرسم قوساً.

بالفتحة نفسها أُثبّتُ الفرجار عند النقطة ب، وأرسمُ قوساً يقطع القوس الأوّل في النقطة هـ.

أكملُ الرسمَ لأحصلَ على العمود ﻡ هـ.

أتحقّقُ هندسيّاً من صحّة الرّسم.

نشاط ٢

أرسمُ المثلّث ﻡ ب جـ القائم الزاوية في ب .

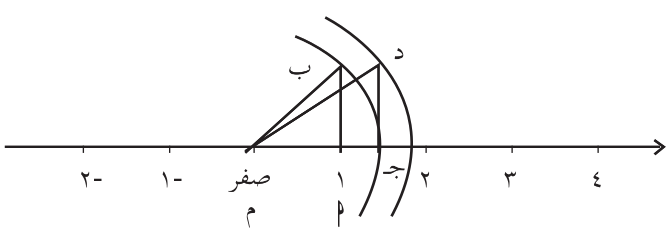
أمدُّ القطعة المستقيمة من جهة ب، أُكملُ خطواتِ إقامةِ عمودٍ على قطعةٍ مستقيمةٍ من نقطةٍ واقعةٍ عليها.

أتعلّم: تُستخدَمُ الإنشاءاتُ الهندسيّة لتمثيل الأعدادِ غيرِ النسبيّة التي على هيئة جذورٍ تربيعيّة، لأعدادٍ ليست مربعاتٍ كاملةً على خطّ الأعداد.

نشاط ٣

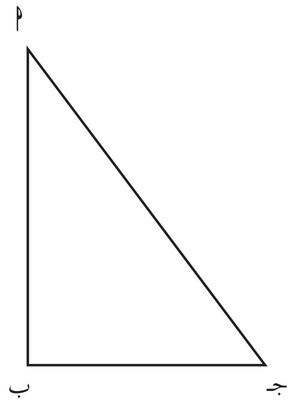
أمثّل $\sqrt{٣}$ على خطّ الأعداد.

- بالرجوع إلى النشاط السابق ،أُنشىءُ عموداً على خطّ الأعداد عند $\sqrt{٢}$ ، طولُهُ وحدة واحدة، وأُسمّيه $\overline{\text{جـ د}}$.
- م د = ...
- أُكملُ الرسم لتمثيل العدد $\sqrt{٣}$.



نشاط ٤

في المثلّث أ ب جـ المجاور، أ ب = $\frac{س - ١}{٢}$ ، أ جـ = $\frac{س + ١}{٢}$ ، أجدُ طولَ الضلع $\overline{ب جـ}$.



باستخدام نظريّة فيثاغورس:

$(ب جـ)^٢ = (أ جـ)^٢ - (أ ب)^٢$

$(ب جـ)^٢ = \left(\frac{س + ١}{٢}\right)^٢ - \left(\frac{س - ١}{٢}\right)^٢$

وينتج أنّ: $(ب جـ)^٢$ = ... = ...

أتعلّم: لتمثيل جذر العدد س، س $\geqslant$ ٠ على خطّ الأعداد، نقيم عموداً عند نقطة الصفر طولُهُ $\frac{س - ١}{٢}$، ونسمّيه $\overline{أم}$، ثمّ نرسمُ قوساً من دائرة مركزُها أ ، ونصف قطرها $\frac{س + ١}{٢}$، ويقطع خط الأعداد. نقطة تقاطعه مع خطّ الأعداد هي تمثيل العدد $\sqrt{س}$.

نشاط ٥

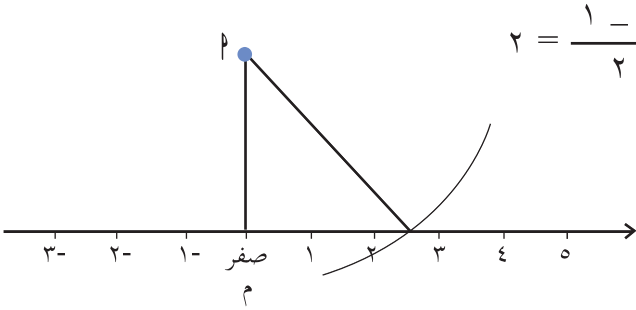
أُمثّل $\sqrt{٥}$ بالطريقة السابقة:

طولُ العمود على محور السينات = $\frac{٥ - ١}{٢}$ = ٢

أرسمُ قوساً من دائرة مركزها أ ،

ونصف قطرها ....

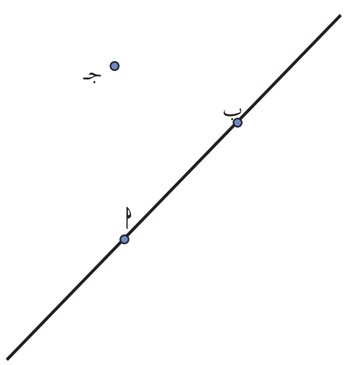
أُعيّنُ $\sqrt{٥}$ على خطّ الأعداد.



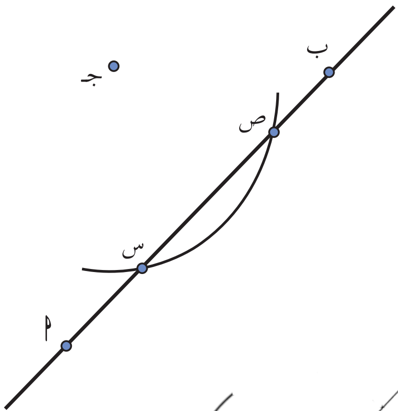
نشاط ٦

إنشاء عمودٍ على مستقيمٍ من نقطةٍ خارجةٍ عنه.

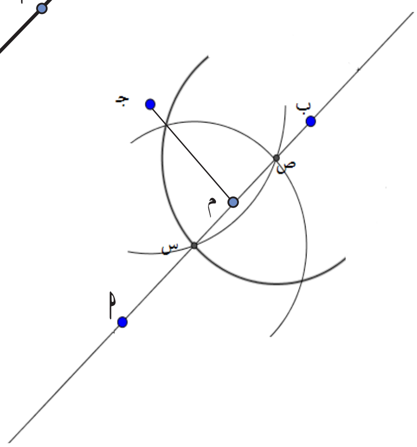
- أرسمُ المستقيمَ أ ب، والنقطة جـ الخارجة عنه.



• أفتـحُ الفرجـار فتحـةً مناسـبة، وأُثبّتُـه فـي النقطـة جـ، وأرسـمُ قوسـاً يقطـعُ المسـتقيم فـي النقطتيـن س ، ص.



• أُنصّفُ القطعةَ المستقيمةَ $\overline{\text{س ص}}$ في النقطة م.



• أصلُ بين جـ ونقطة المنتصف م.

لتوضيـح أنّ $\overline{\text{جـ م}}$ عمـوديٌّ علـى $\overline{\text{س ص}}$ هندسـيّاً، أصـلُ بيـن النقـاط جـ، س، ص، الشـكل الناتـج هـو مثلّـث ....

$\overline{\text{جـ م}}$ عموديٌّ على $\overline{\text{س ص}}$؛ لأنّ ....

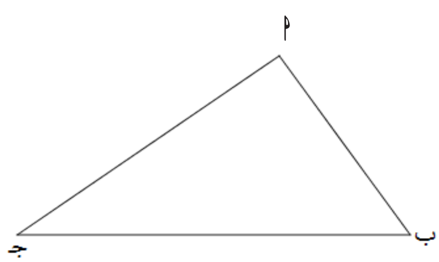
نشاط ٧

في الشكل المقابل أنشئُ عموداً للمثلث أ ب جـ، من الرأس أ على القاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$.

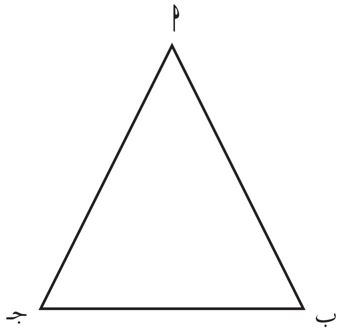
النقطة أ نقطةٌ خارجةٌ عن المستقيم ....

أُثبّتُ الفرجار في النقطة أ، وأرسم .... يقطع الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$ في النقطتين ....

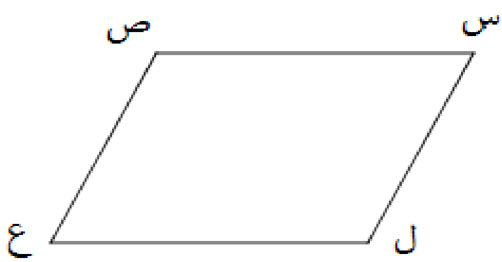
أُكملُ الرسم.



تمارين ومسائل:



(١) في المثلث متساوي الساقيْن، العمود المقام من منتصف القاعدة يمرُّ بالرأس، ويُنصّف زاويته. تحقّقْ من صحّة النظريّة؛ عن طريق الرسم بالحافة المستقيمة والفرجار.



(٢) أرسمُ ارتفاعاً لمتوازي الاضلاع من الرأس ص على القاعدة ع ل، باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار.

(٣) أنشئُ الزّوايا الآتية: ٥٤° ، $٢٢\frac{١}{٢}$°.

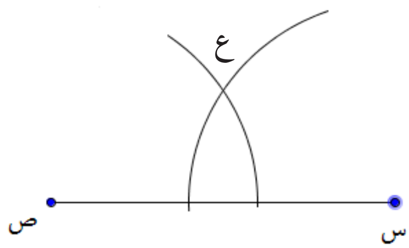
(٤) أُمثّلُ الأعداد الآتية على خطّ الأعداد:

$\sqrt{٣}$ ، $-\sqrt{١١}$ ، $١-\sqrt{٧}$

مهمة تقويمية:

مصنعٌ للخزف يُنتج أطباقاً دائريّة الشكل، أراد سامي تقديم هديةٍ تذكاريّةٍ لصديقه؛ بحيث تكون ساعةً مثبتةً على طبقٍ خزفيّ. كيف يمكن مساعدتُه في تحديد موقعِ تثبيتِ عقاربِ السّاعة في الطبق باستخدام الإنشاءات الهندسية.

٣ المثلّث
Triangle



نشاط ١
رسم مثلث متساوي الساقيْن.

أرسم مثلثاً متساوي الساقيْن، قاعدته $\overline{\text{س ص}}$ ؛ باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار:

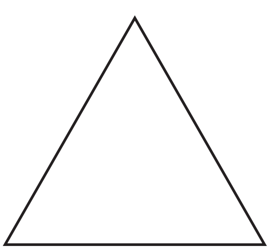
- أفتحُ الفرجار فتحةً مناسبة.
- أُثبّتُ الفرجار عند النقطة س، وأرسم قوساً.
- بالفتحة نفسها أثبّتُ الفرجار عند النقطة ص، وأرسم قوساً آخر يقطع القوس الأوّل.
- نقطة تقاطُع القوسين ع هي الرأس الثالث للمثلّث، أعيّنها على الرسم، وأُكملُ الرسم باستخدام الحافة المستقيمة.
- ∠س = ∠ص

أتذكر: العمود النازل من رأس المثلث متساوي الساقين على القاعدة يُسمّى محورَ التماثل للمثلث .

- أرسمُ محورَ التماثُل للمثلث.
- أفتحُ الفرجار فتحةً مختلفةً عن السابق، وأحاولُ رسمَ مثلثٍ متساوي الساقيْن مختلفاً.

كم مثلثاً متساوي الساقين يمكن رسمُه على القاعدة $\overline{\text{أ ب}}$ ؟ أوضّح العلاقة بين رؤوس هذه المثلثات.

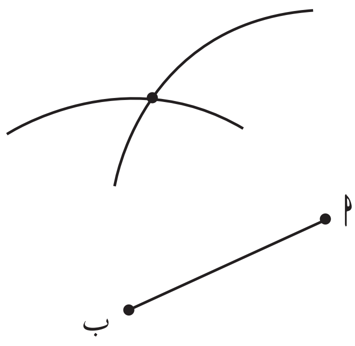
نشاط ٢
باستخدام الفرجار أحدّدُ نوع المثلث المرسوم ....



- في المثلث متساوي الأضلاع قياس كلِّ زاويةٍ فيه يساوي ....
- عدد محاور تماثله ....

نشاط ٣

رسم مثلث متساوي الأضلاع



لرسمِ مثلثٍ متساوي الأضلاع قاعدته ﻡ ب باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار:

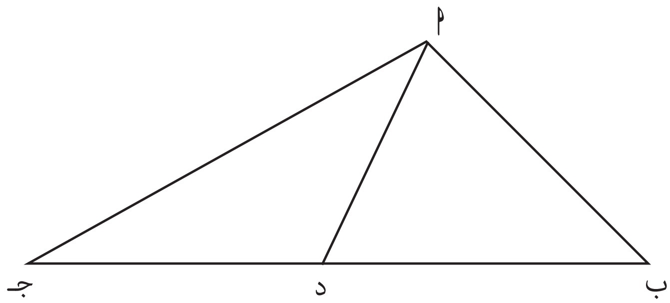
- أفتحُ الفرجار فتحةً مساويةً لطول القطعة ﻡ ب، وأثبّتُ الفرجار عند النقطة ﻡ، وأرسم قوساً.

بالفتحة نفسها أُثبّت الفرجار عند النقطة ب، وأرسم قوساً آخر، يقطع القوس السابق.

- يكون الرأس الثالث للمثلث هو ....
- أُكمل الرسم.

نشاط ٤

القطعة المتوسطة في المثلث



أرسم المثلث ﻡ ب جـ.

أنصف الضِّلْع ب جـ بالنُّقطة د ، وأصل بين أ ، د ، فيكون ب د = _____

مِساحة المُثَلَّث = $\frac{١}{٢}$ × طول القاعدة × ________

مِساحة المُثَلَّث أ ب د = ______ × _______ × _______

مِساحة المُثَلَّث أ جـ د = ______ × ______ × _______

ما العلاقة بين مِساحة المُثَلَّثين؟

أتعلم: - القطعة المتوسّطة في المُثَلَّث هي القطعة المستقيمة الواصلة بين أحد رؤوس المُثَلَّث ومنتصف الضِّلْع المقابل له.

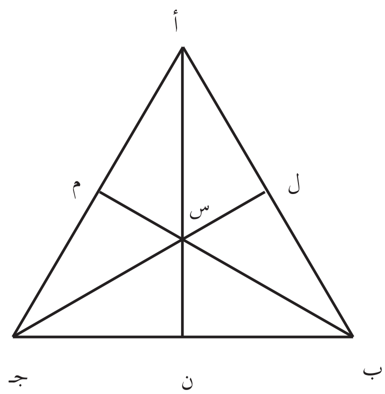
- تتقاطع القطع المتوسّطة للمُثَلَّث في نقطة واحدة.
- نقطة تقاطع القطع المتوسّطة، تُقَسِّمُ كلُّ قطعة منها بنسبة ٢ : ١ من جهة أي رأس.

نشاط ٥

في المُثَلَّث المجاور:

المُثَلَّث أ ب جـ ، فيه: ل منتصف أ ب، ن منتصف ب جـ، م منتصف أ جـ ،

س جـ = ٨ سم، س م = ٣ سم.



جـ س : ل س = ٢ : ١

ل س = ٤ سم .

ب س = ______ سم.

تمارين ومسائل:

(١) انشئ الزاوية ٦٠°.

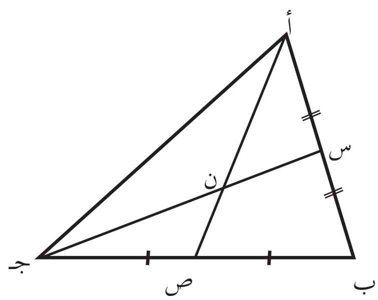
(٢) يعمل تامر في تصميم طائرات الأطفال، ساعدْه في إكمال الطائرة الورقيّة، التي أحد أقطارها القطعة المستقيمة المجاورة $\overline{\text{م ب}}$.

هل يمكنه إنشاءُ طائراتٍ مختلفة على القُطر السابق نفسه؟ ساعدْه في ذلك.

(٣) أ ص ، جـ س قطع متوسّطة في المُثَلّث أ ب جـ، وطول $\overline{\text{ن ص}}$ = ٦ سم، أَجِدُ:

أ) طول $\overline{\text{أ ن}}$.

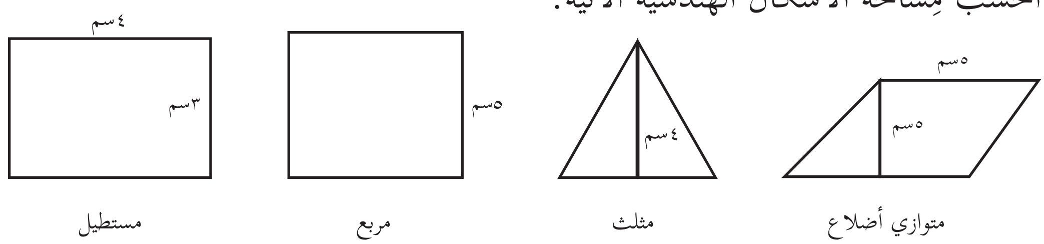
ب) طول $\overline{\text{أ ص}}$.



٥ تكافؤ الأشكال الهندسيّة
Equivalence of Geometric Figures

نشاط ١

أحسبُ مِساحةَ الأشكال الهندسيّة الآتية:

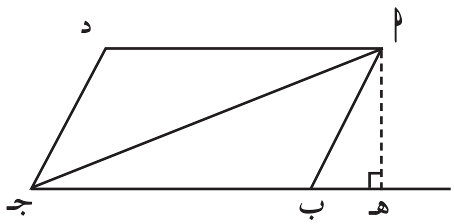


- مساحة المربع = ... سم^{٢}، مساحة المستطيل = ... سم^{٢}
- مساحة المثلث = ... سم^{٢}، مساحة متوازي الأضلاع = ...
- مساحة متوازي الأضلاع = مساحة ....
- نقول: إنّ متوازي الأضلاع يكافيء المربّع
- مساحة المثلث = مساحة ....
- نقول: إنّ المثلث يكافيء ....

تعريف:
الشكلان الهندسيّان المتكافئان هما شكلان متساويان في المِساحة.

نشاط ٢

يمثّل الشكل المجاور متوازي الأضلاع ﻫ ب جـ د، وُصِّلَ القطر $\overline{\text{ﻫ جـ}}$ ، فنتج المثلثان



ﻫ ب جـ ، ﻫ جـ د فيهما:

ﻫ ب = ... ، ب جـ = ...

قياس زاوية ﻫ ب جـ = قياس زاوية ....

إذن: ينطبق المثلثان بـ ....

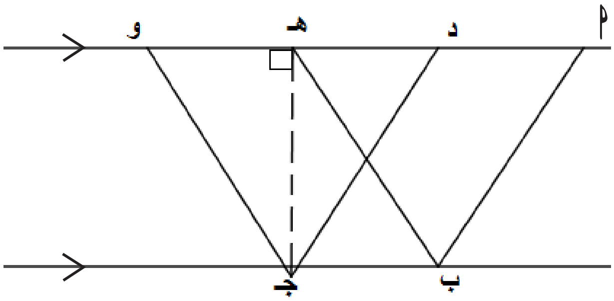
إذا كان ب جـ = ١٠ سم، ﻫهـ = ٦سم

مِساحة المثلث ﻫ ب جـ =.............، مِساحة المثلث ﻫ جـ د =...............

المثلثان ﻫ ب جـ ، ﻫ جـ د متكافئان.

أستنتج: إذا تطابق شكلان هندسيّان فإنّهما متكافئان.

نشاط ٣



في الشكل المجاور ﻫ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع مشتركان في القاعدة ب جـ ، ومحصوران بين مستقيميْن متوازييْن، ب جـ = ٤ سم، هـ جـ = ٦ سم

مساحة متوازي الأضلاع هـ ب جـ و = القاعدة × الارتفاع

ارتفاع متوازي الأضلاع ﻫ ب جـ د = ...

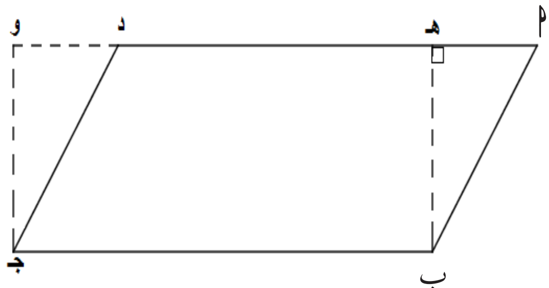
مِساحة متوازي الأضلاع ﻫ ب جـ د = ... × ....

إذن: متوازي الأضلاع ﻫ ب جـ د يكافئ متوازي الأضلاع هـ ب جـ و. لماذا؟

نظريّة:

متوازيا الأضلاع المشتركان في القاعدة، والمحصوران بين مستقيميْن متوازييْن يكونان متكافئيْن.

نشاط ٤



قطعةُ أرضٍ على شكل متوازي أضلاعٍ، طوله ٣٠م، وارتفاعه ٢٠م، اتّفق صاحبُها على تعديل الحدود مع جيرانه؛ بحيث تصبحُ القطعةُ مستطيلةً وبالمساحة نفسها؛ وذلك باقتطاع مثلثٍ قائمِ الزّاوية من جهة، وإضافة مثلثٍ قائم الزاوية بالمساحة نفسها من الجهة الأخرى.

أجد:

مِساحة قطعة الأرض قبل التعديل = ...× .... = ...

مِساحة قطعة الأرض بعد التعديل = الطول × العرض.

طول متوازي الأضلاع = طول المستطيل، لماذا؟ ....

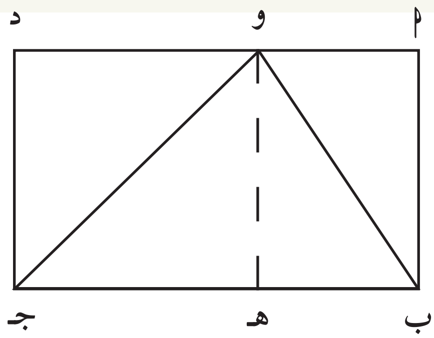
ارتفاع متوازي الأضلاع = عرض المستطيل، لماذا؟ ....

$\overline{\text{ﻫ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ لماذا؟ ماذا ألاحظ؟

نظريّة: متوازي الأضلاع يكافىء المستطيل المشترك معه في القاعدة والمحصورين بين مستقيمين متوازيين.

أستنتج: مِساحة المثلث = ... المشترك معه في القاعدة، والمحصورين بين مستقيمين متوازيين.

نظريّة:
مِساحة المثلث تساوي نصف مِساحة متوازي الأضلاع المشترك معه في القاعدة والمحصورين بين مستقيمين متوازيين.



نشاط ٥

في الشكل المجاور ﻡ ب جـ د مستطيل، فإذا كانت مساحة المثلث ﻡ ب و = ١٠سم^{٢}، ومساحة المثلث و جـ د = ١٥سم^{٢}، أجدُ مساحة المثلث و ب جـ:

أُقيم العمودُ و هـ، المثلث ﻡ ب و يكافىء المثلث ....، لماذا ؟ ....

مِساحة المثلث و ب هـ = ...

مِساحة المثلث و هـ جـ = ... لماذا ؟ ....

لكنّ المثلث و ب جـ يتكوّن من المثلثين: .... و ....

إذن: مساحته = ... + ... = ...

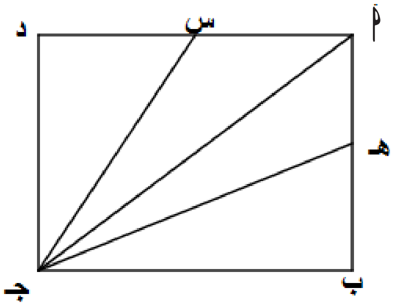
مِساحة المستطيل ﻡ ب جـ د تساوي ....

هل يمكن إيجاد مساحة المستطيل في النشاط السابق بطريقةٍ أخرى؟

أستنتج:

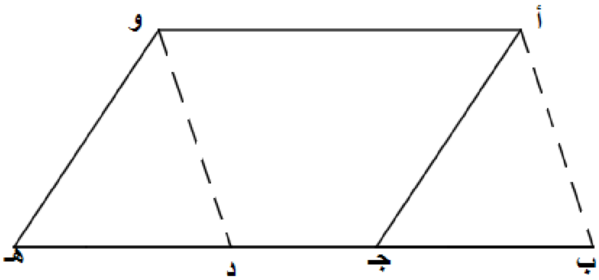
المثلثان المحصوران بين مستقيمين متوازيين ولهما القاعدة نفسها متكافئان.

تمارين ومسائل:



(١) أ ب جـ د مستطيل، فيه النقطة هـ منتصف أب ، والنقطة س منتصف أد ، أُسمّي ٣ أزواجٍ من المثلّثات المتكافئة.

(٢) أ ب جـ مثلث، مِساحته ٢٠سم^{٢}، أ د قطعة متوسطة في المثلث، إذا أُنزِلَ عمودٌ من النقطة د على الضلع أ جـ طوله ٤ سم، أجدُ طول أ جـ .



(٣) في الشكل المجاور أ ب // و د ، أ جـ // و هـ ، أ و // ب هـ . أبيّنُ أنّ:

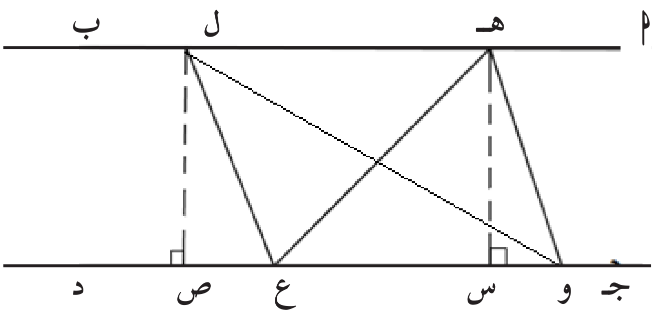
أ) مساحة أ ب د و تساوي مساحة أ جـ هـ و.

ب) المثلث أ ب جـ يكافيء المثلث و د هـ.

(٦) ٲ ب جـ مثلث مساحته ٨ سم٢، أُنشِيء على قاعدته ب جـ المربع س ب جـ د، بحيث تقع النقطة ٲ على س د . أجد:

أ) مساحة المربع س ب جـ د.　　　　ب) طول ب جـ.

مهمة تقويمية:



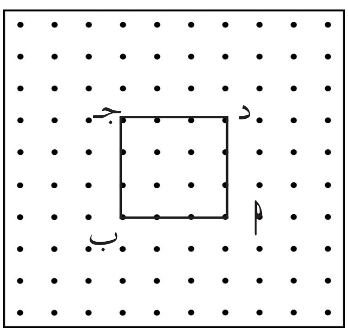
(١) يُمثّلُ الشكل المجاور شارعيْن متوازييْن، هـ و ع ، ل و ع قطعتيّ أرضٍ مثلثي الشكل، متداخلتين ومشتركتين في القاعدة. أبيّنُ أنّ المثلثين هـ و ع ، ل و ع متكافئان.

مساحة القطعة هـ و ع = ١/٢ القاعدة × الارتفاع = ... × .....

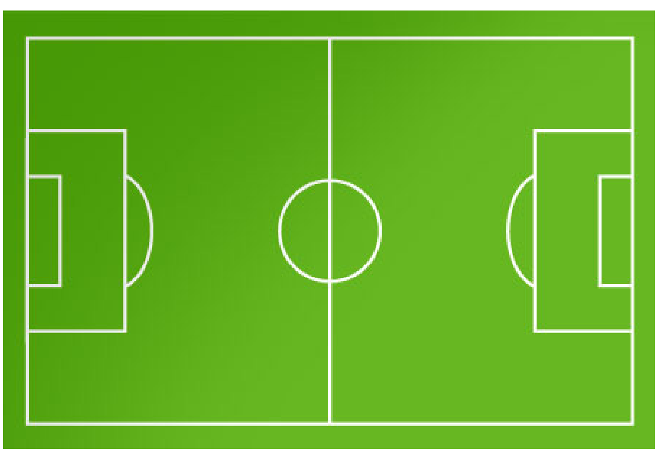
مساحة القطعة ل و ع = ... × .....

لكنّ الارتفاع هـ س = الارتفاع ل ص لماذا ؟............

إذن: مساحة المثلث هـ و ع = مساحة المثلث ل د ع



(٢) ارسم أشكالاً رباعيّةً مختلفة مكافئة للمربع ٲ ب جـ د، ومحصورة بين المستقيمين ٲ ب ، جـ د في الشكل.



(٣) اقترح أبعاداً مناسبة للملعب للاستفادة من قطعة أرض أبعادها ١٥٠م ، ١٠٠م لتصميم ذلك الملعب.

٦ الأسهم
(serahS)

أتعلّم: السّـهم: عبارة عن صكٍّ يثبت أنّ لحامله حصةً في ملكيّة أصول شركةٍ مساهمةٍ معيّنة، إضافةً إلى حقّه في نسبةٍ من أرباحها.

القيمة الاسمية للسّهم: هي قيمة السهم عند الشراء، وهي القيمة التي تظهر في الدفاتر المحاسبيّة، وعلى شهادة السّهم.

ملاحظة: يُعتمد في حساب الأرباح في الأسهم الربح البسيط.

نشاط ١

أودعَ محمودٌ مبلغ ٢٥٠٠ ديناراً في بنك بسعر فائدة سنوية ١,٥٪.
مقدار ربحه في نهاية السنة= ٢٥٠٠ × .... = ...
إذا أودع المبلغ لمدة ٥ سنوات فإنّ ربحَه=....... × نسبة الفائدة × المدة
= .... × .... × .... = ...

نشاط ٢

يمتلك غسان ٢٠٠ سهمٍ في شركة الحافلات الوطنيّة، قيمة السّهم الاسميّة ٤ دنانير. إذا وزعت الشركة الأرباح السنويّة بنسبة ١٠٪،
فإنّ: ربح غسان في السنة = عدد الاسهم × القيمة الاسمية للسهم × نسبة الارباح
= ...... × ...... × ١٠٪=.......

القيمة الحاليّة للسهم: هي قيمة السهم في السوق المالي لحظة التداول.

نشاط ٣

يملك جابر ٥٠٠ سهم في مصنعٍ للرخام، قيمة السهم الاسميّة دينار، وقيمته الحاليّة دينار ونصف.
القيمة الحاليّة لجميع الأسهم = القيمة الحالية للسهم × عدد الأسهم
= .... × ٥٠٠ = ...
إذا وزّع المصنع أرباحاً قيمتها ٨٪،
فإنّ مقدار ربح جابر = ... × .... × ٨٪ = ...

$$\text{النسبة المئوية الحالية للربح في الأسهم} = \frac{\text{مقدار الربح}}{\text{القيمة المالية للأسهم}} \times ١٠٠\%$$

النسبة المئوية الحالية لربح جابر = ...

تمارين ومسائل:

١) تمتلك بيسان ٥٠٠ سهم في أحد البنوك الفلسطينية، القيمة الاسمية للسهم دينار واحد، بينما القيمة الحالية للسهم في السوق ٢,٧٥ دينارًا، فإذا وزّع البنك ٢٠٪ أرباحًا في إحدى السنوات، أحسب:

أ) مقدار ربح بيسان.

ب) القيمة الحالية لأسهم بيسان.

جـ) النسبة المئوية الفعلية للربح.

٢) قامت إحدى شركات الأدوية الفلسطينية بطرح أسهم للاكتتاب العام، بسعر القيمة الاسمية دينار واحد، بالإضافة لعلاوة إصدار بقيمة ٤ دنانير للسهم الواحد، اكتتب أحمد ٨٠٠ سهم، أحسب:

١) قيمة السهم التي اكتتب بها أحمد.

٢) إذا قامت الشركة بتوزيع ٢٠٪ أرباحًا في نهاية إحدى السنوات، أحسب:

أ) مقدار الربح الذي حصل عليه أحمد.

ب) النسبة المئوية الفعلية لهذا الربح، علماً بأن قيمة السهم الحالية ٥ دنانير.

مهمة تقويمية:

قررت إدارة مدرسة الجليل الثانوية أن تحول مقصف المدرسة إلى جمعية مساهمة عامة، فطرحت أسهم المقصف للشراء من قبل الطالبات بقيمة اسمية تعادل ١ دينار للسهم، فإذا اشترت جيهان ٢٠٠ سهم، ووزعت المدرسة في نهاية العام أرباحاً بنسبة ٢٠٠٪ ، أحسب ربح جيهان في نهاية العام الدراسيّ.

٨ التأمين
(Insurance)

أتعلَّـمُ: عقـد (بوليصـة) التأميـن: عقـد بيـن شـركة التأميـن وشـخص أو أشـخاص يدفع بموجبـه الشـخص مبلغا مـن المـال للشـركة، علـى أن تعوضـه عـن جـزء أو كل العقـار أو البضاعـة المؤمـن عليهـا عنـد تعرضهـا للأخطـار أو الخسـائر.

نشاط ١

تعمـل منـال فـي وزارة العمـل الفلسـطينية، قامـت بالتأميـن علـى سـيارتها بمبلـغ ١٠٠٠ دينـار لـدى شـركة الوطـن للتأميـن، علـى أن تدفـع قسـطاً سـنوياً مقـداره ٢٠٠ دينـار، ونـصّ عقـد التأميـن الموقـع بيـن الطرفيـن علـى أن تقـوم الشـركة بالتعويـض عـن أيّ ضـرر يلحـق بهـذه السـيارة بعـد خصـم ٥٪ مـن المبلـغ المؤمـن بـه اسـتهلاكاً سـنوياً، فـإذا احترقـت السـيارة بعـد مضـي ٤ سـنوات مـن توقيـع العقـد، أحسـب:

أ) مقدار ما دفعته منال للشركة في ٤ سنوات.

المبلغ المدفوع = ... × .... = ٨٠٠ دينار.

ب) مقدار الاستهلاك من قيمة السيارة في ٤ سنوات.

مقدار الاستهلاك = ١٠٠٠ × .... × ٤ = ...

جـ) مقـدار مـا تدفعـه الشـركة لمنـال كتعويـض مقابـل الضـرر = مبلـغ التأميـن – الخصـم = ١٠٠٠ – ....

د) ربح أو خسارة الشركة في هذا التأمين = مقدار ما تدفعه الشركة – ما دفعته منال = ...

مثال:

أمّن إلياس على حياته لدى شركة تأمين على الحياة، ونصّ العقد المبرم بين الطرفين على أن تقوم الشركة بدفع مبلغ ٨٠٠٠٠ دينار في حال وفاته، على أن يدفع قسطاً شهرياً مقداره ٤٠٠ دينار، ولمدة ٢٠ سنة.

مقدار ما يدفعه الرجل خلال عشرين سنة = ٤٠٠ × ١٢ × ٢٠ = ٩٦٠٠٠ دينار.

إذا توفي إلياس بعد ٢٠ سنة من توقيع عقد التأمين فإن ربح الشركة =

٩٦٠٠٠ − ٨٠٠٠٠ = ١٦٠٠٠ دينار.

إذا توفي إلياس بعد ١٠ سنوات فيكون ما دفعه ٤٠٠ × ١٢ × ١٠ = ٤٨٠٠٠

خسارة شركة التأمين = ٨٠٠٠٠ − ٤٨٠٠٠ = ٣٢٠٠٠ دينار.

تمارين ومسائل:

(١) أمين تاجر موادّ غذائية، أمّن لدى شركة تأمين على كمية من السكر بقيمة ٥٠٠٠ دينار، وأخرى من الأرز بقيمة ١٢٠٠٠ دينار، برسم تأمين مقداره ٥٪ ، فإذا تلف أثناء النقل خمس كمية السكر، وربع كمية الأرز، أحسب مقدار ربح أو خسارة شركة التأمين.

(٢) أمنت ماريا على حياتها لدى شركة ضمان للتأمين بمبلغ ٢٤٠٠٠ دينار، بقسط سنوي مقداره ١٠٪ من قيمة التأمين، ولمدة ١٨ سنة، على أن تدفع القسط السنوي على أقساط شهرية متساوية، فإذا توفيت ماريا بعد مرور ١٥ عاماً. أجد:

أ) مقدار القسط السنوي.

ب) مقدار القسط الشهري.

جـ) مقدار خسارة أو ربح الشركة.

ورقة عمل:

عزيزي الطالب أُكمل حل الأنشطة والأسئلة الآتية:

السؤال الأول:

أُمثّلُ على خطّ الأعداد:

$\sqrt{٢} + ١$ ، $\sqrt{٥} - ١$ ، $١ - \sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{٧}$

السؤال الثاني:

أرسم زوايا قياسها ٣٠° ، ١٥° باستخدام حافة مستقيمة ومسطرة غير مدرجة.

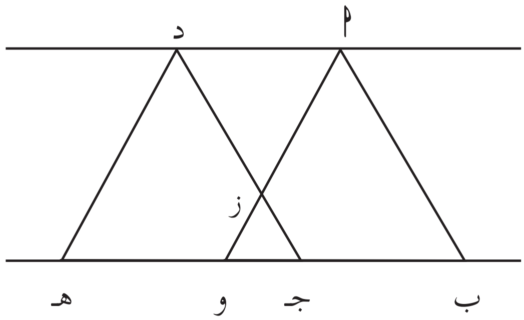
السؤال الثالث:

أرسم المثلث أ ب جـ، القائم الزاوية في ب، ثم أُنشئُ القطعة المستقيمة ب د حيث: د هي منتصف الوتر. تحقّق أنّ طول ب د = نصف طول الوتر أ جـ .

السؤال الرابع:

أ ب جـ د مربع محيطه ٢٤سم، هـ منتصف ب جـ . احسب مساحة المثلث أ هـ جـ.

السؤال الخامس:



أ ب جـ د ، أ و هـ د متوازيا أضلاعٍ مشتركان في القاعدة أ د ، ومحصوران بين مستقيمين متوازيين كما في الشكل المجاور. بيّنْ أنّ الشكل أ ب جـ ز يكافيء د ز و هـ.

السّؤال السادس: أضَعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصّحيحةِ:

١) يملك فريدٌ ٣٠٠٠ سهمٍ في شركةِ موادَّ تموينيةٍ، قيمة السهم الاسمية دينارٌ ونصفٌ، إذا وزّعت الشركةُ ١٠٪ أرباحا على المساهمين في إحدى السّنوات، أحسب أرباح فريدٍ في تلك السنة.
أ) ٣٠٠ ب) ٤٥٠ جـ) ٣٤٥٠ د) ٤٥٠٠

٢) أمّن رجل على حياته، حيث يدفع قسطا شهريا، قدره ١٠٠ دينارٍ، مجموع ما يدفعه في ١٥ سنةً يساوي:
أ) ١٨٠ ب) ١٥٠٠ جـ) ١٨٠٠٠ د) ١٨١٠٠

السّؤال السابع:

اشترى أحمدُ ٢٠٠٠ سهمٍ من شركة صامد للموارد الإنشائية، بقيمة اسمية مقدارها ٤ دنانير للسّهم، فإذا كانت الأرباح المستحقة له في نهاية سنتين بحساب الربح البسيط ٨٨٠ دينارا. أجدُ معدل الفائدة السّنوي الذي حددته الشركة.

السّؤال الثامن:

أمّـن رجـل علـى سيارته التـي ثمنهـا ٣٠ ألـف دينـار تأمينـا شـاملا، حيـث يدفـع مبلـغ ٤٠٠ دينـار قسـطا سنويا علـى أن تدفـع شـركة التأميـن ٨٠٪ مـن ثمـن السـيارة إذا تعرضـت للتلـف، إذا تعرضـت السـيارة بعـد ١٠ سنواتٍ لحـادث سـير أصبحـت بعـده غيـرَ صالحـةٍ للاسـتعمال، أحسـبُ:

أ) المبلغ الذي ستدفعه شركة التأمين.

ب) مقدار ربح شركة التأمين أو خسارتها.

اختبار ذاتي

السؤال الاول: أضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة فيما يأتي:

١) أمّن يوسف على سيارته بدفع قسط سنويّ لشركة تأمين قدره ١٥٠ ديناراً، ما مجموع ما يدفعه في ١٢ سنة؟

أ)١٠٠٠٠ ب)١٢٠٠٠ جـ) ١٨٠٠٠ د) ١٥٠٠٠

٢) أ ب جـ د مربع مساحته ٣٦ سم ^{2} ، هـ منتصف ب جـ ، مساحة المثلث أ هـ جـ يساوي:

أ) ١٦ سم ^{2} ب) ٩ سم ^{2} جـ) ١٨ سم ^{2} د) ٢٠ سم ^{2}

٣) يمتلك محمود ٥٠٠ سهم في شركة جوال للاتصالات قيمة السهم الاسمية ٢ دينار إذا وزعت الشركة الأرباح السنوية بنسبة ١٠٪ فإنّ ربح محمود في السنة يساوي:

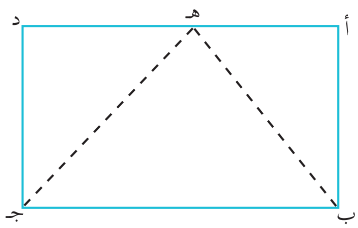
أ)١٠٠دينار ب)٢٠٠دينار ج)٥٠٠دينار د) ١٠٠٠دينار

٤) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه: أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ٦ سم ، د منتصف أ جـ ، فإن طول $\overline{\text{ب د}}$ يساوي:

أ) ٤ سم ب) ٣ سم جـ) ١٠ سم د) ٥ سم

٥) في الشكل المجاور أ ب جـ د مستطيل مساحته م وحدة مربعة ، ما مساحة المثلث هـ جـ ب ؟

أ) $\frac{م}{٢}$ ب) $\frac{م}{٣}$ جـ) م   د) ٢ م



السؤال الثاني:

١) أ ب قطعة مستقيمة أُنشئ العمود جـ د في منتصف أ ب ، ثم أُنشئت الزوايا الآتية باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار؟

أ) الزاوية أ د هـ = ١٣٥ °

ب) الزاوية أ د و = ° ٥,١٥٧

٢) ارسم منحنى الاقتران ق(س) =٢ جا٣س +١

٢) أمّن عليّ على سيارة ثمنها ٢٠ ألف دينار تأميناً شاملاً يدفع ٤٠٠ دينار قسطاً سنوياً على أن تدفع شركة التأمين ٦٠٪ من ثمن السيارة إذا تعرضت للتلف ، إذا تعرضت السيارة بعد ١٠ سنوات لحادث سير،أصبحت السيارة بعده غير صالحة للاستعمال احسب:

١) المبلغ الذي ستدفعه السيارة لعليّ.

٢) مقدار ربح أو خسارة شركة التأمين.