٨

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الرزمة التعليمية

٢٠٢٤

مركز المناهج

moehe.gov.ps | mohe.pna.ps | mohe.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
+970-2-2983250 فاكس | +970-2-2983280 هاتف

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

المحتويات

النتاجات

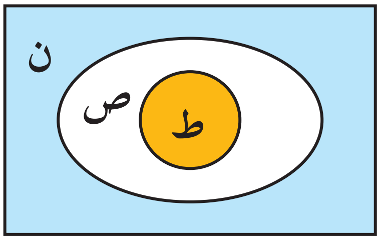
يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الرزمة التعليمية والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على الآتي:

١- التعرُّفُ إلى مفهومي العدد النسبيّ والعدد غير النسبيّ.
٢- إيجاد قيمة بعض الجذور لمربّعات كاملة، ومكعّبات كاملة.
٣- التّمييز بين العدد النسبيّ والعدد غير النسبيّ.
٤- كتابة العدد النسبيّ بصور مختلفة.
٥- إيجاد قيم تقريبيّة لبعض الجذور التّربيعيّة.
٦- إيجاد ناتج العمليّات الأربع في الأعداد النسبيّة والأعداد غير النسبيّة.
٧- تعرُّف خصائص العمليّات في الأعداد النسبيّة والأعداد غير النسبيّة.
٨- حلّ مشكلات تتضمّن سياقات حياتيّة على الأعداد النسبيّة والأعداد غير النسبيّة.
٩- إجراء العمليّات الحسابيّة على المقادير الجبريّة.
١٠- تحليل المقادير الجبريّة، بإخراج العامل المشترك.
١١- تحليل العبارة التّربيعيّة بعدّة طرق.
١٢- حلّ مشكلات حياتيّة، باستخدام الجبر.
١٣- التعرّف إلى نظريّة فيثاغورس، والتعبير عنها جبريّاً وهندسيّاً.
١٤- توظيف نظريّة فيثاغورس وعكسها في حلّ مشكلاتٍ حياتيّة.
١٥- التعرّف إلى مفهوم المثلّثات المتطابقة.
١٦- التعرّف إلى حالات تطابُق المثلثات.
١٧- التعرّف إلى مفهوم المثلّثات المتشابهة.
١٨- التعرّف إلى حالات تشابه المثلّثات.
١٩- توظيف تطابق المثلّثات، وتشابه المثلثات في حلّ مشكلاتٍ حياتيّة.
٢٠- إيجاد زاوية قطاع دائريّ معلوم.
٢١- تمثيل البيانات بطريقة القطاعات الدّائرية.
٢٢- تمثيل البيانات بطريقتَي المُضَلّع التَّكْراري والمُنْحَنى التَّكْراريّ.
٢٣- تَعَرُّف مفهوم التَّشَتُّت.
٢٤- إيجاد بعض مقاييس التَّشَتُّت لبيانات مفردة.
٢٥- توظيف مقاييس التَّشَتُّت في سياقات حياتيّة.
٢٦- التعرّف إلى الصّورة العامة للمعادلة التربيعيّة.
٢٧- حلّ المعادلة التربيعيّة بطرقٍ مختلفة.
٢٨- التعرُّف إلى مجموع وفرق مكعّبيْن.
٢٩- تحليل مجموع وفرق بين مكعبيْن.
٣٠- استخدام حلّ المعادلة التربيعيّة، والتحليل في حلّ مسائلَ حياتيّة.
٣١- إيجاد مساحة متوازي الأضلاع، بدلالة مِساحة المثلّث المشترِك معه في القاعدة والارتفاع.
٣٢- التعرّف إلى القطاع الدائري وخصائصه.
٣٣- إيجاد مِساحة القطاع الدائري، وطول قوس القطاع الدائري، وزاوية القطاع الدائري.
٣٤- التعرّف إلى القطعة الدائريّة.
٣٥- التعرّف إلى الأسطوانة الدائريّة القائمة.
٣٦- إيجاد المِساحتيْن الجانبيّة والكليّة والحجم للأسطوانة.
٣٧- التعرُّف إلى المخروط الدائري القائم.
٣٨- إيجاد المساحتيْن الجانبيّة والكليّة والحجم للمخروط.
٣٩- توظيف المساحات والحجوم في حلّ مشكلاتٍ حياتيّة.

١-١ العدد النسبيّ:

تعريف: يسمى أيُّ عدد يمكن كتابته بالصورة $\frac{أ}{ب}$ عدداً نسبياً، أ، ب ∋ ص، ب ≠٠، ويُرْمَزُ لمجموعة الأعداد النسبية بالرّمز **ن**.

يمكـن تمثيـل العلاقـة بيـن مجموعـات الأعـداد **ط، ص، ن**، كمـا فـي الشّـكل المجـاور.



نشاط١: أتأمَّلُ الآتي، ثُمَّ أُكْمِل:

العدد ٢,٤ يُكْتَبُ $\frac{٢٤}{١٠}$ ، فهو عدد نسبيّ. والعدد - $\sqrt{٩}$ = -٣، وَيُكْتَبُ $\frac{-٣}{١}$ ،فهو عدد نسبيّ.

والعدد $٣\frac{١}{٢}$ يُكْتَبُ ....، فهو عدد نسبيّ. والعدد ٢,٣٥ يُكْتَبُ ....، فهو ....

أَتَعَلَّم: أيّ عدد عشري دوريّ هو عدد نسبيّ.

يمكن تحويل العدد النسبيّ المكتوب بالصورة $\frac{أ}{ب}$ إلى الصّورة العَشريّة بطرق مختلفة، منها:

١- ضرب البسط والمقام في عدد يجعل مقام الكسر العادي ١٠، ١٠٠، ١٠٠٠، ... .

نشاط٢: أُكْمِلُ تحويل كلّ من الآتي: $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{-٣}{٤}$ ، $\frac{٩}{٤٠}$ إلى كسر عشريّ:

أ) $\frac{-٣}{٤} = \frac{-٣\times ...}{٤\times ...} = \frac{...}{١٠٠} = -٠,٧٥$

ب) $\frac{٩}{٤٠} = \frac{٩\times ٢٥}{٤٠\times ٢٥} = \frac{...}{...} = ٠,٢٢٥$

٢- قسمة البسط على المقام:

مثال: أَكْتُبُ الكسر $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{١}{٣}$ على صورة كسر عشريّ. ماذا تُلاحِظ؟

$\frac{٣}{٨} \Leftarrow$

```
   ٠,٣٧٥
٨ | ٣٠٠
  - ٢٤
    ٦٠
  - ٥٦
    ٤٠
  - ٤٠
    ٠٠
```

أي أَنَّ $\frac{٣}{٨} = ٠,٣٧٥$ ،

وهو كسر عشري منتهٍ.

$\frac{١}{٣} \Leftarrow$

```
   ٠,٣٣٣
٣ | ١٠
  - ٩
    ١٠
  - ٩
    ١٠
  - ٩
    ١
```

الباقي (١) يتكرر

القسمة غير منتهية لذلك نسميه دوري

أي أنّ $\frac{١}{٣} = ٠,\overline{٣}$ ، وهو كسر عشريّ دوريّ.

تَمارِينُ وَمَسائِل:

١) أُكْمِلُ الجدول الآتي، بوضع إشارة (✓) إزاء المجموعة الّتي ينتمي إليها العدد:

العدد / المجموعة	$\sqrt{١٢١}$	-٥	$٠,٦$	$\frac{-٢}{٥}$	$٠,٠٠٠٣٣٣$	$٠,\overline{٢٣}$	$١\frac{٣}{٤}$
ط	✓						
ص	✓						
ن	✓						

٢) أُبيّنُ أنّ كلّاً من الأعداد الآتية عدد نسبيّ: $٠,٢٥$ ، $١,٥$ ، $\sqrt[٣]{٢٧}$

٣) لعب راشد ١١ مباراةً في إحدى الألعاب الرياضية، ففاز في ثلاثٍ منها. أُعَبِّرُ عن نسبة فوزه كعدد عشريّ دوريّ.

٤) مع خليل مئة دينار، تصدق بعشرين دينار للجنة الزكاة في الحي، اكتب العدد النسبي الذي يُعبّر عن نسبة الصدقة التي قدمها خليل.

١-٢ الجذر التَّربيعيّ والجذر التكعيبيّ لعدد نسبيّ

أتعلم: إذا أمكن كتابة العدد النسبي جـ كحاصل ضرب عددين نسبيين موجبين متساويين فإن العدد $\sqrt{\text{جـ}}$ عدد نسبي موجب، ويمكن إيجاد قيمة $\sqrt{\text{جـ}}$ وفقاً للقاعدة:

$$\sqrt{\text{جـ}} = \sqrt{\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \sqrt{\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{ب}^{٢}}} = \frac{\sqrt{\text{أ}^{٢}}}{\sqrt{\text{ب}^{٢}}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$ ، بشرط ب $\neq$ ٠ .

نشاط ١:

أُكْمِلُ لأجد قيمة كل من الآتي:

$\sqrt{\frac{١}{٩}}$ ، $\sqrt{٠{,}٠١}$ ، $\sqrt{٧\frac{١}{٩}}$

١) $\sqrt{\frac{١}{٩}} = \frac{\sqrt{١}}{\sqrt{٩}} = \frac{\cdots}{\cdots}$

٢) $\sqrt{٠{,}٠١} = \sqrt{\frac{١}{١٠٠}}$

٣) $\sqrt{٧\frac{١}{٩}} = \sqrt{\frac{٦٤}{٩}} = \cdots$

$= \cdots$ (لماذا ؟)

تعلمُ أنَّ ٨، ٢٧، مكعّباتٌ كاملة، وأنَّ $\sqrt[٣]{٨} = ٢$ ، $\sqrt[٣]{٢٧} = ٣$، فهلْ يمكن إيجاد الجذر التكعيبيّ لأيّ عددٍ نسبيّ؟

تعريف: إذا كان جـ $= \frac{\text{أ}^{٣}}{\text{ب}^{٣}}$، ب $\neq$ ٠، فإنّ $\sqrt[٣]{\text{جـ}}$ عددٌ نسبيّ، $\sqrt[٣]{\text{جـ}} = \sqrt[٣]{\frac{\text{أ}^{٣}}{\text{ب}^{٣}}} = \frac{\sqrt[٣]{\text{أ}^{٣}}}{\sqrt[٣]{\text{ب}^{٣}}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

نشاط ٢:

أُكْمِلُ إيجاد قيمةِ كلٍّ من الآتي: $\sqrt[٣]{\frac{٢٧}{٨}}$ ، $\sqrt[٣]{-٠{,}٠٠١}$

أ) $\sqrt[٣]{\frac{٢٧}{٨}} = \frac{\sqrt[٣]{٣^{٣}}}{\sqrt[٣]{٢^{٣}}} = \cdots$

ب) $\sqrt[٣]{-٠{,}٠٠١} = \sqrt[٣]{\frac{-١}{١٠٠٠}} = \cdots$

تَمارينُ وَمَسائِل:

١) أَجِدُ قيمةَ كلٍّ من الآتي: $\sqrt{\frac{٣٦}{٢٥}}$ ، $\sqrt{٥\frac{٤}{٩}}$ ، $\sqrt{٠,٦٤}$

٢) أَجِدُ قيمة كلٍّ من الآتي: $\sqrt[٣]{١٥\times١٥\times١٥}$ $\sqrt[٣]{\frac{٨}{١٢٥}}$ $\sqrt[٣]{-٠,٠٠٨}$ $\sqrt[٣]{٣\frac{٣}{٨}}$

٣) أُكْمِلُ الأنماط الآتية:

أ) $\frac{١}{\sqrt{٩}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{١٦}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢٥}}$ ، ____ ، ____ ، ____ .

ب) $\sqrt[٣]{-٨}$ ، $\sqrt[٣]{-٢٧}$ ، $\sqrt[٣]{-٦٤}$ ، ____ ، ____ ، ____ .

مهمة تعليمية

صُمِّمَ مكعّبَ بحيث يكون حجمه $\frac{٧٢٩}{٨}$ سم^{٣}، فما طول ضِلْعِ هذا المكعّب؟

١-٣ مقارنة الأعداد النسبيّة

نشاط ١:

أُكْمِلُ مقارنةَ كلِّ زوجٍ من الأعدادِ الآتيةِ، وَأُفَسِّرُ إجابَتي:

أ) $-\frac{٥}{٧}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ب) $-\frac{٥}{٨}$ ، $-\frac{٣}{٤}$ ج) ٢,٥٤ ، ٢,٤٥

أ) $-\frac{٥}{٧} < \frac{٣}{٤}$؛ لأنّ ....

ب) $-\frac{٣}{٤} = \frac{-٣\times...}{٤\times...} = \frac{...}{...}$

ومنها $-\frac{٥}{٨}$ □ $-\frac{٣}{٤}$

ج) ٢,٥٤ □ ٢,٤٥ ؛ لأن ....

أُناقِشُ طُرُقاً أُخْرى لإجراءِ عمليّةِ المقارنة بين عددَيْنِ نسبيّيْن.

نشاط٢:

أُرَتِّبُ الأعدادَ الآتيةَ تصاعديّاً: ١,٧٥ ، $-\sqrt[٣]{\frac{٢٧}{٨}}$ ، $\sqrt{١\frac{٥}{٤}}$

$\sqrt{١\frac{٥}{٤}} = \sqrt{\frac{٩}{٤}} = ... = ١,٥$

ومنها يصبح التّرتيبُ التصاعديُّ لهذهِ الأعداد : $-\sqrt[٣]{\frac{٢٧}{٨}}$ ، .... ، .....

تَمارينُ وَمَسائِل:

١) أَضَعُ الإشارةَ المناسبةَ (< أو > أو =) في ☐ فيما يأتي، وَأُوَضِّحُ السَّبَب:

أ) $\frac{\sqrt{٩}}{\sqrt[٣]{٦٤}}$ ☐ $\frac{٣}{٢}$ ب) $\sqrt[٣]{\frac{١}{٦٤}}$ ☐ ٠,٢٤

ج) $٠,\overline{٤}$ ☐ $\frac{٤}{٩}$ د) $\sqrt{١\frac{٩}{١٦}}$ ☐ ١,٧٧

٢) أُرَتِّبُ الأعدادَ الآتيةَ ترتيباً تنازليّاً: ١ ، $-٢\frac{١}{٤}$، صفر، $\frac{٣}{٢}$ ، -١,٧٥

مهمة تعليمية

يريدُ شريفٌ تغطيةَ الوجهِ العُلويِّ لخزانٍ مكعّبِ الشّكل، حجمُهُ $\frac{٢٧}{٨}$ م^{٣} ، باستخدامِ صفيحةٍ رقيقةٍ مربّعةِ الشَّكْل، مِساحةُ سطحِها $\frac{٣٦}{٢٥}$ م^{٢}، فَهَلْ سيتمكّنُ شريفٌ من ذلِك؟ أُوَضِّحُ إجابَتي.

١-٤ جمعُ الأعداد النسبيّة وطرحُها

نشاط ١: أُكْمِلُ ما يأتي، وأَجِدُ ناتجَ الجمع:

١) $\frac{٢}{٧} + \frac{-٣}{٥} = \frac{٢\times ... + ٧\times ...}{٧\times ...} = \frac{... + ...}{...} = \frac{...}{...}$

٢) $\frac{٧}{-٣} + -٠,٤ = \frac{-٧}{٣} + \frac{-٤}{١٠} = \frac{-٧٠ + ...}{٣\times ...} = ...$ لماذا؟

أُلاحِظُ أنَّ $\frac{١}{٣} + \frac{٢}{٥} = \frac{١\times٥ + ٣\times٢}{٣\times٥}$، وبشكلٍ عامٍّ يمكنُ جمعُ عددينِ نسبيّينِ، وَفْقاً للقاعدةِ الآتية:

لكل $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د} \in$ ن، فإن $\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{د} = \frac{أ د + ب جـ}{ب د}$

أتَعَلَّم: - عمليّةُ الجمع مغلقةٌ* على **ن** (مجموع عددين نسبيين عدد نسبي).
- عملية الجمع تبديلية على **ن** (أ + ب = ب + أ).

نشاط ٢: أُكمِلُ، وأُلاحِظُ :

$(\frac{١}{٢} + \frac{٢}{٥}) + ٠,٣ = (٠,٥ + ٠,٤) + ٠,٣ = ... + ٠,٣ = ١,٢$

$\frac{١}{٢} + (\frac{٢}{٥} + ٠,٣) = ٠,٥ + (٠,٤ + ٠,٣) = ... + ... = ...$ ماذا تلاحظ؟

أتَعَلَّم: عمليّةُ الجمع تجميعيّةٌ على **ن**.

نشاط ٣: أُكْمِلُ الجدولَ الآتي:

العدد	نظيرُهُ الجمعيّ	العددُ + النظير الجمعيّ للعدد	النّظير الجمعيُّ للعدد + العدد
٤	-٤	$٤ + -٤ = ٠$	$-٤ + ٤ = ٠$
$٠,٢٥$	$-٠,٢٥$	$٠,٢٥ + -٠,٢٥ = ٠$	.... + ... = ...
$\frac{-٢}{٥}$	$\frac{٢}{٥}$	$\frac{-٢}{٥} + \frac{٢}{٥} = ٠$	.... + ... = ...
$٠,\overline{٢}$	$-٠,\overline{٢}$	.... + ... = ...	.... + ... = ...

* لكل أ ، ب $\in$ **ن** فإن أ + ب $\in$ **ن**

أتَعَلَّم: لكل عدد نسبي $\frac{أ}{ب}$ يوجد نظير جمعي هو العدد $-\frac{أ}{ب}$ بحيث أنَّ

$\frac{أ}{ب} + -\frac{أ}{ب} = -\frac{أ}{ب} + \frac{أ}{ب} = ٠$.

نشاط ٤:

أُلاحِظُ عمليّةَ الطَّرحِ الآتيةَ، ثُمَّ أُكْمِل:

أ) $\frac{٢}{٧} - \frac{٥}{٧} = \frac{٢-٥}{٧}$

$= \frac{-٣}{٧}$ ، وهو عددٌ نسبيّ.

ب) $١,٥ - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٢} - \frac{١}{٤}$

$= \frac{...}{٤} - \frac{١}{٤}$

$= \frac{...}{٤}$ ، وهو عددٌ ....

أتَعَلَّم: عمليّةُ الطّرحِ مغلقةٌ على **ن**.

يمكنُ طرحُ أيِّ عددَيْنِ نسبيّيْنِ،

وَفْقاً للقاعدةِ الآتية:

لكل $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ ∈ **ن**، فإن $\frac{أ}{ب} - \frac{جـ}{د} = \frac{أ\,د - ب\,جـ}{ب\,د}$

تَمارينُ وَمَسائِل:

١) أَجِدُ النّاتجَ لِكُلٍّ مِنَ الآتِيَة:

أ) $١,٣ + ٢\frac{٧}{١٠}$ ب) $\frac{٢}{٣} - \sqrt{٠,٠١}$

جـ) $-٧ + -١١$ د) $\frac{-٢}{٣} - \frac{٣}{٥}$

هـ) $\frac{٢}{٥} + \frac{١}{٢} - ٣$ و) $٢,٢٥ + \frac{١}{٢} + ٣$

٣) أُوَضِّحُ بمثالٍ عدديٍّ أنّ عمليّةَ الطَّرْحِ ليست تبديليَّةً على **ن**.

٤) أُوَضِّحُ بمثالٍ عدديٍّ أنَّ عمليّةَ الطَّرْحِ ليست تجميعيَّةً على **ن**.

٥) ما محيطُ مثلَّثٍ أطوالُ أضلاعهُ على التَّرتيبِ: ٢,٥ سم ، ٤,٢٥ سم ، $\sqrt{\frac{٨١}{١٦}}$ سم؟

مهمة تعليمية

تبرَّعَ طلبَةُ الصَّفِّ الأوّلِ لمشروعٍ خَيريٍّ بمبلغ $١٩\frac{١}{٢}$ ديناراً، وتبرّعَ طلبةُ الصَّفِّ الثّاني بمبلغ $١٦\frac{١}{٤}$ ديناراً ، فيما تبرّعَ طلبةُ الصَّفِّ الثّالثِ بمبلغ ٢٢ ديناراً. أَجِدُ:

أ) مجموعَ ما تبرَّعَ به طلبةُ الصّفوفِ الثّلاثِ.

ب) الفرقَ بينَ ما تبرّعَ به طلبةُ الصَّفِّ الأوّلِ عن ما تبرع به طلبة الصف الثاني.

١-٥ ضربُ الأعدادِ النّسبيّةِ وَقِسْمَتُها

نشاط ١: أُكْمِلُ ناتجَ الضّربِ لِكُلٍّ مِنَ الآتِيَة:

أ) $\frac{-٢}{٣} \times \frac{-٧}{٨} = \frac{-٢\times\ldots}{٣\times\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$

ب) $٠,٤ \times \sqrt{\frac{٩}{٤}} = \frac{٤}{١٠} \times \frac{٣}{٢}$ لماذا؟ $= \frac{\ldots}{\ldots}$

جـ) أَجِدُ ناتجَ الضَّربِ في الفَرْعِ (ب)، بتحويلِ المسألةِ لضربِ عددَيْنِ عشريَّيْن.

أتَعَلَّم: عمليّةُ الضِّرْبِ مغلقةٌ * على **ن**.

لضربِ أيِّ عددَيْنِ نسبيّيْنِ، يمكنُ استخدامَ القاعدةِ الآتية:

لكل $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ $\in$ **ن**، فإن $\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{أ\times جـ}{ب\times د}$

مثال ١:

حديقةٌ مستطيلةُ الشّكل، طولُها $3\frac{1}{2}$ م، وعرضُها $2\frac{1}{4}$ م، أَجِدُ مِساحتُها.

مِساحةُ الحديقة = الطول × العَرض

$$= 3\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4}$$

$$= \frac{7}{2} \times \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}\ \text{م}^2$$

نشاط٢:

أُكمِلُ لأجد: ١) $\left(\frac{3}{5} \times \frac{4}{10}\right) \times \frac{3}{2} = \frac{12}{50} \times \frac{3}{2} = \frac{\ldots}{\ldots}$

٢) $\frac{3}{5} \times \left(\frac{4}{10} \times \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{12}{20} = \frac{\ldots}{\ldots}$ (ماذا تلاحظ؟)

أَتَعَلَّم: عمليّةُ الضرب تّجميعية على **ن**.

نشاط٣:

أُكْمِلُ عمليّاتِ الضّربِ الآتية:

$2{,}9 \times 1 = 2{,}9$ ، $1 \times 2{,}9 = \ldots$ ، $1\frac{4}{7} \times 1 = 1$ ، $1 \times 1\frac{4}{7} = \ldots$ (ماذا تلاحظ؟)

أَتَعَلَّم: العددُ (١) هُوَ العنصرُ المحايدُ في عمليَّةِ ضربِ الأعدادِ النِّسبيّة **ن**.

تعريف: لأيِّ عددٍ نسبيٍّ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، أ $\neq$ ٠ يوجَدُ نظيرٌ ضَرْبِيٌّ هو العددُ $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

* لكل أ ، ب $\in$ **ن** فإن أ×ب $\in$ **ن**

نشاط ٥: أُكْمِلُ الجدولَ الآتي:

النّظير الضّربي للعدد	العددُ بالصّورة $\frac{أ}{ب}$	العدد
$\frac{١}{٤}$	$\frac{٤}{١}$	٤
$\frac{-٥}{٣}$	$\frac{-٣}{٥}$	$\frac{-٣}{٥}$
	$\frac{٣}{٢}$	١,٥
	$\frac{٧}{٢}$	
		$\sqrt{٧\frac{١}{٩}}$

أتَعَلَّم: يمكن توزيع الضرب على الجمع في مجموعة الأعدادِ النِّسبيّة **ن**.

نشاط ٦: أُكْمِلُ حلَّ كُلٍّ مِنَ الآتية:

أ) $\frac{-١}{٣} \div \frac{٤}{٥} = \frac{-١}{٣} \times \frac{٥}{٤} = \frac{...}{...}$

ب) $٢\frac{١}{٨} \div -\frac{١}{٤} = \frac{١٧}{٨} \div -\frac{١}{٤}$ (لماذا؟)

$= \frac{١٧}{٨} \times -٤$ (لماذا؟) $= ...$

جـ) $١,٥ \div \frac{١}{٣} = ١,٥ \times ٣ = ...$

د) أَقْتَرِحُ طريقةً أُخرى لإكمالِ الحلّ في الفَرْعِ جـ.

أتَعَلَّم: يمكن قسمة أي عددينِ نسبيينِ اعتماداً على القاعدة الآتية:

لكل $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ $\in$ **ن**، جـ $\neq$ ٠ فإن $\frac{أ}{ب} \div \frac{جـ}{د} = \frac{أ}{ب} \times \frac{د}{جـ}$

تَمارينُ وَمَسائِل:

١) أَجِدُ ناتجَ ما يأتي:

أ) $٢,٥ \times \frac{-٤}{٥}$ ب) $\frac{-١}{٣} \times \sqrt{\frac{٩}{٤}} \times ٢,٥$ جـ) $\frac{-٢}{٣} \div \frac{١}{٩}$ د) $\frac{-١}{٣}(٠,٦ + ٩٠)$

٢) أَجِدُ كلّاً ممّا يأتي:

أ) النّظير الضّربي للعدد $\frac{-٢}{٧}$ ب) (النّظير الضّربي للعدد $\frac{٥}{٢}$) + ١

٣) أُبيِّنُ بمثالٍ عدديٍّ:

أ) عمليّة القسمة ليست تبديليَّة على **ن**. ب) عمليّة القسمة ليست تجميعيَّة على **ن**.

١-٦ العدد غير النسبيّ

تعريف: يُسمّى العدد الذي لا يمكن كتابته على الصورة $\frac{أ}{ب}$، أ، ب، ∈ **ص**،ب ≠ ٠ عدداً غير نسبيّ. ويُرْمَزُ لمجموعة الأعداد غير النسبيّة بالرمز **$\bar{ن}$**.

نشاط١:

أُكمِلُ كلّاً من الآتية:

أ) العدد ٢,١٢٢٣١٢٢٢٣١→ عدد غير نسبيّ محصور بين ٢ ، ٢,٢ * (لماذا؟)

ب) العدد .... غير نسبيّ محصور بين ٥,٦ ، ٥,٧

جـ) العدد .... غير نسبيّ محصور بين ٣,٨ ، ٣,٩

ملاحظات

- إذا كان جـ عدداً نسبيّاً موجباً، جـ ليس مربّعاً كاملاً، فإنّ $\sqrt{جـ}$ عدد غير نسبيّ ، وبالمثل، إذا كان جـ عدداً نسبيّاً وكان جـ ليس مكعّباً كاملاً فإن $\sqrt[٣]{جـ}$ عدد غير نسبيّ**.
- العدد ٣ + $\sqrt{٢}$ عدد غير نسبيّ لأن الجزء العشريّ في ناتج الجمع غير منته وغير دوريّ. وبالمثل فإن أي عدد بالصورة (أ + ب) ، أ ∈ **ن** و ب ∈ **$\bar{ن}$** هو غير نسبيّ.
- النِّسبة التقريبيّة □ (هي نسبة محيط الدائرة إلى قطرها) وهي عدد غير نسبيّ.
- ك □ عدد غير نسبي لكل ك ∈ **ن**، ك ≠ صفر.
- النِّسبة الذهبية عدد غير نسبيّ.

* يميز العدد العشري غير النسبي بوضع → على يمين الفاصلة العشرية.

** تسمى هذه الجذور بالجذور الصماء.

نشاط٢:

أُكْمِل: أيُّ الآتية عدد غير نسبيّ، وأُوَضِّحُ السبب. $\sqrt{١٠}$ ، $\sqrt{٠,٢٥}$ ، $\sqrt[٣]{٢٥}$ ، $\sqrt[٣]{\square}$

الحلّ: $\sqrt{١٠}$ غير نسبيّ؛ لأنّ ١٠ ليست مربّعاً كاملاً في **ن**. $\sqrt{٠,٢٥}$ نسبيّ؛ لأنّ ٠,٢٥ مربّع للعدد ....

$\sqrt[٣]{٢٥}$ غير نسبيّ؛ لأنّ ٢٥ ليست مكعّباً كاملاً. $\sqrt[٣]{\square}$ غير نسبيّ؛ لأنّه . . . .

يمكن أحياناً كتابة الجذور التّربيعيّة بصورة أبسط، اعتماداً على التعريف الآتي:

تعريف: إذا كانت أ، ب أعداداً غير سالبة، فإن: $\sqrt{أب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$

نشاط٣:

أَكْتُبُ بأبسط صورة كلّاً ممّا يأتي: $\sqrt{٤٤}$ ، $\sqrt{٤٥}$

$$\sqrt{٤٤} = \sqrt{٤ \times ١١} = \sqrt{٤} \times \sqrt{١١} = \ldots$$

$$\sqrt{٤٥} = \sqrt{\ldots \times \ldots} = \sqrt{\ldots} \times \sqrt{\ldots} = \ldots$$

يمكن تبسيط الجذور التكعيبيّة باستخدام التعريف الآتي:

تعريف: لأيّ عددين أ، ب، فإن $\sqrt[٣]{أب} = \sqrt[٣]{أ} \times \sqrt[٣]{ب}$

تَمارينُ وَمَسائِل:

١) أيُّ الآتية عددٌ غيرُ نسبيّ؟ أُوَضِّحُ إجابتي. $\sqrt{٢٧}$ ، $\sqrt{٠,٤}$ ، $\sqrt[٣]{\frac{١}{٦٤}}$ ، ٠,٢٥٢٢٥٢٢٢٥ ←

٢) أَكْتُبُ بأبسط صورة كُلّاً من: $\sqrt{٦٣}$ ، $\sqrt[٣]{٥٦}$

٣) أُعطي قيمة تقريبيّة للعدد $\sqrt{٧٠}$

مهمة تعليمية

أكتبُ أكبر عدد نسبي، وأصغر عدد نسبي يمكن تكوينهما بقسمة عددين من الأعداد الآتية: -٢، -١، -١٨، ١.

١-٧ العمليّات على الأعداد غير النسبيّة

أتَعَلَّم: عمليّة الجمع تبديليّة على نَ.

نشاط ١:

أَجِدُ بأبسط صورة قيمة المقدار $(٣ + \sqrt{٥}) - (٥ + \sqrt{٢٠})$

$(٣ + \sqrt{٥}) - (٥ + \sqrt{٢٠}) = ٣ + \sqrt{٥} - ٥ - \sqrt{٢٠}$

$= (٣ - ٥) + (\sqrt{٥} - \sqrt{٢٠})$ (لماذا؟)

$= \ldots + \sqrt{٥} - \sqrt{٤ \times ٥}$

$= -٢ + \sqrt{٥} - ٢\sqrt{٥}$ (لماذا؟)

$= -٢ - \ldots$

نشاط ٢:

ما مِساحةُ صالةٍ رياضيَّةٍ مستطيلةِ الشّكل، طولُها $(٢٠ + \sqrt{٣})$ م، وعرضُها $(٢٠ - \sqrt{٣})$ م؟

مِساحةُ الصّالة = الطول × العرض $= (٢٠ + \sqrt{٣})(٢٠ - \sqrt{٣})$

$= ٢٠ \times ٢٠ + ٢٠ \times -\sqrt{٣} + \sqrt{٣} \times ٢٠ + \sqrt{٣} \times -\sqrt{٣}$

$= ٤٠٠ - ٢٠\sqrt{٣} + ٢٠\sqrt{٣} - \ldots = \ldots - \ldots$

$= ٣٩٧$ م^{٢} (لماذا؟)

أتَعَلَّم: عمليّة الضرب ليست مغلقة على مجموعة الأعداد غير النسبية.

نشاط ٣:

أُبيِّنُ أن $(\sqrt{٢} \times \sqrt{٥}) \times \sqrt{١٠} = \sqrt{٢} \times (\sqrt{٥} \times \sqrt{١٠})$.

$(\sqrt{٢} \times \sqrt{٥}) \times \sqrt{١٠} = \sqrt{١٠} \times \sqrt{١٠} = ١٠$ (لماذا؟)

$\sqrt{٢} \times (\sqrt{٥} \times \sqrt{١٠}) = \sqrt{٢} \times \sqrt{٥٠} = \sqrt{\ldots} = \ldots$

أتَعَلَّم: عمليّة الضرب تجميعية على مجموعة الأعداد غير النسبية، وأن لكل أ، ب، جـ أعداد غير سالبة فإن $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} \times \sqrt{جـ} = \sqrt{أ\ ب\ جـ}$

تَمارينُ وَمَسائِل:

أَجِدُ قيمة الآتي بأبسط صورة:

أ) $\sqrt{٣} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٦}$

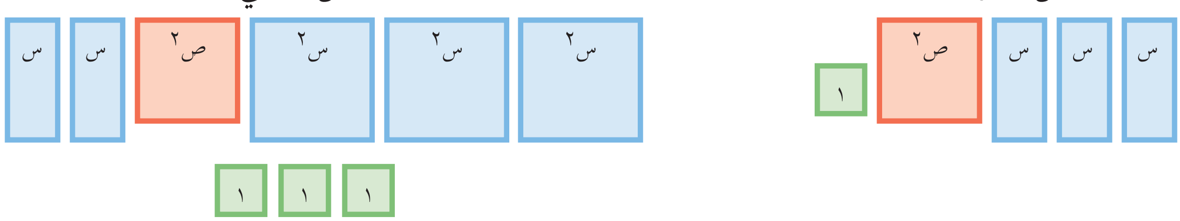
ب) $\sqrt{٢٧} + ٥\sqrt{٨} + \sqrt{١٢} + \sqrt{٢}$

مهمة تعليمية

ما محيط مستطيل، أبعاده بالمتر: $(\sqrt{٢٠} - \sqrt{٢})$ ، $(\sqrt{٨} + \sqrt{٥})$

١-٨ جمع المقادير الجبريّة وطرحها

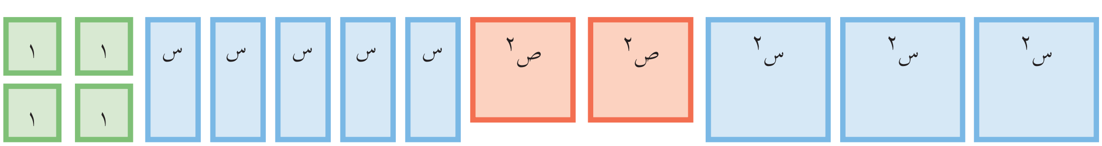
نشاط ١: أتأمَّل التَّمثيليْنِ الآتييْنِ بالقِطَع الجبريّة لمقداريْنِ جبريّيْنِ، وأَجِدُ مجموعَها:



التّمثيل الأوّل يمثّل المقدار = ٣س + ص٢ + ١

التّمثيل الثّاني يمثّل المقدار = ٣س٢ +.........+ ٢س +........

لدى تجميع القِطَع الجبريّة الممثلة لمجموع المقدارين الجبريّين



أُلاحِظُ أنَّ مجموع المقدارين الجبريّين= ٣س٢ + ... + ٥س +.....

أَتَذَكَّـر: عنـد جمـع مقداريـن جبريّيـن أو طرحهمـا، تُجمَـع معامـلات الحـدود المتشـابهة فـي المقاديـر الجبريّـة أو تُطـرَح.

نشاط٢:

أُكْمِلُ إيجاد ناتج الجمع في كلٍّ من الآتية:

١) ٤س + ٧س + ٢ = ١١س + ٢

٢) أ^{٢} + ٣أب + ٢أ^{٢} + أب = ... + ٤أب

٣) م + ٣(٥ن − ٣م) = م + ١٥ن − .... = ...

٤) أ + ٢ب + ٣(أ + ١) −٢(ب − ٣) = أ + ٢ب + ٣أ + ٣ − ٢ب + ٦ (لماذا؟)
= ٤أ + ...

٥) (٥س^{٢} + ٣س + ٤) + (٥س^{٢} + ٥س − ٦) = ... + ... + ...

تَمارينُ وَمَسائِل:

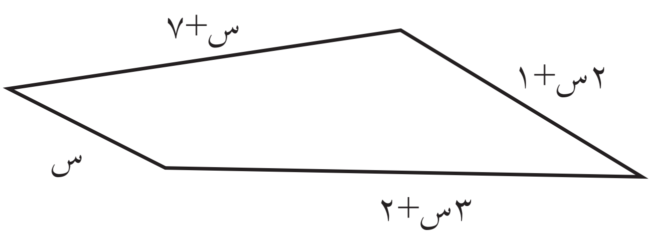
١) أَجِدُ ناتج ما يأتي في أبسط صورة:

أ) (٣ب^{٢} − ٢أب + ٣) + (٥أ^{٢} + ٢أ + أب − ٦)

ب) (−ص^{٢} + ٥ص − ٦) + (٢ص^{٢} − ٣ص + ٥)

جـ) (٩س^{٢} − ٣س + ٥) − (٣س^{٢} + ٢س − ١) + (س^{٢} − ٢س − ٣)

٢) حديقة على الشكل الآتي، يراد أحاطتها بسياج، فما طول السياج بأبسط صورة:



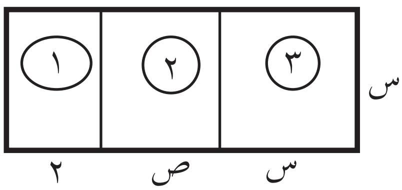
مهمة تعليمية

مُثِّلَتْ مِساحة صفيحة معدنيّة بالمقدار (٣ص^{٢} + ٣ص + ٢)، فإذا قُطِعَ منها جزءٌ مِساحتُه (ص^{٢} + ٢ص)، أَكْتُبُ المقدار الجبريّ الذي يعبّر عن مِساحة القِطْعة المتبقّية من الصّفيحة.

ضرب المقادير الجبريّة

نشاط ١:

تريد شركة إعلانات تغطية لوحة إعلانات بلوح زجاجيّ شفّاف، مكون من ثلاث قِطَع، فما مِساحة هذا اللوح الزجاجي؟ أرسم مخطّطاً للّوحة، وأُرَقِّمُ القِطَع الثلاث بالأرقام ١، ٢، ٣، كما في الشّكل المجاور.



أتأمَّل المخطّط، ثُمَّ أُكْمِل الجدول الآتي:

عرض اللوحة = ... ، طول اللوحة = ...

مِساحة اللوحة = س (س + ص + ٢) (لماذا؟)

أيضاً مِساحة اللوحة = مجموع مساحات القِطَع الثلاث

= س^{٢} + س ص + ٢س ومنها

س (س + ص + ٢) = س^{٢} + س ص + ٢س (لماذا؟)

رقم القِطْعة	طولها	عرضها	مساحتها
١	س	٢	٢س
٢	س	ص	س ص
٣	س	س	س^{٢}

أتذكّر: عند ضرب حدٍّ جبريّ في مقدار جبريّ، تستخدم خاصيّة توزيع الضّرب على الجمع، وبالرموز أ(ب + جـ) = أب + أجـ، ومن الممكن استخدام هذه الخاصيّة لأيِّ عدد من الحدود.

أتَعَلَّم: عند ضرب مقداريْن جبريّيْنِ على الصّورة (أ + ب) (جـ + د)، تُستخدَم خاصيّة توزيع الضرب على الجمع؛ أي أنّ:

(أ + ب) (جـ + د) = أ (جـ + د) + ب (جـ + د).

نشاط ٢:

أَجِدُ ناتج ما يأتي بأبسط صورة:

١) ٣(س^{٢} − ١) + س (٥س− ١) = ٣س^{٢} − ٣ + س × ٥س + س× -١ (لماذا؟)

= ....

٢) ٢أب (أ^{٢} + ٥ب^{٢}) = ٢أب × أ^{٢} + ٢أب × ٥ب^{٢} (لماذا؟)

= ٢أ^{٣}ب + ...

٣) (٥م ل + ٣) (٣ل + م) = ٥م ل (٣ل + م) + ٣ (٣ل + م)

= (١٥م ل^{٢} + ٥م^{٢} ل) + (....... + ...)

تعريف: مفكوك مربّع مجموع حدّيْن = مربّع الحدّ الأوّل + ٢× الحدّ الأوّل × الحدّ الثّاني + مربّع الحدّ الثّاني، وبالرموز: (أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}

يُكتَب مربّع الفرق بين الحدّيْن أ، ب بالصورة (أ − ب)^{٢} ، ويمكن بيان أنّ:

(أ − ب)^{٢} = أ^{٢} −٢أب + ب^{٢}، وبالكلمات:

مفكوك مربّع الفرق بين حدّيْن = مربّع الحدّ الأوّل − ٢× الحدّ الأوّل × الحدّ الثّاني + مربّع الحدّ الثّاني

نشاط٣:

أُكمِلُ إيجاد مفكوك كلٍّ من الآتية:

١) (س + ١)^{٢} = مربّع الحدّ الأوّل + ٢ × الحدّ الأوّل × الحدّ الثّاني + مربّع الحدّ الثّاني

= س^{٢} + ٢ × س × ١ + ١ = س^{٢} + ٢س + ١

٢) (٢س + ٢)^{٢} = (٢س)^{٢} + ٢(٢س)(٢) + ٢^{٢} = ٤س^{٢} + ... + ...

٣) (س − ٣)^{٢} = س^{٢} − ٢(س)(٣) + (٣)^{٢} = س^{٢} − ... + ...

٤) (٢ − س)^{٢} = (٢)^{٢} − ٢(٢)(س) + (س)^{٢} = ... − ...... + ...

تَمارينُ وَمَسائِل:

١) أَجِدُ ما يأتي بأبسط صورة:

أ) (س + ٢) (س + ٣)

ب) س ص (٣س + ٤ص + ١)

جـ) (٣س + ص)^{٢}

د) (٢س − ٣ص)^{٢}

٢) أَكْتُبُ ناتج ضرب المقداريْنِ (٣ف + ٢)، (٣ف − ٢)، وأَجِدُ قيمة ناتج الضّرب عندما ف = ٤

مهمة تعليمية

إذا كانت (أ + ب) = ٨، أ^{٢} + ب^{٢} = ٤٠، فما قيمة كلٍّ من:

أ) (أ + ب)^{٢}

ب) أب

جـ) (أ − ب)^{٢}

١٠-١ تحليل المقادير الجبريّة بإخراج العامل المشترك

نشاط ١:

أُكْمِلُ تحليل المقادير الجبريّة الآتية إلى عواملها:

١) $٦أ + ١٨أ^٢$

$١٨أ^٢ = ٣ \times ٦ أ \times أ$ ، أُلاحِظُ أنَّ ع.م.أ للحدّيْن $(٦أ، ١٨أ^٢) = ٦أ$

$٦أ + ١٨أ^٢ = ٦أ + ٣ \times ٦ أ \times أ$

ومنها: $٦أ + ١٨أ^٢ = ٦أ (١ + ٣أ)$

٢) $١٦أس + ١٤س^٢ ص = ٨ \times ٢ \times أ \times س + ٢ \times ٧ \times س \times س \times ص$

إذن: $١٦أس + ١٤س^٢ص = ٢س(...... + ...)$ (لماذا؟)

٣) $أ (٣ب - ٤) - ٨ (٣ب - ٤)$

$أ (٣ب - ٤) - ٨ (٣ب - ٤) = (٣ب - ٤) (..... - .....)$ (لماذا؟)

أتَعَلَّم: يمكن تحليل بعض المقادير الجبريّة عن طريق تجميع الحدود، ثُمَّ إخراج العوامل المشتركة.

نشاط ٢:

أُكْمِلُ تحليل المقدار الجبريّة الآتي إلى عوامله:

$(أس - أص + ب س - ب ص) = أ(س - ص) + ب(س - ص)$

$= (س - ص) (أ + ...)$

ويمكن تحليل المقدار السابق كالآتي:

$(أس - أص) + (ب س - ب ص) = (أس + ب س) + (- أص - ب ص)$ (لماذا؟)

$= س(أ + ب) - ص(أ + ب)$

$= (أ + ب)(س - ...)$ (لماذا؟)

تَمارينُ وَمَسائِل:

١) أُحَلِّلُ المقادير الآتية إلى عواملها:

أ) ١٤أ ب + ٢١أ ب^{٢}

ب) (أ + ١)(أ − ٢) − (أ + ١)(أ − ٤)

جـ) −٥س ص − ٤٠ص^{٢}

٢) أُحَلِّلُ المقادير الآتية إلى عواملها الأوّلية:

أ) س ص + ٢س + ٢ص + ٤

ب) ١٢ + ٨ص − ٣س − ٢س ص

جـ) ٢٠أهـ + ٤ب هـ + ١٠أ س + ٢ب س

مهمة تعليمية

مِساحة مستطيل بالمتر المربع تساوي ٣س^{٢} + ٥س، فما طول هذا المستطيل، إذا كان عرضه يساوي س متراً؟

١-١١ تحليل العبارة التَّربيعيّة

تعريف: العبارة التَّربيعيّة: هي مقدارٌ جبريٌّ يمكن أن يُكْتَبَ بالصّورة (أ س^{٢} + ب س + جـ)، حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة، أ $\neq$ صفر.
ويُسَمّى أ: معامل س^{٢} ، ب : معامل س، جـ: الحدّ الثابت.

نشاط١:

حدد أيٍّ من المقادير الجبريّة الآتية يمثّل عبارة تربيعيّة، ثم أَكْتُبُ للعبارة التَّربيعيّة منها، قيم كلٍّ من أ، ب، جـ.

١) س^{٢} + ٥ س + ٦ ، عبارة تربيعيّة فيها: أ = ١ ، ب = ٥، جـ = ٦

٢) س^{٢} + ٩ - ٦س ، عبارة تربيعيّة فيها: أ = ... ، ب = ... ، جـ = ...

٣) س^{٣} + س + ٦ ، .... ، ......

٤) ٥(س - ١) ، ليست عبارة تربيعيّة (لماذا؟)

٥) ٨ - س^{٢} - ٢س ، .... فيها، أ = ... ، ب = ... ، جـ = ...

تعريف: تُسَمّى العبارة التَّربيعيّة المكتوبة بالصّورة س^{٢} ± ٢ د س + د^{٢} مربّعاً كاملاً، ويكون تحليلها بالصّورة (س ± د) (س ± د) = (س ± د)^{٢}.

نشاط٢:

أُكْمِلُ الآتي بتحليل العبارات التَّربيعيّة المعطاة إلى عواملها:

١) س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = (س)^{٢} + ٢ × ٥ × س + (٥)^{٢} = (س + ٥) (س + ٥) = (..........)^{٢}

٢) س^{٢} - ٨س + ١٦ = (س)^{٢} - ٢ × ٤ × س + (...)^{٢}
= (س - ....)^{٢}

٣) ٤س^{٢} - ٢٠س + ٢٥ = (٢س)^{٢} - ٢ × ٥ × ٢س + (....)^{٢}
= (٢س - ....)(٢س - ....) = (..........)^{٢}

أَتَعَلَّم: لتحليل العبارة التَّربيعيّة المكتوبة بالصّورة س^{٢} + ب س + جـ، يتم إيجاد عددَيْن م، ن، بحيث ب = م + ن، جـ = م × ن

فيكون تحليل العبارة س^{٢} + ب س + جـ على الصّورة (س + م)(س + ن)

نشاط٣:

أُكْمِلُ الآتي بتحليل العبارات التَّربيعيّة إلى عواملها الأوّلية:

١) س^{٢} + ٧س + ١٠

أُلاحِظُ أنَّ: جـ = ١٠ = ٢ × ٥

ب = ٥ + ٢ = ٧

إذن: س^{٢} + ٧س + ١٠ = (س + ٥)(س + ٢)

٢) س^{٢} − ٤س + ٣ = (س − ٣)(س − ....)

٣) س^{٢} − ١١س + ١٨ = (س − ٩)(س − ....)

٤) ص^{٢} − ١٦ص + ٦٣ = (........)(........)

أُلاحِظُ أنَّه إذا كانت إشارة جـ موجبة، فإنّ م، ن متشابهَيْنِ في الإشارة، وتكون إشارتُهُما تَبَعاً لإشارة ب.

نشاط٤:

أُكْمِلُ الآتي بتحليل العبارات التَّربيعيّة إلى عواملها الأولية:

١) س^{٢} + ٢س − ٣

أُلاحِظُ أنَّ: جـ = −٣ = +٣ × −١ ، ب = +٢ = ٣ + −١

ومنها: س^{٢} + ٢س − ٣ = (س + ٣)(س − ١)

٢) س^{٢} − ١٠س − ٢٤

أُلاحِظُ أنَّ: جـ = −٢٤ = −١٢ × ٢

ب = −١٠ = −١٢ + ٢

ومنها: س^{٢} − ١٠س − ٢٤ = (س + ٢)(س − ...)

٣) س^{٢} + ٤س −٥ = (س + ...)(س − ...)

أُلاحِظُ أنَّه إذا كانت إشارة جـ سالبة، فإنّ م، ن مختلفانِ في الإشارة، وتَتْبَعُ إشارةُ الأكبرِ منهما إشارةَ ب.

نشاط ٥:

أُكْمِلُ تحليل العبارات التَّربيعيّة إلى عواملها الأوّلية:

١) ٣س^{٢} − ١٦س + ٢١

عوامل الحدّ ٣س^{٢} ← { ٣س ، س } { −٧ ، −٣ } → عوامل الحدّ ٢١

٣س	−٧
س	−٣

ب = −٩س + −٧س = ... (لماذا؟) ومنها: ٣س^{٢} − ١٦س + ٢١ = (٣س − ٧)(س − ٣)

٢) ٢س^{٢} + ٧س − ٢٢ = (٢س + ١١)(س − ٢)

٣) ٦ص^{٢} −١٩ص + ١٠ = (٢ص − ....)(٣ص − ....)

تَمارينُ وَمَسائِل:

١) أُحَلِّلُ العبارات التَّربيعيّة الآتية إلى عواملها الأولية:

أ) س^{٢} − ١٤س + ٢٤

ب) ٩س^{٢} − ٦س ص + ص^{٢}

جـ) ٦ص^{٢} + ١١ص $\frac{١}{٤}$ − ١٠

د) س^{٢} − س +

٢) ما قيم ك الّتي تجعلُ تحليل العباراتِ التَّربيعيّةَ الآتيةَ صحيحاً:

أ) س^{٢} + ك س − ١٩ = (س − ١٩) (س + ١)

ب) س^{٢} + ك س + ١٤ = (س − ٢) (س − ٧)

مهمة تعليمية

أَكْتُبُ تعبيراً جبريّاً يمثّل محيط لوح خلايا شمسية مستطيلة الشكل، مِساحتها (س^{٢}+ ٢٤س − ٨١).

١-١٢ تحليل الفَرْق بين مربّعيْن

تعريف: الفرق بين مِساحتي مربّعيْنِ تساوي مِساحة مستطيل، طولُه (مجموع ضِلْعَي المربّعيْن)، وعرضُه الفرق بين طولَي ضِلْعَي المربّعيْن، وَيُعَبَّرُ عن ذلك بالرّموز $س^{٢} - ص^{٢} = (س + ص)(س - ص)$.

نشاط١:

أُكْمِلُ تحليل العبارات الآتية:

١) $ص^{٢} - ٢٥ = (ص)^{٢} - (٥)^{٢} = (ص - ٥)(ص + ٥)$

٢) $س^{٢} - ٥ = (س + \ldots)(س - \ldots)$

٣) $٤ص^{٢} - ١٤٤ = (٢ص)^{٢} - (١٢)^{٢} = (٢ص + \ldots)(\ldots\ldots - \ldots)$

٤) $٢٥م^{٢} - ٩ل^{٢} = (٥م + \ldots)(٥م - \ldots)$

نشاط٢:

١) أُكْمِلُ الفراغاتِ في الآتية:

أ) $ص^{٢} - (\ldots\ldots)^{٢} = (\ldots\ldots + ٨)(\ldots\ldots - ٨)$

ب) $٤أ^{٢} - \ldots\ldots = (٢أ - ٩)(٢أ + ٩)$

جـ) $١٤٤أ^{٢} - ١٠٠ب^{٢} = (١٢أ - \ldots\ldots)(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

تَمارينُ وَمَسائِل:

١) أَكْتُبُ ناتج ما يأتي بأبسط صورة:

أ) $(ص - ٩)(ص + ٩)$ ب) $(٦س + ١)(٦س - ١)$

٢) أُحَلِّلُ المقادير الآتية:

أ) $س^{٢} - ٣٦$ ب) $ص^{٢} - ٢٥$ جـ) $٨س^{٢} - ٧٢$

٣) أَجِدُ القيمة العدديّة للمقدار $(٦٧٥)^{٢} - (٣٢٥)^{٢}$ بطريقتين.

مهمة تعليمية

مربّعانِ يزيد طولُ ضِلْعِ الأوّل عن طولِ ضِلْعِ الثّاني وحدة واحدة، وتزيد مِساحة الأوّل عن مِساحة الثّاني ٧ وحدات مربّعة، فما طولُ ضِلْعِ المربّع الأصغر؟

١-١٣ قسمة المقادير الجبريّة

نشاط ١:

أَجِدُ ناتج القسمة في كُلٍّ ممّا يأتي:

أ) $(٢٦هـ^٢ + ١٤هـ^٤) \div ٢هـ$

$$(٢٦هـ^٢ + ١٤هـ^٤) \div ٢هـ = \frac{٢٦هـ^٢ + ١٤هـ^٤}{٢هـ} = \frac{٢٦هـ^٢}{٢هـ} + \frac{١٤هـ^٤}{٢هـ}$$

$$= ١٣هـ + ...$$

ب) $(٩ل^٣م^٤ - ١٨ل م^٢) \div ٣ل م^٢ = \frac{٩ل^٣م^٤ - ١٨ل م^٢}{٣ل م^٢}$

$$= \frac{٩ل^٣م^٤}{٣ل م^٢} - \frac{١٨ل م^٢}{٣ل م^٢} = ... - ....$$

عند قسمة مقدار جبريّ على حدّ جبريّ لا يساوي صفر، يمكن قسمة كُلّ حدّ من حدود المقدار الجبريّ على هذا الحدّ.

نشاط ٢:

أَسْتَخْدِمُ التّحليل إلى العوامل في إيجاد نواتج قسمة المقادير الآتية:

١) $(س^٢ + ٥س + ٤) \div (س + ١) = (س + ٤)(س + ١) \div (س + ١) = ...$

٢) $(س^٢ - ٤) \div (س + ٢) = (س - ٢)(..........) \div (س + ٢) = ...$

٣) $(س^٢ - ٣س) \div (س - ٣) = س(س - ...) \div (س - ٣) = ...$

تَمارينُ وَمَسائِل:

١) أَجِدُ ناتج ما يأتي بأبسط صورة:

أ) (٢٧أ^{٢}س^{٧}) ÷ (٩أس)   ب) (س^{٢} + ٧س + ١٢) ÷ (س + ٣)

٢) إذا كان ناتج ضرب حدّيْنِ جبريّيْنِ هو -٦٤س^{٣} ص^{٣} ، وكان الأوّل ١٦س^{٢}، أَجِدُ الحدّ الثّاني؟

مهمة تعليمية

حديقة مستطيلة الشّكل، عُبِّرَ عن مِساحتها بالمقدار (س^{٢} + ١٧س + ٣٠) م^{٢} ، وعُبّرَ عن عرضها بالمقدار (س + ٢) م، فما طول هذه الحديقة؟

ورقة عمل

١) أضع دائرة حول رمز الإجابة الصّحيحة:

١ أيُّ الآتية يمثّل عدداً غير نسبيّ؟

أ) $\sqrt{٢}\sqrt{٣} \times \sqrt{٤}\sqrt{٣}$ ب) ٣,١٤ ج) $١,\overline{٦}$ د) $\sqrt{٨}$

٢ أيُّ الآتية تُعَدُّ عبارة خاطئة؟

أ) يمكن أن يكونَ مجموعُ عددَيْنِ غيرِ نسبيّيْنِ عدداً غيرَ نسبيّ.

ب) يمكن أن يكونَ مجموعُ عددَيْنِ غيرِ نسبيّيْنِ عدداً نسبيّاً.

ج) يمكن أن يكونَ الفرقُ بين عددَيْنِ غيرِ نسبيّيْنِ عدداً غيرَ نسبيّ.

د) يمكن أن يكونَ مجموعُ عددَيْنِ نسبيّيْنِ عدداً غيرَ نسبيّ.

٣ ما قيمة $٢\sqrt{١٨} - \sqrt{٨}$ ؟

أ) $^-\sqrt{١٠}$ ب) $^-٤$ ج) $٤\sqrt{٢}$ د) $\sqrt{١٠}$

٤ أيُّ من الآتية عبارة خاطئة؟

أ) $\sqrt[٣]{\frac{١}{٨}} < \frac{١}{٣}$ ب) $١,٤ = ١\frac{٢}{٥}$ ج) $\frac{٣}{٧} > \frac{٤}{٩}$ د) $\frac{٣}{٧} > ٠,٤$

٥ أيُّ من العبارات الآتية تُمثّل مربّعاً كاملاً؟

أ) $س^٢ - ٤س + ٤$ ب) $(س - ٢)(س + ٢)$

ج) $س^٢ - ٤س - ٤$ د) $س^٢ + ٤$

٦ ما ناتج طرح المقدار $(س^٢ - ٢س + ١)$ من المقدار $(٣س^٢ - ٤س + ٥)$؟

أ) $٢س^٢ - ٢س + ٤$ ب) $٢س^٢ - ٦س + ٤$

ج) $-٢س^٢ + ٢س - ٤$ د) $-٢س^٢ - ٢س - ٤$

٧ ما تحليل العبارة س^{٢} – ١٧س + ٤٢؟

أ) (س – ١)(س – ٤٢) ب) (س – ٢)(س – ٢١)

ج) (س – ٦)(س – ٧) د) (س – ٣)(س – ١٤)

٢) أُبَيِّنُ أيَّ الآتية عدد نسبيّ، وأُوَضِّحُ السبب:

$٠,٢\overline{٦}$ ، $\sqrt{٢٠}$ ، $(\sqrt{٢٠} \times \sqrt{٢٠})$ ، $\sqrt{\frac{١}{٤}}$ ٦ ، $\sqrt[٣]{١١}$

٣) أَجِدُ كلّاً من الآتي: أ) النّظير الضّربي للعدد $\frac{٧}{٣}$ ب) النّظير الجمعيّ للعدد $\frac{٧}{٣}$

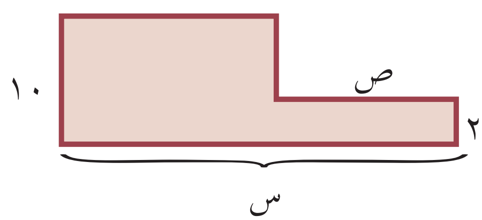
٤) أَجِدُ قيمة كُلٍّ من الآتية:

أ) $\sqrt[٣]{\frac{١}{٨}} - \frac{٥}{٣}$ ب) $\sqrt{٢} \times \sqrt{٢,٥} \times \sqrt{٥}$

جـ) $\frac{٤}{٣} \div \frac{٢}{٥}$ د) $\frac{٢}{٩} + \frac{-٣}{٥}$ هـ) $\sqrt[٣]{\frac{-١٢٥}{٢٧}}$

٥) أَكْتُبُ المقدار (س + ٢)(س – ٤) – (س + ٤)(س – ٢) بأبسط صورة؟

٦) تم حديثاً إنشاء أول ممر بحري يسمح لذوي الاحتياجات الخاصة بالسباحة في البحر على الشكل الآتي، أَكْتُبُ المقدار الجبريّ الذي يمثّل مِساحة المنطقة الملوّنة.



٧) أُعَبِّرُ عن المقدار (١٠٤) × (٩٦) بصورة فَرْقٍ بين مربّعَيْن، ثُمَّ أَجِدُ قيمته.

٨) إذا كانت قيمة س^{٢} – ص^{٢} = ٤٨، وكان س + ص = ١٦، فما قيمة س – ص.

اختبار ذاتي

س١: أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة للفقرات (١-١٠):

١- ما النظير الجمعي للعدد $\sqrt{\left(\frac{٤}{٩}\right)}$ ؟

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{-٣}{٢}$ جـ) $\frac{٢}{٣}$ د) $\frac{-٢}{٣}$

٢- أي الأعداد الآتية يمثل عدداً غير نسبي ؟

أ) $\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{٤}$ ب) $\left(\frac{١}{\sqrt[٣]{٢}} - \frac{١}{٣}\right)$ جـ) $\sqrt[٣]{١٠٠}$ د) $\sqrt{\frac{٤\times٤\times٤\times٤}{٤+٤+٤+٤}}$

٣- أي الآتية يمثل عدداً نسبياً؟

أ) π ب) $\frac{٢٢}{٧}$ جـ) ٣ د) $٠,٤٥٧٣٠\longrightarrow$

٤- ما المقدار الجبري الذي لا يحلل في الآتية؟

أ) س^{٢} + ٢٥ ب) س^{٢} - ٢٥ جـ) (س - ٥)^{٢} د) س^{٢} + ١٠س + ٢٥

٥- ما طول ضلع مربع مساحته س٢ - ٦س + ٩ ؟

أ) س + ٩ ب) س+ ٣ جـ) س - ٩ د) س - ٣

٦- ما قيمة ٠,٤ + ٠,٥ ؟

أ) $\frac{٥٤}{٩}$ ب) $\frac{٥٤}{١٠٠}$ جـ) ١ د) $\frac{٥٤}{٩٩}$

٧- ما الخاصية المستخدمة في الجملة الآتية (-٢ + $\frac{١٦}{٨}$ = صفر)؟

أ) النظير الجمعي. ب) النظير الضربي. جـ) الانغلاق. د) العنصر المحايد.

٨- أي من العبارات الآتية خاطئة؟

أ) $\sqrt{\frac{١}{٩}} < \frac{١}{٢}$ ب) $(\frac{٢}{٥})^{٢} < (-\frac{٢}{٥})^{٢}$ جـ) $٠,١٣ < ٠,١٣$ د) $\frac{٣}{٤} > -\frac{٣}{٤}$

٩- إذا كانت قيمة (س^{٢} - ص^{٢}) = ١٤، (س - ص) = ٢، فما قيمة (س + ص)؟

أ) ٧ ب) ١٢ جـ) ١٤ د) ١٦

١٠- إذا كان أ، ب، جـ ∈ ح*، وكان أ^{٢} ب جـ + أ ب^{٢} جـ + أ ب جـ^{٢} = أ ب جـ فما قيمة أ + ب + جـ؟

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٤

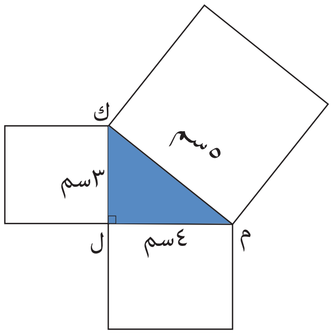
س٢: إذا علمت أن $\left(١ \frac{٣}{٤}\right)$ كوب من الطحين ينتج علبتين من (البسكويت) ، فكم كوباً من الطحين يلزم لإنتاج (٨)علب من (البسكويت) ؟

س٣: قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ٢س^{٢} – س – ٣ وحدة مربعة، فإذا علمت أنّ طولها يساوي (٢س + ٢) وحدة، أجد عرضها.

س٤: أُعَبِّرُ عن المقدار (١٠٤) × (٩٦) بصورة فَرْقٍ بين مربّعَيْن، ثُمَّ أَجِدُ قيمته.

نظريّة فيثاغورس

نشاط ١:



رسم المثلث ك ل م، كما في الشكل المجاور، بحيث:

ل ك = ٣سم، ل م = ٤سم، م ك = ٥سم، ثم أُكمل:

مِساحة المربع المُنشأ على الوتر ك م = ٥ × ٥ = ٠٠٠سم^{٢}

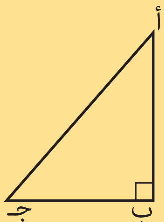
مِساحة المربع المُنشأ على ضلع القائمة ل ك = ٣ × ٣ = ٩سم^{٢}

مِساحة المربع المُنشأ على ضلع القائمة ل م = ٤ × ٤ = ٠٠٠سم^{٢}.

مجموع مساحتيّ المربّعيْن المنشأيْن على ضلعيّ الزاوية القائمة = ٩ + ١٦ = ٢٥.

ألاحظ أن: ....

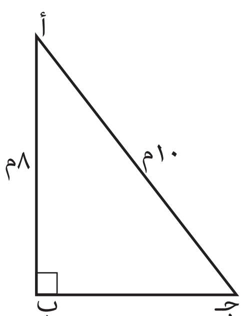
نظريّة فيثاغورس: في المثلّث القائم الزّاوية تكون مِساحةُ المربّع المُنشأ على الوتر تساوي مجموع مساحتيّ المربّعيْن المُنشأين على ضلعيّ الزاوية القائمة؛ أيّ أنّ: (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}



نشاط ٢:

يستخدم ضباط الدفاع المدني أدوات مختلفة في إنجاز مهماتهم،وأثناء تنفيذ إحدى المهمات اضطر ضابط لوضع سلم طوله ١٠م على أرض مستوية بحيث يلامس أعلى السلم قمة بناية ارتفاعها ٨م، ما البعد بين الطرف السفلي للسلم وأسفل البناية.

أرسم رسماً توضيحيّاً، كما في الشكل المجاور:



(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

(١٠)^{٢} = (٨)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

٠٠٠٠ = ٦٤ + (ب جـ)^{٢}

(ب جـ)^{٢} = ١٠٠ − ٦٤

(ب جـ)^{٢} = ٣٦ ، ومنها (ب جـ) = ٠٠٠٠

بعد السلم عن أسفل البناية = ٠٠٠٠م

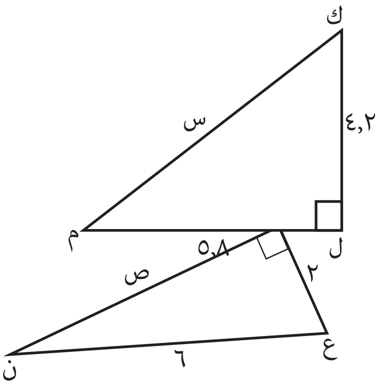
نشاط٣:

أُكملُ إيجادَ أطوالِ أضلاعِ المثلّثات الآتية:

أ) (ك م)^{٢} = (ك ل)^{٢} + (ل م)^{٢}

س^{٢} = (٤,٢)^{٢} + ٠٠٠٠   س^{٢} = ٠٠٠٠ + ٣٣,٦٤

س^{٢} = ٥١,٢٨ ومنها س = $\sqrt{٥١,٢٨}$ وحدة طول



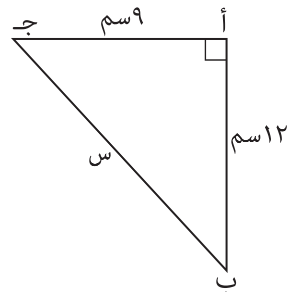
ب) (ع ن)^{٢} = (س ع)^{٢} + (س ن)^{٢} ٠٠٠٠ = (٢)^{٢} + (ص)^{٢}

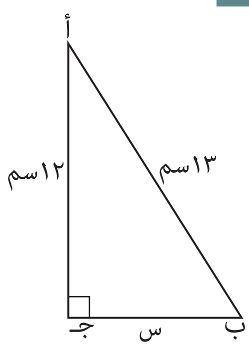
٣٦ – ٠٠٠٠ = ص^{٢} ومنها ص^{٢} = ٣٢

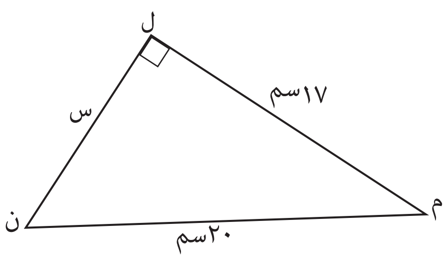
أيّ أنّ: ص = $\sqrt{٣٢}$ وحدة طول

تمارين ومسائل:

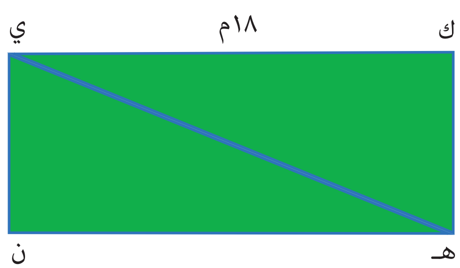
أجدُ قيمةَ س في كل من المثلّثات القائمة الآتية:







٢) أحسبُ محيط المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب، الذي فيه:
أ ب = ١٥سم، أ جـ = ٢٥سم



٣) يوضّح الشكل المجاور مخطط حديقةً مستطيلةَ الشكل، طولها ١٨م، ومساحتها ٢١٦م^{٢}، فما طول قُطرِها؟

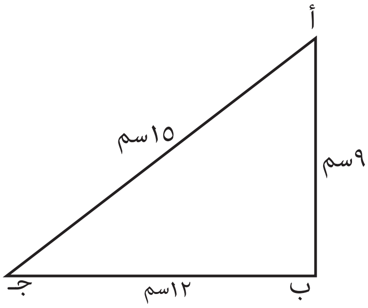
مهمة تعليمية

٧) تم توصيل نقطة تقع على قمة عمود كهرباء ترتفع ٧م عن سطح الارض بسلكٍ كهربائيّ مشدود إلى سطح منزل، ارتفاعه ٣م عن سطح الأرض، فإذا كانت نقطة تثبيت السّلك بقمة المنزل تبعد ٣م عن عمود الكهرباء، فما طول هذا السّلك؟

١-١٥ عكس نظريّة فيثاغورس

نشاط ١: ت

أمّل المثلثاتِ الآتية، ثم أكمل:



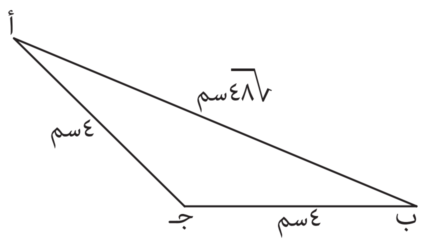
أ) (أ جـ)^{٢} = (١٥)^{٢} = ٢٢٥سم^{٢}

(أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} = (٩)^{٢} + (١٢)^{٢}

= .... + ...

= ٢٢٥سم^{٢}

ألاحظ أنّ: المثلث قد حقّق نظريّة فيثاغورس. أتحقّقُ بالقياس من أنّ المثلثَ أ ب جـ قائمُ الزّاوية في ب.



ب) (أ ب)^{٢} = (...)^{٢} = ٤٨سم^{٢}

(أ جـ)^{٢} + (ب جـ)^{٢} = (٤)^{٢} + ... = ٣٢سم^{٢}

ألاحظُ أنّ: (أ ب)^{٢} $\neq$ (أ جـ)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

أي أن المثلث (أ ب جـ) لايحقق نظرية فيثاغوروس.

أتحقّق بالقياس أنّ المثلثَ أ ب جـ غيرُ قائم الزّاوية.

نظريّة: إذا كانت مِساحةُ المربّع المُنشأ على أطولِ أضلاع المثلّث تساوي مجموعَ مساحتيّ المربّعيْن المُنشأيْن على الضلعيْن الآخريْن، فإنّ الزّاويةَ المقابلةَ للضّلع الأكبرِ تكون قائمةً؛أيّ أنّه: إذا كان (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} فإنّ المثلثَ أ ب جـ قائمُ الزّاوية في ب.

نشاط ٢:

أيّ الأطوال الآتية يمكن أنْ تشكل أطوالاً لأضلاع مثلث قائم الزاوية:

أ) الأطوال: ١سم ، ١سم، $\sqrt{٢}$سم

($\sqrt{\ }$)^{٢} = ...سم^{٢} (١)^{٢} + (١)^{٢} = ١ + ١ = ٢سم^{٢}

أي أنّ: ($\sqrt{\ }$)^{٢} = (١)^{٢} + (١)^{٢} ومنها الأطوال: ١سم، ١سم، $\sqrt{\ }$سم تشكّل مثلّثاً قائم الزّاوية. (لماذا؟)

ب) الأطوال: ٧٤سم، ٤٨سم، ٥٥سم.

(٧٤)^{٢} = ...سم^{٢} (٤٨)^{٢} + (٥٥)^{٢} = ٢٣٠٤ + ... = ٥٣٢٩سم^{٢}

ألاحظ أنّ: (٧٤)^{٢} $\neq$ (٤٨)^{٢} + (٥٥)^{٢}

ومنها الأطوال: ٧٤سم، ٤٨سم، ٥٥سم لا يمكن أن تشكّل مثلّثاً قائم الزاوية. (لماذا؟)

تعريف: تُسمّى الأعدادُ الطبيعيّة التي تُحقّقُ نظريّة فيثاغورس أعداداً فيثاغوريّة.

نشاط٣:

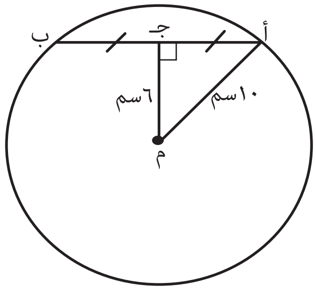
أُكملُ الجدولَ الآتي:

س	ص	ع	س^٢	ص^٢	ع^٢	س^٢ + ص^٢	هل هي أعداد فيثاغورية؟
٦	٨	١٠	٣٦	٦٤	١٠٠	٣٦ + ٦٤ = ····	نعم؛ لأنّ: ....
٩	١٣	٢٠		١٦٩		···· + ١٦٩ = ٢٥٠	لا؛ لأن ....

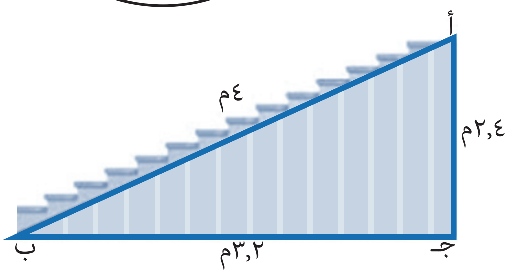
تمارين ومسائل:

١) أُكملُ الجدول الآتي:

أطوال أضلاع المثلث بالسنتمتر	هل المثلث قائم الزاوية؟
٦ ، ٤,٨ ، ٣,٦	
٦١ ، ١١،٦٠	



٢) يبين الشكل المجاور دائرةٌ نصفُ قطرِها ١٠سم، أ ب وترٌ فيها، م جـ عمودي على الوتر أب، ما طول أ ب؟



٣) الشكل المجاور يمثّل درجاً، أبعادُه معلومة،

فهل تم بناء الدرج بحيث تكون زاوية جـ قائمة.

مهمة تعليمية

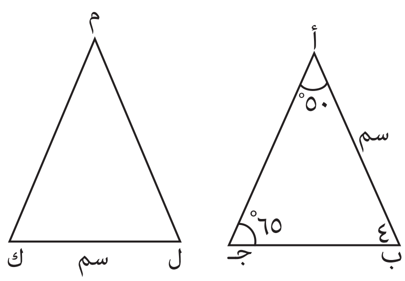
مستخدماً المتر فقط، كيف تتأكد من أن الزاوية في احد غرف منزلك قائمة؟

١٦-١ تطابُق المثلّثات

تعريف: المثلثات المتطابقة أضلاعها المتناظرة متساوية، وقياسات زواياها المتناظرة متساوية.

نشاط١:

يبيّن الشكل المجاور المثلثيْن المتطابقيْن أ ب جـ، م ل ك، أُكملُ إيجادَ:



∡ ل م ك، ∡ م ل ك، م ل.

∡ ل م ك = ∡ ب أ جـ (لماذا؟)

ومنها: ∡ ل م ك = ...

∡ م ك ل = ∡ أ جـ ب = ٦٥° (لماذا؟)

م ل = أ ب ، ومنها: م ل = ...سم

٣

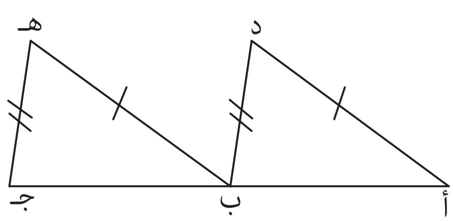
يمكن التحقُّقُ من تطابق مثلثين؛ اعتماداً على حالات تتضمّن الآتية:

الحالة الأولى: تطابُقُ مثلثيْن بثلاثة أضلاع، ويُعبَّرُ عن هذه الحالة بالرموز (ض، ض، ض).

يتطابق مثلثان إذا كانت أطوالُ الأضلاع المتناظرة في المثلثيْن متساوية.

نشاط٢:

في الشكل المجاور، إذا كان أ د = ب هـ، ب د = جـ هـ، ب منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، أبيّن أنّ المثلثين أ د ب، ب هـ جـ متطابقان.



أ د = ب هـ (معطى)

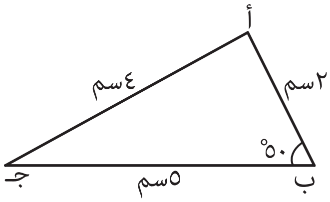
ب د = جـ هـ (معطى)

أ ب = ... (لماذا؟)

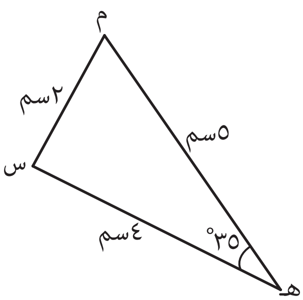
∴ يتطابق المثلثان: أ د ب، ب هـ جـ ؛ وفقاً لحالة التطابق (ض،...،...)

نشاط٣:

رسمت كل من منار وساجدة الوجه العلوي لغطاء علبة حلوى مثلث الشكل وسجلت بعض القياسات كما في التوضيح الآتي،



(قياسات منار)



(قياسات ساجدة)

أتأمل ثم أكمل:

المثلّثان: أ ب جـ، س م هـ متطابقان؛ وفقاً للحالة (...، ...، ...)

أ ب = س م　　　ب جـ = ...　　　أ جـ = ...

ومن التطابق ألاحظ أنّ:

$\measuredangle$ م = $\measuredangle$ ب

ومنها: $\measuredangle$ م = ٥٠°　　　$\measuredangle$ جـ = $\measuredangle$ هـ

ومنها: $\measuredangle$ جـ = ...　　　$\measuredangle$ أ = ١٨٠° − (٥٠° + ٣٥°) = ...

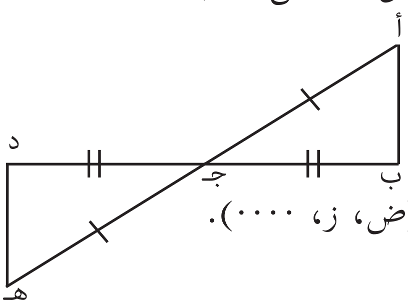
$\measuredangle$ س = ٩٥°　　　(لماذا؟)

الحالة الثانية: تطابق مثلّثين بضلعين وزاوية محصورة، ويُعبَّرُ عن هذه الحالة بالرموز: (ض، ز، ض).

يتطابق مثلّثان إذا تساوى طولا ضلعيْن في كل منها، وتساوي قياسُ الزّاوية المحصورة بين هذين الضلعيْن في كلٍّ منهما.

نشاط٤:

أتأمّل الشكل الآتي، ثم أبحث في تطابق المثلّثين: أ ب جـ، هـ د جـ.



أ جـ = جـ هـ　　　(لماذا؟)　　　ب جـ = ...

$\measuredangle$ د جـ هـ = $\measuredangle$ ب جـ أ　　　(لماذا؟)

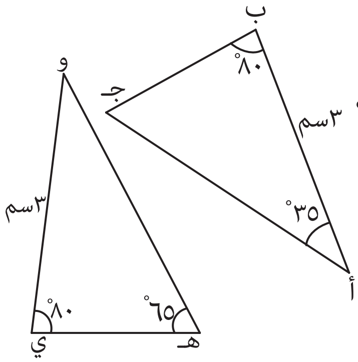
∴ يتطابق المثلثان: أ ب جـ، هـ د جـ ؛ وفقاً لحالة التطابق الثانية (ض، ز، ....).

الحالة الثالثة: تطابُقُ مثلثين بزاويتين وضلع، ويُعبَّرُ عن هذه الحالة بالرموز: (ز، ض، ز).

يتطابق مثلّثان إذا تساوى فيهما طولُ ضلعٍ، وقياسُ الزاويتيْن المرسومتيْن عند نهايتيّ ذلك الضلع.

نشاط٥:

أبحث في تطابق المثلثين: أ ب جـ، و ي هـ، معتمداً على التمثيل المجاور:



أ ب = و ي = ···· ∡ ب = ∡ ي = ···· ∡ و = ٣٥°

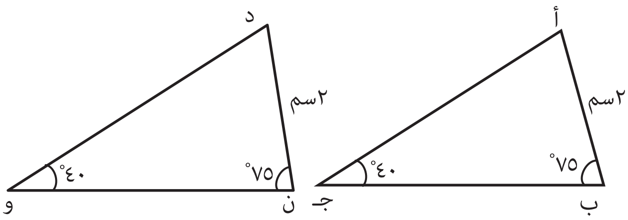
(لماذا؟)

∡ و = ∡ أ = ···· ولذلك يتطابق المثلثان أ ب جـ، و ي هـ؛

وفقاً للحالة (ز، ض، ز).

نشاط٦:

تتنوع مظاهر الإهتمام بالعمارة من حيث التبليط والزخرفة أراد باسل زخرفة لوحة باستخدام مثلثات متطابقة، فهل يصلح المثلثان أ ب جـ ، د ن و الموضحة في الشكل الآتي للاستخدام في هذه الزخرفة؟



أ ب = د ن = ···· سم

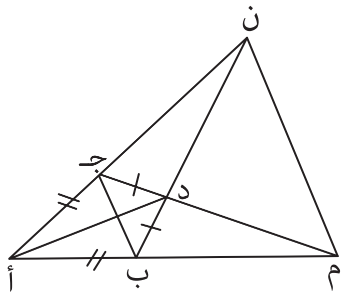
∡ أ = ∡ د = ···· (لماذا؟)

∡ ب = ∡ ن = ····

ألاحظ أن المثلثين متطابقان؛ وفقاً للحالة (···، ···، ···).

أي أنه يمكن لباسل استخدام هذين المثلثين في زخرفة اللوحة.

نشاط٧:



أتأمّل الشكل المجاور، وأبيّن أنّ المثلثين ب د م، جـ د ن متطابقان.

المثلثان ب د م، جـ د ن فيهما:

ب د = جـ د (معطى)

∡ ب د م = ∡ جـ د ن (بالتقابل بالرأس)

لإثبات أن ∡ د ب م = ∡ د جـ ن ألاحظ أن

Δ أ ب د، Δ أ جـ د متطابقان؛ وفقاً للحالة (ض، ض، ض)

لأنّ: أ د ضلع مشترك، أ ب = ٠٠٠٠، ب د = جـ د (معطى)

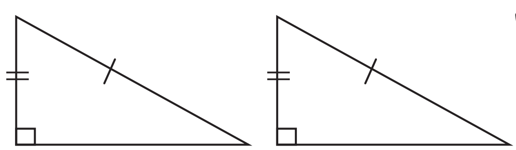
وينتج من تطابقهما أنّ: ∡ أ ب د = ∡ أ جـ د

أذن ∡ د ب م = ∡ د جـ ن (لماذا)

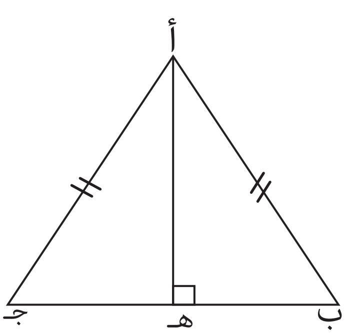
أي أن المثلثان ب د م، جـ د ن متطابقان؛ وفقاً للحالة (٠٠٠٠، ٠٠٠٠، ٠٠٠٠).

الحالة الرابعة: تطابق مثلثين بوترٍ وضلعٍ وقائمة.

يتطابق مثلّثان قائما الزاوية إذا تساوى طولُ ضلعٍ ووترٍ في أحدهما مع نظائرهما في المثلّث الآخر. فهل تستطيع تفسير ذلك؟



نشاط٨:



أ ب جـ مثلث متساوي الساقين، أ هـ عمودي على ب جـ .

أبحث في تطابق المثلثين أ هـ جـ، أ هـ ب.

الوتر أ ب = الوتر ٠٠٠٠ (لماذا؟)

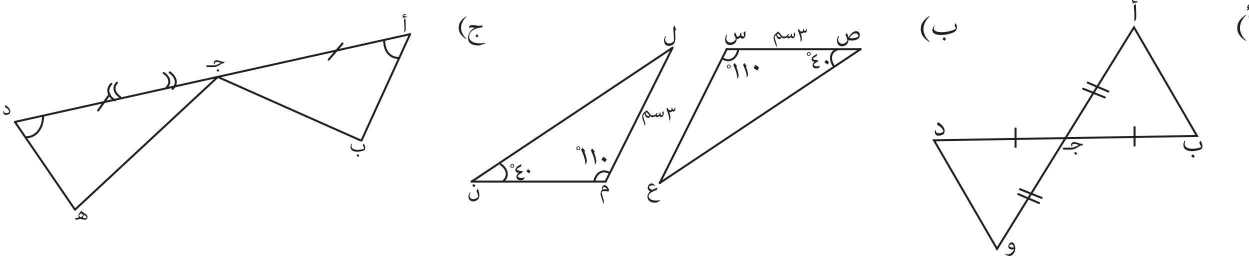
أ هـ ضلع ٠٠٠٠

∡ ب هـ أ = ∡ جـ هـ أ = ٠٠٠٠

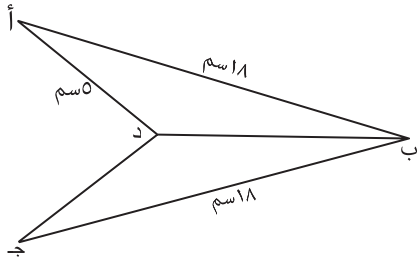
Δ أهـ جـ يطابق Δ أهـ ب؛ وفقاً لحالة التطابق الرابعة وهي: (٠٠٠٠، ٠٠٠٠، وقائمة).

تمارين ومسائل:

١) أسمّي أزواج المثلثات المتطابقة في كلّ ممّا يأتي، وأوضّح السبب:

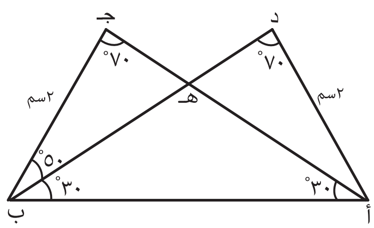


٢) في الشكل الآتي، إذا علمت أنّ ب د تُنصّفُ الزاوية ب:

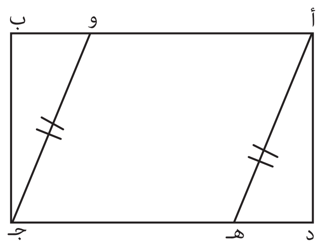


أ) أبيّن أنّ: المثلثين أ ب د، جـ ب د متطابقان، مع توضيح حالة التطابق.

ب) أجد د جـ.



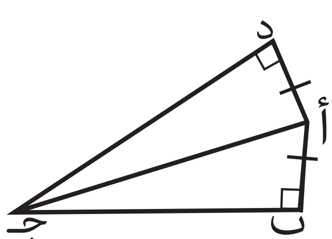
٣) أتأمل الشكل المجاور، لأبيّن أن:
المثلثين أ ب جـ ، ب أ د متطابقان.



٤) في الشكل المجاور: أ ب جـ د مستطيل، أ هـ = و جـ

أبيّن أنّ: د هـ = و ب.

مهمة تعليمية

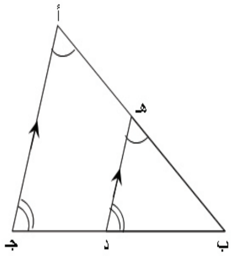


رسم رامي القطع جـ د، جـ أ، جـ ب، ورسم أ ب عمود على ب جـ، أ د عمود على د جـ، أ د = أ ب، كما في الشكل المجاور، قال رامي أن جـ أ يُنصّف ∢ ب جـ د. كيف تتأكد من صحة ما قاله رامي؟

١٧-١ تشابه المثلثات

نشاط١:

أتأمّل الشكل المجاور، وأكمل:



١) الزاوية ب مشتركة بين المثلثين أ ب جـ ، ......

٢) ∡ أ جـ د = ∡ هـ د ب (لماذا؟)

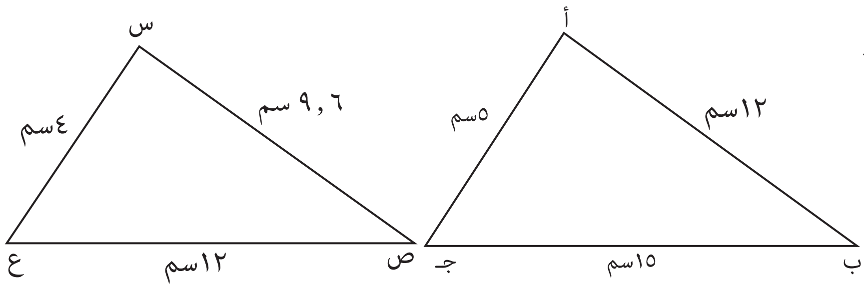
٣) ∡ ب هـ د = ∡ ب أ جـ (لماذا؟)

أيّ أنّ: الزوايا الثلاث المتناظرة متساوية؛ ولذا يقال: أنّ المثلثين هـ ب د ، أ ب جـ متشابهان،
وتُكتب بالرموز: Δ هـ ب د ∽ Δ أ ب جـ،
وتُقرأ (Δ هـ ب د يشابه Δ أ ب جـ).

أتعلّم: يتشابه مثلّثان إذا تساوت قياسات الزوايا المتناظرة في المثلّثين، ويرمز للتشابه بالرمز (∽).

نشاط٢:

أتأمّل المثلّثين في الشكل المجاور، وأكمل:



$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{١٢}{٩,٦} = \frac{٥}{٤}$

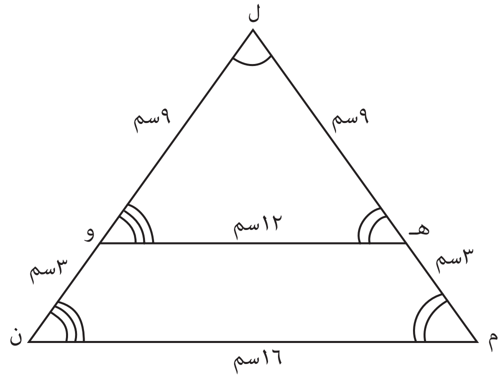
$\frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{١٥}{١٢} = \text{...}$

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{س ع}} = \frac{٥}{\text{...}}$

ألاحظ أنّ الأضلاع المتناظرة متناسبة (المثلث أ ب جـ تكبير للمثلث س ص ع).

أتعلّمُ: يتشابه مثلثان إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما متناسبة.

نشاط٣:



أتأمّل الشكل المجاور، وأكمل:

ألاحظ أنّ: ∡ م = ∡ هـ (لماذا؟)

∡ ن = ∡ و (لماذا؟)

∡ ل مشتركة

وبما أنّ قياسات الزوايا المتناظرة في المثلثين متساوية، فإنّ المثلثين ....

$$\frac{\text{ل م}}{\text{ل هـ}} = \frac{١٢}{٩} = \frac{...}{...}$$

$$\frac{\text{م ن}}{\text{هـ و}} = \frac{١٦}{...} = \frac{٤}{٣}$$

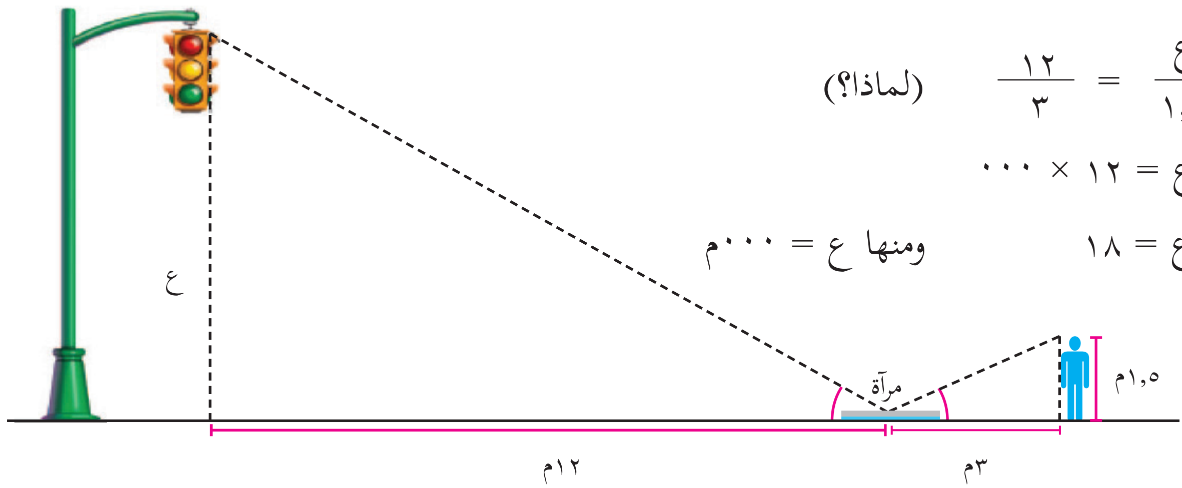
$$\frac{\text{ل ن}}{\text{ل و}} = \frac{...}{٩} = \frac{٤}{...}$$

ألاحظ أيضاً أن أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة.

نشاط٤:

أراد جهاد قياس ارتفاع إشارة المرور إعتمادا على إنعكاس الضوء، فقام بوضع مرآة مستوية بحيث تبعد ١٢م عن أسفل الإشارة و ٣م عن شخص طوله ١,٥م، كما في الشكل الآتي، أكمل طريقة جهاد في إيجاد ارتفاع إشارة المرور.

* قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس.



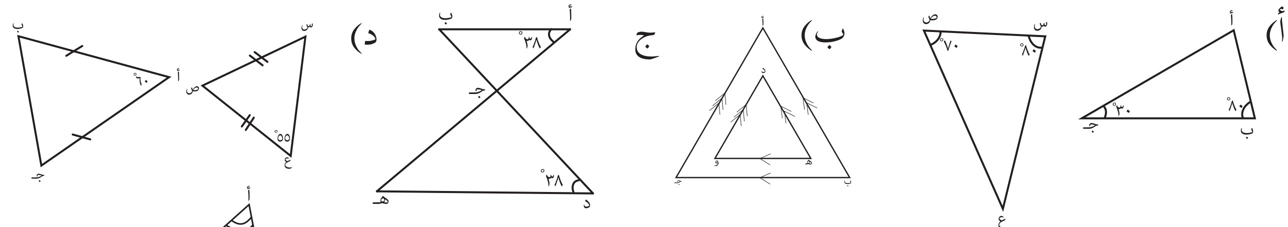
$$\frac{ع}{١,٥} = \frac{١٢}{٣}$$ (لماذا؟)

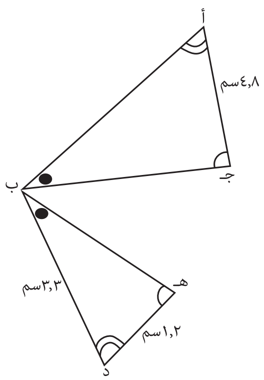
$٣ع = ١٢ \times ٠٠٠$

$٣ع = ١٨$ ومنها $ع = ٠٠٠$م

تمارين ومسائل:

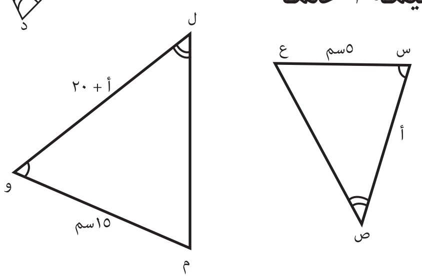
١) أبيّنُ أيّ المثلثين في كلٍّ من الآتية متشابهان:





٣) في الشكل المجاور: إذا كان Δ أ ب جـ $\backsim$ Δ د ب هـ،
أجد أ ب.

٤) يبين التمثيل المجاور المثلثين ص س ع، ل و م، فما قيمة أ علماً بأن المثلثين متشابهان؟



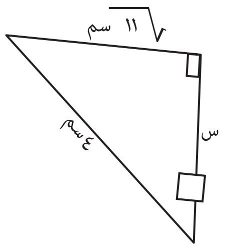
مهمة تعليمية

مصباح إنارة مثبّتٌ على عمود، إرتفاعه ٣م عن حافّة الشارع. فإذا سار شخصٌ طولُه ١,٨م بجانب العمود، أجد كل من الآتي:

أ) طولُ ظل الشخص عندما يكون على بعد ٥م من العمود.

ب) بعد الشخص عن العمود إذا كان طولُ ظلّه ٣م.

ورقة عمل (١)



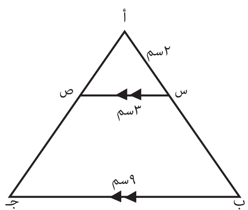
١) أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ معتمداً على الشكل المجاور، ما قيمة س؟

أ) ٣   ب) ١٩   جـ) ٥   د) ٢

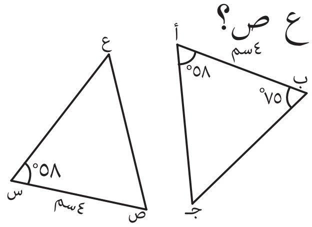
٢ أيّ المجموعات الآتية لا تمثّل أعداداً فيثاغوريّة؟

أ) (٣، ٤، ٥)   ب) (٦، ٨، ١٠)   جـ) (٤، ١٠، ١٢)   د) (١٢، ٥، ١٣)



٣ في الشكل المجاور، ما طول س ب؟

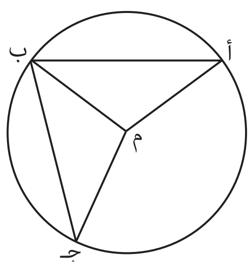
أ) ٣سم   ب) ٤سم   جـ) ٦سم   د) ١٢سم



٤ إذا كان المثلّثان أ ب جـ ، س ص ع متطابقين، ما قياس الزّاوية س ع ص؟

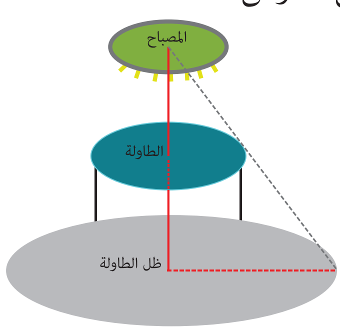
أ) ٧٥°   ب) ٤٧°   جـ) ٥٨°   د) ١٣٣°

٥ أيٌّ من أزواج المثلّثات الآتية تتطابق؛ وفقاً للحالة (ز، ض، ز)؟



٢) يبيّن الشكل المجاور دائرةً مركزُها م، فيها أ ب، ب جـ
وتران متساويان، أبيّن أنّ المثلثين ب م أ ، ب م جـ متطابقان.

٣) علق مصباح بحيث يعلو طاولة دائرية قطرها ١م كما في الشكل المجاور، فإذا كان ارتفاع الطاولة ٠,٨م وكان ارتفاع المصباح ٢,٤م فما طول ظل الطاولة على الأرض.



١٨-١ تمثيل البيانات بطريقة القطاعات الدّائريّة

تعريف: القطاع الدائري هو الجزء المحصور بين نصفي قطرين وقوس في دائرة.

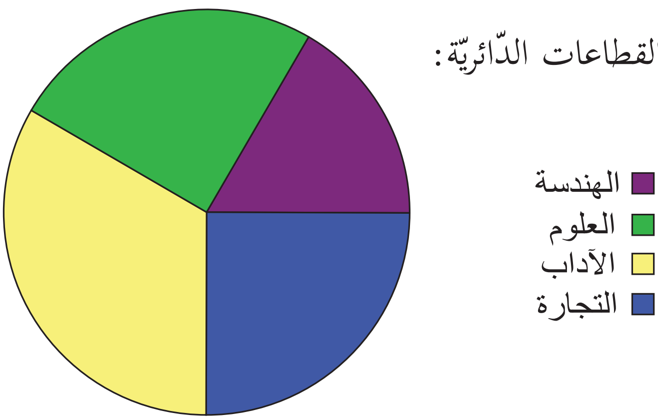
زاوية القطاع الدائري = $\frac{\text{عدد عناصر القطاع} \times ٣٦٠°}{\text{العدد الكلي}}$

مجموع زوايا القطاعات الدائرية لجميع البيانات = ٣٦٠°

نشاط ١:

أتأمَّلُ البياناتِ الآتيةَ وتمثيلَها المجاورَ بطريقة القطاعات الدّائريّة:

الكلية	العدد
الهندسة	١٢٠
العلوم	١٨٠
الآداب	٢٤٠
التجارة	١٨٠



أُلاحِظُ أنَّ زاوية قطاع طلبة الهندسة = ٦٠° ، وأن $\frac{١٢٠}{٧٢٠} \times ٣٦٠° = ٦٠°$

وبالمثل زاوية قطاع طلبة العلوم = ٩٠° ، وأن $\frac{١٨٠}{٧٢٠} \times ٣٦٠° = ...$

وزاوية قطاع طلبة الآداب = ١٢٠° ، وأن $\frac{٢٤٠}{٧٢٠} \times ... = ...$

وزاوية قطاع طلبة التجارة = ٩٠° ، وأن $\frac{...}{...} \times ... = ...$

نشاط ٢:

تضمّ مدرسة ٣ صفوف دراسيّة، ويبلغ عدد الطالبات فيها (٢٤٠) طالبة، فإذا كانت زاوية قطاع الصَّفّ الثّاني عشر ٩٠°، وزاوية قطاع الصَّفّ العاشر ١٥٠°، أجد عدد طالبات الصف الحادي عشر.

زاوية قطاع الصَّفّ الحادي عشر = ٣٦٠° - (١٥٠° + ٩٠°)

= ......

ومنها:

زاوية القطاع الدّائريّ = $\frac{\text{عدد عناصر القطاع}}{\text{العدد الكُلّيّ}}$ × ٣٦٠°

ومنها: ١٢٠° = $\frac{\text{عدد طالبات الصَّفّ الحادي عشر}}{\text{٢٤٠}}$ × ٣٦٠°

عدد طالبات الصَّفّ الحادي عشر × ٣٦٠° = ١٢٠° × ٢٤٠

عدد طالبات الصَّفّ الحادي عشر = ...

تَمارينُ وَمَسائِل:

١) أتأمَّلُ البيانات الآتية الّتي تمثل عدد الأنشطة الّتي رَعَتْها مؤسّسة شبابيّة خلال ٦ أشهر، ثم أُمَثِّلُها بطريقة القطاعات الدّائريّة:

نوع النَّشاط	رياضيّ	ثقافيّ	اجتماعيّ	تعليميّ	فنّيّ
العدد	١٠	٤	٦	٨	٢

٢) بلغ عدد مشجعي فريق كرة قدم في خمس مباريات ٤٨٠٠ متفرج، فإذا مُثِّلت أعدادُ مشجعي الفريق في المباريات الخمس بطريقة القطاعات الدّائريّة، فكانت زاوية القطاع الّذي يُمَثِّلُ عدد مشجعي الفريق في المباراة الرابعة تساوي ١٢٠°، فما عدد مشجعي الفريق في تلك المباراة؟

٣) عندَ تمثيل أعداد زائري حديقة حيوان خلال أسبوع، وُجِدَ أنّ زاوية القطاع الدّائريّ الّذي يُمَثِّلُ عدد زوار الحديقة في اليوم الثالث ٦٠°، وعدد زائري الحديقة في ذلك اليوم ٢٠٠ شخص، فما عدد زوّار الحديقة في ذلك الأسبوع؟

مقاييس التَّشَتُّت

تعريف: مدى البيانات = أكبر قيمة في البيانات - أصغر قيمة في البيانات.

نشاط١:

أُكْمِلُ إيجاد المدى لِكُلٍّ من المجموعاتِ الآتية:

إذا كانت مجموعةُ القيم ٢٠، ٧، ٣ ، ٥، ٩، فإنَّ المدى = ٢٠ - ٣ = ١٧

إذا كانت مجموعةُ القيم -١، ١، ٢، ٨، ٥، فإنّ المدى = ... - -١ = ...

إذا كانت مجموعةُ القيم ٥، ٥ ،٥، ٥، ٥، فإنّ المدى = ... - ... = ...

يعتمدُ المدى على بعض القيم، ويُهْمِلُ في الغالب كثيراً منها، وَيَكْثُرُ استخدامُهُ عند الإعلانِ عن حالاتِ الطَّقْسِ، مَثْل درجاتِ الحرارةِ والرُّطوبة، ولكن في كثير من الأحيان، لا يَصِفُ المدى مقدارَ تَشَتُّتِ البياناتِ بدرجةٍ مناسبة.

نشاط٢:

أتأمَّل القيمَ الآتية، وأَجِدُ المدى لِكُلٍّ منها:

إذا كانت مجموعةُ القيم ٢، ٦، ٩، ١٣، ١٨، ٢٠، فإنّ المدى = ٢٠ - ... = ١٨

إذا كانت مجموعةُ القيم ٢، ٣، ٣، ١٩، ٢٠، ٢٠، فإنّ المدى = ٢٠ - ... = ...

أُلاحِظُ أنَّ قيمة المدى متساويةٌ للمجموعتيْن، إلّا أنّهُ من الواضح أنَّ تَشَتُّتَ قيمِ المجموعة الثّانية أكبر، وبالتّالي، لا بدّ من مقاييسَ أُخرى أكثرَ دِقّة، ومن هذه المقاييس التَّبايُنُ، والانحراف المعياريّ.

تعريف: يُعرف التباين بأنه مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي مقسوماً على عدد القيم ويرمز له بالرمز $\sigma^٢$

ومنها التباين = $\sigma^٢ = \frac{\sum (س - \bar{س})^٢}{ن}$ ويمكن حسابه من الصيغة.

$$\sigma^٢ = \frac{\sum س^٢ - ن(\bar{س})^٢}{ن}$$

يُعرف الانحرّاف المعياريّ (σ) بأنه الجذر التربيعي للتباين.

نشاط٣:

أَجِدُ التباين والانحراف المعياري للقيم الآتية: ٠، ١ ، ٢ ، ٣، ٤

أَرْمِزُ للقيم بالرّمز س، وأكوّنُ جدولاً مناسباً، ثُمَّ أُكْمِل:

القيمة س	٠	١	٢	٣	٤	$\sum$ س = ...
$\text{س}^{٢}$	٠	١	٤	٩	١٦	$\sum \text{س}^{٢}$ =

$$\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} = \frac{١٠}{٥} = \text{...} \text{ ، ن} = \text{...}$$

$$\sigma^{٢} = \frac{\sum \text{س}^{٢} - \text{ن}(\bar{\text{س}})^{٢}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{٣٠ - ٥(٢)^{٢}}{٥}$$

$$= \frac{٣٠ - \text{...}}{٥}$$

$$= \frac{\text{...}}{٥}$$

= ٢ ، ومنها الانحراف المعياريّ = ... (لماذا؟)

نشاط٤:

عند إيجاد الانحراف المعياريّ لثمانٍ من قيم س، وُجِدَ أنّ $\sum$ س= ٢٤

وأنَّ $\sum \text{س}^{٢}$ = ٨٠، أُكْمِلُ إيجاد الانحراف المعياريّ لهذه القيم.

$$\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} = \frac{٢٤}{٨} = \text{...} \text{ ، ن} = \text{...}$$

$$\text{التَّبايُن} = \frac{\sum \text{س}^{٢} - \text{ن}\ (\bar{\text{س}})^{٢}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{٨٠ - ٨(٣)^{٢}}{\text{...}}$$

$$= \frac{٨٠ - \text{...}}{٨}$$

$$= \frac{\text{...}}{٨} = \text{...}$$

ومنها: الانحراف المعياريّ = ... (لماذا؟)

نشاط ٥:

سُجِّلَتْ عددُ سنواتِ الخبرةِ لدى طاقَمِ روضةِ أطفال، فكانت على النَّحْوِ الآتي:

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧.

أَجِدُ المدى، والانحراف المعياريّ لعدد سنوات الخبرة هذه.

أَرْمِزُ للقيم بالرمز س، وأكوّنُ جدولاً مناسباً، ثُمَّ أُكْمِل:

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	$\sum$س = ...
$س^٢$	١	...	٩	١٦	...	...	٤٩	$\sum س^٢$ = ١٤٠

المدى = ٧ - .... = ٦ سنوات خبرة

$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{٢٨}{...} = ٤$

التَّبايُن = $\frac{\sum س^٢ - ن\,(\bar{س})^٢}{ن}$

= $\frac{١٤٠ - ٧(٤)^٢}{٧}$

= $\frac{١٤٠ - ١١٢}{٧}$

= $\frac{...}{٧}$

= ٤ سنوات خبرة، ومنها: الانحراف المعياريّ = ٢ (لماذا؟)

أُلاحِظُ أنَّ التَّبايُن والانحراف المعياريّ يأخذان في الاعتبار جميع القيم، ويعطيان وصفاً أدقّ لتَشَتُّت البيانات، ولذا فهي من أكثر مقاييس التَشَتُّت استخداماً.

أناقش: لا يمكنُ أن يكونَ التَّبايُن سالباً.

تَمارينُ وَمَسائِل:

١) أ) إذا كان مدى ١٠ قيم يساوي ١٣، وكان أصغر هذه القيم = -٦، فما أكبر هذه القيم؟

ب) إذا كان مدى ١٥ قيمة يساوي ٩، وكان أكبر هذه القيم يساوي ٥، فما أصغر هذه القيم؟

٢) قام راصد جوي بتسجيل سرعة الرياح لمدة ٨ أيام في فصل الصيف، فكانت كالآتي:
٤، ٩، ٥، ٤، ٦، ٨، ٧، ٥، أَجِدُ المدى، والانحراف المعياريّ لسرعة الرياح.

٣) عند إيجاد التَّبايُن لثمانٍ من قيم س، وُجِدَ أنّ $\sum$ س = ٣٢، وأنّ $\sum$ س^{٢} = ١٤٤، أُكْمِلُ إيجاد التَّبايُن، والانحراف المعياريّ لهذه القيم.

٤) تبلغُ أعمار عدد من الموظفين في دائرة حكوميّة ٢٨، ٣٤، ٤٦، ٥٠، ٣٢، أَجِدُ المدى، والتَّبايُن، والانحراف المعياريّ لأعمار هؤلاء الموظفين؟

مهمة تعليمية

أَكْتُبُ مثالاً على كُلٍّ ممّا يأتي:

أ) مجموعتين من القيم لها المدى نفسه.

ب) خمس قيم مداها يساوي ٢٠.

جـ) ستّ قيم مداها وتباينها يساوي صفراً.

ورقة عمل (٢)

١) أضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:

١ تقدم ٦٠ طالباً لامتحان باللّغة الانجليزيّة، فإذا حصل ١٢ طالباً على علامة كاملة، فما زاوية القطاع الدّائريّ الذي يمثّل عدد الطَّلَبَة الذين حصلوا على العلامة الكاملة في الامتحان؟

أ) ٦٠° ب) ٦٦° جـ) ٧٢° د) ٩٠°

٢ ما مدى القيم ٦ ، ٦ ،٦ ،٦ ،٦ ؟

أ) ٦ ب) ٣ جـ) ١ د) صفر

٣ ما القيمة الّتي لا يمكن أن تُمَثِّلَ التَّبايُن لـ ١٠ قيم؟

أ) ١٠ ب) ١ جـ) صفر د) -٣

٤ أيٌّ من الآتية يُعَدُّ أقلَّ مقاييسِ التَشَتُّتِ دِقَّة؟

أ) الوسط الحسابيّ. ب) المدى. جـ) الانحراف المعياريّ. د) التَّبايُن.

٢) يُبَيِّنُ الجدول المجاور توزيع ١٦٠٠ ناخباً، موزعينَ على أربع دوائرَ انتخابيَّة، أَجِدُ زاويةَ القطاع الدّائريّ الّذي يُمَثِّلُ عدد النّاخبينَ في الدّائرتَيْنِ الأوّلى والثّالثة؟

الدائرة	عدد الناخبين
الأوّلى	٣٠٠
الثّانية	٣٥٠
الثّالثة	٤٥٠
الرّابعة	٥٠٠

٣) عند إيجاد التَّبايُن لستٍّ من قيم س، وُجِدَ أن $\sum$ س = ٦٠

وأنّ $\sum$ س^2 = ٧٢٤، أَجِدُ التَّبايُن، والانحراف المعياريّ لهذه القيم.

٤) سُجِّلَتْ درجاتُ الحرارةِ الصُّغرى خِلالَ سِتَّةِ أيّام، فكانت كما يأتي:

٦، ٣ ، ٢، ١ ، -٢ ، -٤

أَجِدُ كُلّاً من الآتي:

أ) المدى. ب) التَّبايُن. جـ) الانحراف المعياريّ.

٥) إذا كان تباين مجموعة من القيم يساوي ٢٥، وكان وسطها الحسابي يزيد عن انحرافها المعياري بمقدار ٦٠، فما الوسط الحسابي لهذه القيم؟

اختبار ذاتي

س١: أضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة؟

١- ما العبارة الخاطئة دائما من بين العبارات الآتية؟

أ) يعدّ المدى أقل مقاييس التشتت دقة.

ب) لا يمكن أن تكون قيمة التباين سالبة.

جـ) إذا كان الانحراف المعياري لعلامات الصف الثامن يساوي صفراً، فهذا يعني أن جميع علامات الطلاب متساوية.

د) يُعدّ الوسط الحسابي أكثر مقاييس التشتت دقة.

٢- مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه هي (ل، م، ن) وحدة طول، حيث (ن) أكبرها طولاً. أي العبارات الآتية تجعل هذه الأطوال أعداداً فيثاغورية؟

أ) ن^٢= (ل + م)^٢ ب) م^٢ = ن^٢ + ل^٢ جـ) ل^٢ = م^٢ + ن^٢ د) ن^٢= م^٢ + ل^٢

٣- ما العبارة الصحيحة دائماً من بين العبارات الآتية؟

أ) كل مثلثين متشابهين متطابقان.

ب) يتطابق المثلثان إذا كان لهما ثلاثة زوايا متقابلة متساوية في القياس.

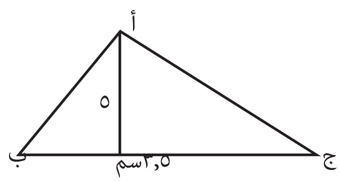
جـ) في المثلثين المتشابهين تكون أطوال الأضلاع المتناظرة متساوية في الطول.

د) إذا تطابق مثلثان في حالة (ضلع، زاوية، ضلع) فإنهما متشابهان.

٤- أي من مجموعات الأعداد الآتية لا تمثل أعداداً فيثاغورية؟

أ) 3، 5، 4 ب) 6، 8، 10 جـ) 1، 1، $\sqrt{٢}$ د) ١٥، ٢٠، ٢٥

٥- ما طول أ ج في الشكل المجاور؟



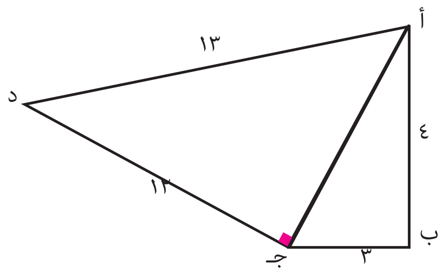
أ) 6سم ب) 4سم

جـ) 5سم د) 8 $\sqrt{٥}$

٦- مدرسة عدد طلابها 120 طالباً، فما قياس زاوية القطاع الدائري لصف عدد طلابه 20 طالباً؟

أ) 30° ب) 60° جـ) 120° د) 360°

س٢ : اعتماداً على الرسم المجاور، أبيّن أنّ : ∠ ب = ٩٠°.



س٣: انظر الجدول الآتي الذي يبين أعداد السيارات التي باعتها شركة تجارة سيارات خلال خمسة أشهر، ثم أجب عن الأسئلة التي تليه:

الشهر	شباط	آذار	نيسان	أيار	حزيران
عدد السيارات	12	8	10	6	16

أ. أجد الانحراف المعياري.

ب. أجد قياس زاوية القطاع الدائري الذي يمثل مبيعات الشركة في شهر آذار.

١-٢٠ حل المعادلة التربيعيّة بالتحليل

تعريف: المعادلة التربيعيّة: هي المعادلة التي يمكن كتابتها على الصورة
أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، حيث: أ، ب، جـ ∈ ح، أ ≠ ٠*.
وتُسمّى قيمُ س التي تحقّق المعادلة، حلولَ (جذور) هذه المعادلة.

نشاط ١:

أحدّدُ المعادلة التربيعيّة في كلٍّ ممّا يأتي، وأوضّح السبب:

أ) ٣س^{٢} − ٤س + ١ = ٠ معادلة تربيعيّة؛ لأنّها تحقّق الصورة العامة.

ب) س + ١ = ٠ ليست معادلة تربيعيّة، (لماذا؟)

جـ) س(س − ١) = ٢ ....

د) $\sqrt{٣\,س^{٢}}$ = ٤ ....

خاصيّة(١): لأيّ عددَيْن حقيقيّيْن أ، ب، إذا كان أ × ب = ٠، فإنّ أ = ٠، أو ب = ٠، أو كليهما يساوي صفر.

نشاط ٢:

أكمل إيجاد قيمة س في كلًّ ممّا يأتي:

أ) (س + ٥)(س − ١) = ٠

إمّا: س + ٥ = ٠، ومنها: س = -٥ أو : س − ١ = ٠، ومنها: س = ...

ب) (٨ − ٢س)(س + ٢) = ٠ إمّا: س + ٢ = ٠ ، ومنها: س = ...

أو : ٨ − ٢س = ٠ ، ومنها: -٢س = -٨ ، ومنها: س = ...

نشاط ٣:

أكمل حلّ المعادلات الآتية:

أ) ٥س^{٢} + ٣س = ٠ أحلّلُ العبارة التربيعيّة، فينتج أنّ: س(٥س + ٣) = ٠ (لماذا؟)

إمّا س = ٠ ، أو ٥س + ٣ = ٠، ومنها: س = $\frac{-٣}{٥}$

ب) س^{٢} − ٥س + ٦ = ٠

* الأعداد الحقيقية (ح) تشمل الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية.

أحلّل العبارة التربيعيّة، فينتج أنّ: (س − ٢)(س − ٣) = ٠

إمّا: س − ٢ = ٠، ومنها: س = ٢ أو : س − ٣ = ٠، ومنها: س = ...

جـ) ٥س^{٢} + ١٣س − ٦ = ٠

أحلّل العبارة التربيعيّة، فينتج أنّ: (٥س − ٢)(س + ٣) = ٠

إمّا: ٥س − ٢ = ٠، ومنها: س = $\frac{٢}{٥}$ أو: س + ٣ = ٠، ومنها: س = ...

أتعلّم: يمكن أحياناً حلّ المعادلة التربيعيّة: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، عن طريق التحليل ومن ثم استخدام الخاصية (١).

نشاط٤:

أُكمل حلّ المعادلات التربيعيّة الآتية:

أ) س^{٢} = ٧س أكتب المعادلة على الصورة العامّة، فتصبح س^{٢} − ٧س = ٠

ومنها : س (س − ٧) = ٠ (لماذا؟)

إمّا: س = ٠ ، أو: س − ٧ = ٠ ، ومنها: س = ...

ب) س^{٢} − ٥ = ٤س أكتب المعادلة على الصورة العامّة، فتصبح: س^{٢} − ٤س − ٥ = ٠

ومنها: (س − ٥)(س + ١) = ٠ (لماذا؟)

إمّا: س − ٥ = ٠، ومنها : س = ... أو: س + ١ = ٠، ومنها: س = ...

نشاط٥:

عددان زوجيّان متتاليان، حاصل ضربهما ١٦٨، فما هذان العددان؟

أفرض أن العدد الأوّل س، فيكون العدد الثاني س + ٢

س (س + ٢) = ١٦٨، س^{٢} + ٢س = ١٦٨ (لماذا؟)

س^{٢} + ٢س − ١٦٨ = ٠ (لماذا؟)، (س + ١٤)(س − ....) = ٠

إمّا: س + ١٤ = ٠، ومنها: س = ...، أو: س − ١٢ = ٠، ومنها: س = ...

إذا كانت س = -١٤، فإنّ العدد الزوجي التالي له -١٢. (لماذا؟)

إذا كانت س = ١٢، فإنّ العدد الزوجي التالي له .... (لماذا؟)

تمارين ومسائل:

١) أيّ من المعادلات الآتية تربيعيّة؟

أ) س^{٢} − ٤س + ١ = ٠

ب) س (س^{٢} − ٢) = ٠

جـ) ($\sqrt{٢}$س − ١)^{٢} = ٠

د) س + ٣ = ٢س + ٢

٢) أحلُّ المعادلات التربيعيّة الآتية:

أ) (٥ − ٢س)(س + ١) = ٠

ب) س^{٢} − ٦س + ٥ = ٠

جـ) ٩س^{٢} − ٩ = ٠

د) س^{٢} + ٨س = ٢٠

هـ) -س^{٢} + ٦س + ١٦ = ٠

مهمة تعليمية:

يعد التبريد أحد طرق حفظ الأطعمة، ويعطى عدد البكتيريا في الأطعمة المبردة لكل غرام بالمعادلة ع = ٢٠ر^{٢} − ٢٠ر + ١٢٠، حيث ر تمثل درجة الحرارة التي تحفظ بها الأطعمة. ماهي درجة الحرارة التي يكون عندها عدد البكتيريا ١١٥ في الغرام الواحد؟

١-٢١ حلّ المعادلة التربيعيّة بطريقة إكمال المربّع

لحلّ المعادلة التربيعيّة المكتوبة على صورة مربّعٍ كاملٍ، يمكن استخدامُ التعريف الآتي:

تعريف: إذا كان س^{٢} = ك، ك ≥ ٠ ، فإنّ س = ±$\sqrt{ك}$ ، يُسمّى $\sqrt{ك}$ الجذر التربيعيّ الموجب للعدد س، ويُسمّى -$\sqrt{ك}$ الجذر التربيعيّ السالب للعدد س.

نشاط١:

أكمل حلّ المعادلات الآتية:

أ) س^{٢} = ٢٥ ، س = ±$\sqrt{٢٥}$، ومنها: س = ±٥

ب) (س − ٤)^{٢} = ٨١ ، س − ٤ = ±٩ (لماذا؟)

إما: س − ٤ = ٩، ومنها: س = ... أو: س − ٤ = -٩، ومنها: س = -٩ + ٤ = ...

جـ) (س − ٢)^{٢} − ٤٩ = ٠ ، (س − ٢)^{٢} = ٤٩

س − ٢ = ±٧ (لماذا؟)

إما: س − ٢ = ٧، ومنها: س=٩ (لماذا؟) أو: س − ٢ = -٧، ومنها: س = ...

قد يتعذر أحياناً استخدامُ طريقة التحليل إلى العوامل في حلّ المعادلات التربيعيّة، فيتم اللجوء إلى كتابة المعادلة بالصورة (س ± هـ)^{٢} = ك، ك > ٠، هـ عدد حقيقي باستخدام طريقة إكمال المربّع؛ وذلك بإضافة $\left(\frac{\text{معامل س}}{٢}\right)^{٢}$ إلى طرفيّ المعادلة، **عندما يكون معامل س^{٢} = ١**

مثال١: أحلُّ المعادلة التربيعيّة: س^{٢} + ٦س − ٢ = ٠ أكتب المعادلة على الصورة: س^{٢} + ٦س = ٢ أجد: $\left(\frac{\text{معامل س}}{٢}\right) = \left(\frac{٦}{٢}\right) = (٣)$

أضيفُ مربّعه إلى طرفيّ المعادلة، فينتج: س^{٢} + ٦س + (٣)^{٢} = ٢ + (٣)^{٢}

س^{٢} + ٦س + ٩ = ٢ + ٩

(س + ٣)^{٢} = ١١ (ألاحظ أنّ الطرف الأيمن أصبح مربّعاً كاملاً) (س + ٣) = ± $\sqrt{١١}$

إمّا: (س + ٣) = $\sqrt{١١}$ ، ومنها: س = $\sqrt{١١}$ − ٣

أو: (س + ٣) = - $\sqrt{١١}$ ، ومنها: س = - $\sqrt{١١}$

نشاط٢: أكمل حلّ المعادلات الآتية:

أ) س^{٢} − ١٠س + ٢٥ = ١١ ألاحظ أنّ: ١٠ = ٢ × ٥

(س − ....)(س − ٥) = ١١ ، (س − ....)^{٢} = ١١

(س − ....) = ± $\sqrt{١١}$ ، ومنها: س = ٥ ± $\sqrt{١١}$ (لماذا؟)

ب) ص^{٢} + ٣ص − ١٠ = ٠ أكتب المعادلة على الصورة ص^{٢} + ٣ص = ١٠

أجد $\left(\frac{\text{معامل ص}}{٢}\right) = \left(\frac{٣}{٢}\right)$، وأضيف مربّعه إلى طرفيّ المعادلة، فتصبح:

ص^{٢} + ٣ص + $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ = ١٠ + $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ ، ومنها ص^{٢} + ٣ص + $\frac{٩}{٤}$ = ١٠ + $\frac{٩}{٤}$

ص^{٢} + ٣ص + $\frac{٩}{٤}$ = ... ، ومنها (ص + $\frac{٣}{٢}$)^{٢} = $\frac{٤٩}{٤}$

(ص + $\frac{٣}{٢}$) = ± $\frac{٧}{٢}$ (لماذا؟)

إما: (ص + $\frac{٣}{٢}$) = $\frac{٧}{٢}$ ، ومنها: ص = $\frac{٧}{٢}$ − $\frac{٣}{٢}$ = ...

أو: (ص + $\frac{٣}{٢}$) = $\frac{-٧}{٢}$ ، ومنها: ص= $\frac{-٧}{٢}$ − $\frac{٣}{٢}$ = ...

نشاط٣: أجدُ حلّ المعادلة $٢س^{٢} + ٥س - ٣ = ٠$.

أقسمُ جميع الحدود على ٢ لأجعل (معامل س٢ = ١)، فتصبح المعادلة بالصورة:

$س^{٢} + \frac{٥}{٢}س - \frac{٣}{٢} = ٠$ أكتب المعادلة على الصورة $س^{٢} + \frac{٥}{٢}س = \frac{٣}{٢}$

أجد: $\left(\frac{\text{معامل س}}{٢}\right) = \frac{٥}{٤}$ (لماذا؟) أضيف مربعه إلى طرفيّ المعادلة، فتصبح:

$س^{٢} + \frac{٥}{٢}س + \left(\frac{٥}{٤}\right)^{٢} = \frac{٣}{٢} + \left(\frac{٥}{٤}\right)^{٢}$ ، ومنها $س^{٢} + \frac{٥}{٢}س + \frac{٢٥}{١٦} = \frac{٣}{٢} + \frac{٢٥}{١٦}$

$س^{٢} + \frac{٥}{٢}س + \frac{٢٥}{١٦} = \frac{٤٩}{١٦}$ ، ومنها $(س + \cdots)^{٢} = \frac{٤٩}{١٦}$

$(س + \frac{٥}{٤}) = \pm \frac{٧}{٤}$ (لماذا)؟

إما: $(س + \frac{٥}{٤}) = \frac{٧}{٤}$ ، ومنها: $س = \frac{٧}{٤} - \frac{٥}{٤} = \cdots\cdot$

أو: $(س + \frac{٥}{٤}) = \frac{-٧}{٤}$ ، ومنها: $س = \frac{-٧}{٤} - \frac{٥}{٤} = \cdots\cdot$

تمارين ومسائل:

١) أحلُّ كلًّا من المعادلات الآتية:

أ) $س^{٢} - ٣٦ = ٠$

ب) $(س + \frac{١}{٣})^{٢} = \frac{٤}{٩}$

جـ) $س^{٢} + ٨س + ١٦ = ١٣$

د) $٣س^{٢} - ٥ = ٠$

٢) أستخدم طريقة إكمال المربع لأجد جذور المعادلات الآتية:

أ) $ص^{٢} - ٥ص = -٤$

ب) $س^{٢} + ٨س + ٤ = ٠$

جـ) $س^{٢} + ٣س + ٢ = ٧$

د) $٧س + ٣ = س^{٢}$

هـ) $-٢س^{٢} - ٣س + ١ = ٠$

مهمة تعليمية:

إذا كانت المِساحة (س) التي يغطّيها جهاز العرض الضوئي على حائط، تُعطى بالمعادلة:
$س = ٠,١٦ ف^{٢}$، حيث: ف تمثل البعد الأفقي بين جهاز العرض والحائط.
ما البعد عن الحائط الذي يجب أنْ يوضع عليه جهاز العرض، حتى تكون المساحة على الحائط ٤م٢؟

١-٢٢ حلّ المعادلة التربيعيّة باستخدام القانون العام

تعريف: يُسمّى المقدار ب^{٢} − ٤ أ جـ مميّزَ المعادلة التربيعيّة:
أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر، ويُحدّدُ مميّز المعادلة التربيعية عدد الحلول (الجذور) لتلك المعادلة.

نشاط ١:

أكمل إيجاد المميز، وجذور المعادلة: س^{٢} + ٥س + ٤ = ٠ (إنْ أمكن)

أ = ١، ب = ٥، جـ = ٤

المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = ٥^{٢} − ٤ × ١ × ٤ = ٢٥ − ١٦ = ٩؛ أي أنّ: المميز موجب.

لإيجاد جذور المعادلة س^{٢} + ٥س + ٤ = ٠ ، أحلّل العبارة فتصبح: (س + ٤)(س + ١) = ٠

إمّا: س + ٤ = ٠ ، ومنها: س = ... أو: س + ١ = ٠، ومنها: س = ...

ألاحظ أنّ المميز موجب، وأن للمعادلة التربيعية جذرين مختلفين.

أتعلّم: إذا كان مميّز المعادلة التربيعيّة (أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر) موجباً، فإنّ لهذه المعادلة جذرين حقيقيّين مختلفيْن.

نشاط ٢:

أكمل إيجاد المميّز وجذور المعادلة: ٤ص^{٢} + ١٢ص + ٩ = ٠

أ = ٤، ب = ١٢، جـ = ٩

المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = (١٢)^{٢} − ٤ × ٤ × ٩ = ١٤٤ − .... = ٠

لإيجاد جذور المعادلة: ٤ص^{٢} + ١٢ص + ٩ = ٠

أحلّل العبارة التربيعية فتصبح المعادلة بالصورة: (٢ص + ٣)^{٢} = ٠ (لماذا؟)

إمّا: ٢ص + ٣ = ٠ ، ومنها: ص = ...

أو : ٢ص + ٣ = ٠ ، ومنها: ص = ...

ألاحظ أنّ جذريّ المعادلة التربيعيّة متساويان.

أتعلّم: إذا كان مميّز المعادلة التربيعيّة ($أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$) يساوي صفر، فإنّ لهذه المعادلة جذراً واحداً مكرراً.

نشاط٣:

أكمل إيجاد المميّز وجذور المعادلة: $س^{٢} - ٢س + ٣ = ٠$

أ = ١، ب = -٢، جـ = ...

المميّز = $ب^{٢} - ٤$ أ جـ = ٤ − ٤( )( ) = -٨   (لماذا؟)

* أحلّ المعادلة بإكمال المربع، فينتج أنّ: $س^{٢} - ٢س = -٣$

ومنها: $س^{٢} - ٢س + ١ = -٣ + ١$

: $(س - ...)^{٢} = -٢$ ، : $(س - ...) = \pm\sqrt{-٢}$

لكن $\sqrt{-٢}$ عدد غير حقيقيّ؛ أي: أنّه لا يوجد حلّ في مجموعة الأعداد الحقيقيّة.

أتعلّم: إذا كان مميّز المعادلة التربيعيّة ($أ س^{٢} + ب س + جـ = $ صفر) سالباً، فلا يوجد لها جذور حقيقيّة (لا يوجد لها حلّ في مجموعة الأعداد الحقيقيّة).

نشاط٤:

أكمل إيجاد مميّز المعادلات الآتية، وأبيّنُ عدد جذورها:

أ) $٣س^{٢} - ٥س + ٤ = ٠$،   أ = ٣، ب = -٥، جـ = ٤

المميّز = $ب^{٢} - ٤$ أ جـ = $(-٥)^{٢} - ٤ \times ٣ \times ٤ = ٢٥ - ٤٨ = ...$

وبما أنّ المميّز سالب، فإنّ عددَ جذور المعادلة يساوي ....

ب) $٤س^{٢} - ٤س + ١ = ٠$ ، أ = ٤، ب = -٤، جـ = ...

المميز = $ب^{٢} - ٤$ أ جـ = $(-٤)^{٢} - ٤ \times ٤ \times .... = ...$

وبما أنّ المميّز .... ، فإنّ عددَ جذورِ المعادلة يساوي ......

جـ) $-٣ص^{٢} - ٤ص - ١ = ٠$ ، أ = ... ، ب = ... ، جـ = -١

المميّز = $ب^{٢} - ٤$ أ جـ = $(...)^{٢} - ٤ \times (-٣)(-١)$

= ١٦ − ١٢ = ...

وبما أنّ المميّز موجب، فإنّ عددَ جذور المعادلة يساوي ......

تعريف: يمكن إيجاد جذور المعادلة التربيعيّة المكتوبة بالصورة:
أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠، أ ≠ ٠ (إنْ أمكن حلها) باستخدام القانون العام

$$س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢أ}$$

نشاط ٥:

أكمل حلّ المعادلة التربيعيّة الآتية، مستخدماً القانون العام:

٢,٥س + ١,٥ = س^{٢} ، ومنها س^{٢} – ٢,٥س – ١,٥ = ٠

٢س^{٢} – ٥س – ٣ = ٠ (لماذا؟)

أ = ٢، ب = ... ، جـ = -٣

ومنها: المميّز = (-٥)^{٢} – ٤ (...) (...)

= ٢٥ + ٢٤ = ... س = $\frac{- (-٥) \pm \sqrt{٤٩}}{٢ \times ...}$

ومنها: س = $\frac{(٥) \pm ٧}{٤}$ إمّا: س = ... ، أو: س = ...

تمارين ومسائل:

١) أجد مميّز كلٍّ من المعادلات الآتية، وأحدّدُ عدد جذورها:
أ) ٥س^{٢} + ٣س = -١ ب) ٤ = ١٣س – س^{٢} جـ) ٤٠ص = ٢٥ + ١٦ص^{٢}

٢) أستخدم القانون العام لحلِّ كلٍّ من المعادلات الآتية (إنْ أمكن):
أ) ٢ص^{٢} + ١ = ٦ص
ب) ٤س^{٢} – ١٢س = -٥
جـ) س^{٢} + ٦س = ١٦
د) ٦س^{٢} + ١١ = -٢٥س – ١٠

٣) ما قيمة ك التي تجعل جذريّ المعادلة: ٣س^{٢} – ٦س + ك = ٠، متساويين؟

مهمة تعليمية:

يسدد لاعبو كرة السلة كراتهم نحوى المرمى بمسار يمكن تمثيله بالمعادلة: ع = -٩س^{٢} + ٨١س + ٥ حيث ع تمثل ارتفاع الكرة بالمتر بعد س ثانية.
أحسب الزمن اللازم لتكون الكرة على ارتفاع ٣م.

١-٢٣ تحليل الفرق بين مكعبيْن ومجموع مكعبين

نشاط١:

أُكمل إيجادَ ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:

أ) $$(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤) = س(س^{٢} + ٢س + ٤) - ٢(س^{٢} + ٢س + ٤)$$
$$= س^{٣} + ٢س^{٢} + ٤س - ٢س^{٢} - ٤س - \cdots$$
$$= س^{٣} - ٨$$

ب) $$(٢س - ص)(٤س^{٢} + ٢س\,ص + ص^{٢})$$
$$= ٢س(٤س^{٢} + ٢س\,ص + ص^{٢}) - ص(٤س^{٢} + ٢س\,ص + ص^{٢})$$
$$= ٨س^{٣} + \cdots\cdots + ٢س\,ص^{٢} - (٤س^{٢}ص + \cdots\cdots + ص^{٣})$$
$$= ٨س^{٣} + ٤س^{٢}ص + ٢س\,ص^{٢} - ٤س^{٢}ص - ٢س\,ص^{٢} - ص^{٣}$$
$$= ٨س^{٣} - \cdots\cdots$$ ماذا تلاحظ؟

أتعلّم: يُسمّى المقدار الجبري $أ^{٣} - ب^{٣}$ فرقاً بين مكعبين، ويتمّ تحليلُه؛ وفقاً للقاعدة:
$$أ^{٣} - ب^{٣} = (أ - ب)(أ^{٢} + أ\,ب + ب^{٢})$$

نشاط٢:

أُكملُ تحليلَ المقادير الجبريّة الآتية:

١) $س^{٣} - ٢٧ = س^{٣} - (٣)^{٣} = (س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)$

٢) $أ^{٣} - ١٢٥ = أ^{٣} - (\cdots\cdots)^{٣} = (أ - ٥)(أ^{٢} + ٥أ + \cdots\cdots)$

٣) $٨ - ٦٤س^{٣} = (٢)^{٣} - (٤س)^{٣} = (\cdots\cdots - ٤س)(٤ + ٨س + \cdots\cdots)$

٤) $١٢٥س^{٣} - ٨ص^{٣} = (٥س)^{٣} - (٢ص)^{٣}$
$= (٥س - \cdots\cdots)(٢٥س^{٢} + ١٠س\,ص + ٤ص^{٢})$

٥) $٨أ^{٣} - ٣٤٣ = (٢أ)^{٣} - (٧)^{٣} = (٢أ - ٧)(٤أ^{٢} + ١٤أ + \cdots\cdots)$

تعريف: يُسمّى المقدار الجبري $أ^{٣} + ب^{٣}$ مجموعَ مكعّبيْن، وتم تحليلُه وفقاً للقاعدة: $أ^{٣} + ب^{٣} = (أ + ب)(أ^{٢} - أ\,ب + ب^{٢})$.

نشاط٣:

أكملُ تحليلَ المقادير الجبريّة الآتية:

أ) ص^{٣} + ٦٤ = ص^{٣} + (٤)^{٣} = (ص + ٤)(ص^{٢} − ٤ص + ١٦)

ب) م^{٣} + ٨ = م^{٣} + (٢)^{٣} = (م + ⋯)(م^{٢} − ٢م + ⋯⋯)

جـ) ٨أ^{٣} + ٣٤٣ = (٢أ)^{٣} + (٧)^{٣} = (٢أ + ٧)(⋯⋯ − ١٤أ + ⋯⋯)

د) س^{٣} + ١ = (س + ⋯⋯)(س^{٢} − ⋯⋯ + ⋯⋯)

تمارين ومسائل:

١) أكتبُ كلًّا من الآتية في أبسط صورة:

أ) (٣س − ١)(٩س^{٢} + ٣س + ١)

ب) (ل − $\frac{١}{٤}$)(ل^{٢} + $\frac{١}{٤}$ ل + $\frac{١}{١٦}$)

جـ) (ن^{٢} − ١)(ن^{٤} + ن^{٢} + ١)

٢) أحلّل المقادير الآتية إلى عواملها الأوليّة:

أ) س^{٣} − ٦٤

ز) ع^{٣} + ١

ب) ٢١٦س^{٣} − ٨

ل) ٢٧ + ٦٤ك^{٣}

جـ) $\frac{٢٧}{١٢٥}$ − س^{٣}

هـ) $\frac{٢١٦}{ب^{٣}}$ + ١

د) ٢ل^{٣} − ١٦

و) ٣ع^{٣} + ١٩٢

٣) أستخدم تحليل الفرق بين مكعبين ومجموع مكعبين في إيجاد قيمة كلٍّ من الآتية:

أ) ($\frac{٢}{٣}$ − $\frac{٥}{٦}$) (($\frac{٢}{٣}$)^{٢} + $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{٥}{٦}$ + ($\frac{٥}{٦}$)^{٢})

ب) (٧ − ٥)(٧^{٢} + ٧ × ٥ + ٥^{٢})

جـ) (٢٠ − ١٧)(٢٠^{٢} + ٢٠ × ١٧ + ١٧^{٢})

هـ) ($\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$)($\frac{١}{٤}$ − $\frac{١}{٦}$ + $\frac{١}{٩}$)

و) ($\frac{١}{٢}$)^{٣} + ($\frac{٣}{٤}$)^{٣}

٤) إذا كان س = ص + ٤، س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٤٩، فما قيمة س^{٣} − ص^{٣}؟

١-٢٤ حلّ معادلتَيْنِ خَطِّيَّتَيْنِ بمتغيريْن

تعريف: تُسمّى عمليّةُ إيجادِ جميعِ قيمِ س الّتي تحقّقُ المعادلةَ عمليّةَ حَلِّ المعادلة، وتُسمّى مجموعةُ قيمِ س الّتي تحقّق المعادلةَ مجموعةَ الحلِّ للمعادلة.

أوّلاً- حلّ معادلتَيْنِ خَطِّيَّتَيْنِ بطريقة التَّعويض:

يمكن حلّ معادلتَيْنِ خَطِّيَّتَيْن بمتغيريْنِ بطريقة التَّعويض، من خلال الخطوات الآتية:

- أختارُ إحدى المعادلتَيْنِ، ثم أجعَلُ أحد المتغيرين فيها موضوعاً للقانون*.
- أُعوّضُ قيمة المتغير موضوع القانون في المعادلة الأُخرى.
- أَحُلُّ المعادلة النّاتجة الّتي تضم متغيراً واحداً.
- أُعوّضُ قيمة هذا المتغير النّاتجة في إحدى المعادلتَيْنِ لأجد قيمة المتغيّر الثّاني.

نشاط ١:

أُكْمِلُ حلّ المعادلتَيْنِ الآتيتين بطريقة التَّعويض:

- ٢س + ٣ص = ١٦ ....(١)   - ٣س - ص = ٢ ....(٢)

أجعل ص موضوع القانون في المعادلة (٢) ومنها ص= ٣س - ٢ (لماذا؟)

أُعوّض قيمة ص في المعادلة (١)، فَيَنْتُج: ٢س + ٣(........) = ١٦

ومنها قيمة س = ٢ (لماذا؟) أُعوّضُ قيمة س = ٢ في المعادلة: ص = ٣س - ٢

فَيَنْتُج أنّ ص = ٤ (لماذا؟) أَتحقَّقُ من صحّة الحلّ.

أُفَكِّر: هل تختلف مجموعة حلّ المعادلتَيْنِ السّابقتَيْنِ عندما تُجْعَل س موضوعاً للقانون؟

نشاط ٢:

أُكْمِلُ حلّ المعادلتَيْنِ الآتيتَيْنِ بطريقة التَّعويض:

س + ٣ص = ١ .... (١)   ٣س - ٤ص = -٢٣ .... (٢)

أختارُ المعادلة (١)، وأجعلُ س موضوع القانون فيها، ومنها س = (١ - ٣ص) ....(٣)

أُعَوِّضُ قيمة س في المعادلة (٢)، فَيَنْتُج أنّ: ٣(١ - ٣ص) -٤ص = -٢٣

٣(١ -٣ص) - ٤ص = -٢٣ ، ومنها: ٣ - ٩ص - ٤ص = -٢٣

قيمة −١٣ص = -٢٦ (لماذا؟) ومنها: ص = ٢ (لماذا؟)
لإيجاد قيمة س، أُعَوِّض قيمة ص في المعادلة (٣)، فيَنْتُج أنّ: س = ١- × ٣ − ١ ، ومنها
س = -٥ (لماذا؟)

ثانياً - حلّ معادلتَيْنِ خَطِّيَّتَيْن بطريقة الحذف:

تقوم فكرة حلّ معادلتَيْنِ خَطِّيَّتَيْن بطريقة الحذف على جمع أو طرح المعادلتَيْنِ، أو صورهما المختلفة* لحذف أحد المتغيرَيْن، بحيث تَنْتُجُ معادلة بمتغير واحد.

نشاط ٣:

أُكْمِلُ حلّ المعادلتَيْنِ الآتيتَيْنِ بطريقة الحذف:

٣س + ص = ١٠ .... (١) س + ص = ٤ .... (٢)

أَطْرَحُ المعادلتَيْنِ: ٣س − س + ص − ص = ١٠ - ... ومنها: ٢س = ... (لماذا؟) س = ...

لإيجاد قيمة ص، أُعَوِّضُ قيمة س في المعادلة (١)

٣(٣) + ص = ١٠ ومنها: ص = ... (لماذا؟)

نشاط ٤:

أُكْمِلُ حلّ المعادلتَيْنِ الآتيتَيْنِ بطريقة الحذف:

٢س + ٣ص = ١ ....(١)

٣س − ٤ص = ١٠ ....(٢)

أُلاحِظُ أنَّ معاملات س و ص غير متساوية في المعادلتَيْنِ،

أَضْرِبُ طرفَي المعادلة (١) بالعدد -٣ فيَنْتُج: -٦س − ٩ص = -٣

أَضْرِبُ طرفَي المعادلة (٢) بالعدد ٢ فيَنْتُجُ: ٦س − ٨ص = ٢٠

أجمع المعادلتَيْنِ:

-٦س − ٩ص = -٣
+ ٦س − ٨ص = ٢٠
-١٧ص = ١٧

ومنها: ص = ... (لماذا؟)

ولإيجاد قيمة س، نُعَوِّضُ قيمة ص في المعادلة (١)

٢س + ٣ص = ١ و منها: ٢س + ٣(-١) = ١ س = ...

أُفَكِّر: هل تختلف قيمة س إذا عُوِّضَتْ قيمةُ ص في المعادلة الثّانية؟

تَمارينُ وَمَسائِل:

١) أَحُلُّ كُلَّ زوج من المعادلات فيما يأتي بطريقة التَّعويض:

أ) ٤س + ص = ١ ، ٥س - ٣ص = -٢٠

ب) ٢س - ص = ٥ ، ٣س + ٥ص = ١

٢) أَحُلُّ كُلَّ زوج من المعادلات فيما يأتي بطريقة الحذف:

أ) أ + ب = ١٠ ، أ + $\frac{٣}{٢}$ ب = -٤

ب) أ + ٤ب = ٣ ، ٦أ = ١ + ٢ب

مهمة تعليمية:

تباع التذاكر في مدينة ملاهٍ بسعر دينار واحد للأطفال، وديناريْنِ للكبار، فإذا كان العائد من بيع التذاكر في أحد الأيام ٥٦٠ ديناراً، وكان عدد الزّائرينَ من الصِّغار يزيد ٨٠ شخصاً عن عدد الزّائرينَ من الكبار. فما عدد زائري مدينة الملاهي في ذلك اليوم؟

- أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

المهارة	مرتفع	متوسط	دون المتوسط
التعرّف إلى الصّورة العامة للمعادلة التربيعيّة.			
حلّ المعادلة التربيعيّة بطرقٍ مختلفة.			
التعرُّف إلى مجموع وفرق مكعّبيْن.			
تحليل مجموع وفرق بين مكعبيْن.			
استخدام حلّ المعادلة التربيعيّة، والتحليل في حلّ مسائلَ حياتيّة.			

ورقة عمل (١)

١) أضعُ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ أيّ المعادلات الآتية تكافئ المعادلة $س^٢ + ٥س = ١٤$؟

أ) $(س + \frac{٥}{٢})^٢ = \frac{٨١}{٤}$ ب) $(س + \frac{٥}{٢})^٢ = \frac{٤٥}{٤}$

جـ) $(س - \frac{٥}{٢})^٢ = \frac{٨١}{٤}$ د) $(س - \frac{٥}{٢})^٢ = \frac{-٥}{٤}$

٢ ما عدد الجذور الحقيقية للمعادلة $س^٢ - ٥س + ٨ = ٠$ ؟

أ) صفر ب) ١

جـ) ٢ د) لا يمكن تحديده.

٣ ما جذور المعادلة $٢س^٢ + ٥س + ١ = ٠$؟

أ) $\frac{٥ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$ ب) $\frac{٥ \pm \sqrt{٣٣}}{٤}$

جـ) $\frac{-٥ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$ د) $\frac{-٥ \pm \sqrt{٣٣}}{٤}$

٤ ما قيمة م التي تجعل المقدار $(س - م)(س^٢ + ٢س + ٤)$ فرقاً بين مكعبين؟

أ) ٤ ب) ٢ جـ) -٢ د) -٨

٢) أحلّ المعادلات الآتية:

أ) $ب^٢ - ٤ب + ٤ = ١٦$

ب) $ص^٢ - ١٢ص + ٣٦ = ٥$

جـ) $(س + ٣)(س - ٤) = ١٠$

٣) إذا كان العدد ٢ أحدَ جذريّ المعادلة: $س^٢ - ٥س + ن =$ صفر، أجد قيمة الثابت ن، ثمّ أجدُ الجذرَ الثاني.

٤) أحلّل المقادير الآتية إلى عواملها الأوّليّة:

أ) $\frac{١}{١٢٥}أ^٣ - \frac{٢٧}{٦٤}ص^٣$ ب) $٤٠س^٣ + ٥ص^٣$ جـ) $٥٤س^٤ - ٢س$

متوازي الأضلاع

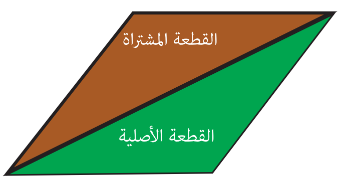
أتذكّر: من خصائص متوازي الأضلاع : كلُّ ضلعيْنِ متقابليْنِ متساويانِ في الطّول.

أتعلّم: يمكن إنشاءُ متوازي أضلاعٍ من مثلّثٍ معلومٍ باستخدام خاصيّة متوازي الأضلاع (كلُّ ضلعيْنِ متقابليْنِ متساويانِ في الطول).

نشاط ١:

يمتلكُ مزارعٌ قطعةَ أرضٍ مثلّثةَ الشّكل مساحتها ١٠٠٠م^{٢}، فإذا قام المزارع بشراء قطعةِ أرضٍ مجاورةٍ، لها الأبعادُ نفسُها، لتصبحَ أرضُه على شكل متوازي أضلاع، فما مساحةُ قطعةِ الأرضِ التي أصبح يمتلكها المزارع؟

أرسم رسماً توضيحيّاً كما في الشكل المجاور.



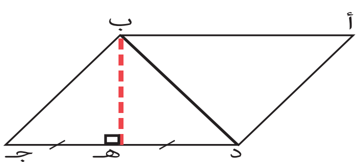
مساحة قطعة الأرض = مساحة متوازي الأضلاع = ٢ × مساحة المثلث (لماذا ؟)

= ٢ × ...... = ٢٠٠٠م^{٢}

أتعلّم: مساحة متوازي الأضلاع = ٢ × مساحة المثلث المشترك معه في القاعدة والارتفاع.

نشاط ٣:

د ب جـ مثلّثٌ متساوي الأضلاع، طول ضلعه ٦ سم، أجدُ مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ د.



مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ د = ٢ × مساحة المثلث د ب جـ (لماذا؟)

مساحة المثلث د ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × د جـ × ب هـ = ٣ ب هـ

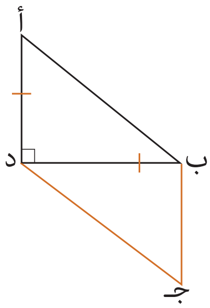
أستخدم نظريّة فيثاغورس لإيجاد ب هـ (لماذا؟)

(ب د)^{٢} = (ب هـ)^{٢} + (د هـ)^{٢} ، ومنها: ٣٦ = (ب هـ)^{٢} + ٩

ب هـ = $\sqrt{٢٧}$ = ٣ $\sqrt{٣}$ سم   ومنها: مساحة المثلث د ب جـ = ٣ × ٠٠٠٠سم^{٢} = ٩$\sqrt{٣}$ سم^{٢}

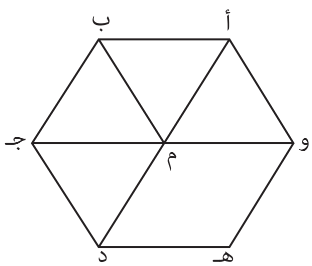
مساحة متوازي الأضلاع = ٢× ٩$\sqrt{٣}$ = ٠٠٠٠سم^{٢}

تمارين ومسائل:



١) أ ب جـ د متوازي أضلاع، أ د ب مثلث متساوي الساقيْن، وقائم الزاوية في د،

إذا كان أ د = ٤سم، أجد مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ د؟

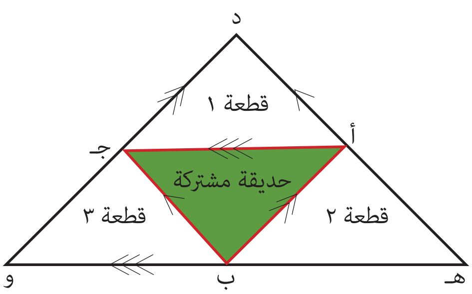


٢) بالاعتماد على الشكل المجاور، الذي فيه $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{و جـ}}$ ،

مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ م تساوي ٢٠سم^{٢}،

ما مساحة الشكل الرباعي أ و جـ ب؟

مهمة تعليمية:



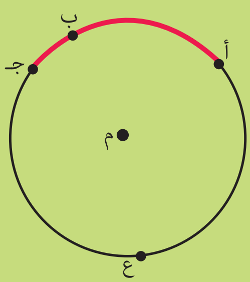
ورث ثلاثةُ إخوةٍ قطعةَ أرض، مثلّثة الشّكل، فأرادوا تقسيمَها بينهم بالتساوي، اقترح أحدُهم تقسيمَ قطعةِ الأرض، كما في الشكل المجاور، على أنْ تبقى المنطقةُ أ ب جـ حديقةً مشتركة. فهل تتساوى الحصصُ في قطعة الأرضِ بناءً على هذا الاقتراح؟ أوضح اجابتي؟

١-٢٦ القطاع الدائريّ والقطة الدائرية

تعريف: لتكن أ ، جـ نقطتيْن على الدائرة، كما في الشكل المجاور، تقسمان الدائرة إلى جزأين، يُسمّى كلُّ جزءٍ منهما قوساً للدائرة، ويرمز له بالرمز $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$.

القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$ ، ويُميّز بالرمز $\overset{\frown}{\text{أ ب جـ}}$.

القوس الأكبر $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$ ، ويُميّز بالرمز $\overset{\frown}{\text{أ ع جـ}}$.



٢- القطاع الدائري هو: الجزءُ المحصورُ بين نصفيّ قطريْن وقوسٍ في دائرةٍ، وتُسمّى الزاويةُ المركزيّةُ المحصورةُ بين نصفيّ قطريْن فيه زاويةَ القطاعِ الدائريّ.

نشاط ١

أتأمّلُ القطاعاتِ الدائريّة في الجدول الآتي، ثمّ أُكمل:

القطاع	الكسر الذي يمثّله طول القوس الأصغر	قياس زاوية القطاع الأصغر	نسبة طول قوس القطاع الأصغر إلى محيط الدائرة	نسبة مساحة القطاع الأصغر إلى مساحة الدائرة	نسبة قياس زاوية القطاع الأصغر إلى الدورة الكاملة
	$\frac{١}{٢}$	١٨٠°	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١٨٠°}{٣٦٠°} = \frac{١}{٢}$
		٩٠°	$\frac{١}{٤}$		$\frac{٩٠°}{٣٦٠°} = ...$
	$\frac{١}{٨}$			$\frac{١}{٨}$	

أتعلّم: إذا كانت (هـ) زاوية القطاع الدائري في دائرة، فإنّ:

$$\frac{\text{زاوية القطاع (هـ)}}{٣٦٠°} = \frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}}$$

نشـاط٢: قطـاعٌ دائـريّ فـي دائـرةٍ نصـفُ قطرِهـا ١٤سـم، وطـولُ قوسِـه ١١سـم، أجـدُ قيـاسَ زاويـةِ قطاعـه.

$$\frac{\text{زاوية القطاع}}{٣٦٠^\circ} = \frac{\text{طول قوس القطاع}}{٢\text{نق}\,\pi}$$

زاوية القطاع = $\frac{\text{طول قوس القطاع}}{٢\text{نق}\,\pi}$ × ٣٦٠° (لماذا) ؟

زاوية القطاع = $\frac{١١}{٢\times١٤\times\cancel{\frac{٢٢}{٧}}}$ × ٣٦٠° = $\frac{١}{٨}$ × ٣٦٠° زاوية القطاع = ٠٠٠٠٠

أتعلّم: زاوية القطاع الدائري = $\frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}}$ × ٣٦٠° .

نشاط٣: رُسِمَ قطاعٌ دائريّ في دائرةٍ نصفُ قطرِها ٣,٥سم، فكانت زاوية هذا القطاع ٣٠°، فما طول القوس المقابل للزاوية ٣٠°؟

$$\frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{زاوية القطاع}}{٣٦٠^\circ}$$

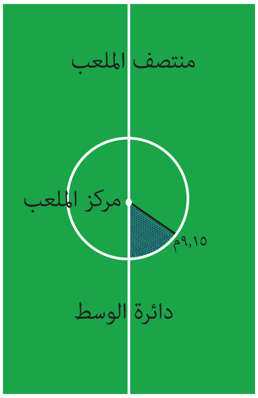
طول قوس القطاع = $\frac{\text{زاوية القطاع}}{٣٦٠^\circ}$ × محيط الدائرة (لماذا؟)

طول قوس القطاع = $\frac{٣٠^\circ}{٣٦٠^\circ}$ × ٢ نق π ومنها = $\frac{١}{١٢}$ × ٢× ٣,٥ π = ٠٠٠٠٠سم

أتعلّم: طول قوس القطاع الدائري = $\frac{\text{زاوية القطاع}}{٣٦٠^\circ}$ × محيط الدائرة.

نشاط ٤:

أراد مهندسٌ إعادةَ تعشيبِ المنطقةِ التالفةِ من دائرة الوسط في ملعب كرة قدم، كما في الرسم التوضيحي المجاور. أُكملُ إيجادَ مِساحةِ القطاع الدائري المراد إعادةُ تعشيبه، علماً بأنّ نصفَ قطرِ دائرةِ وسطِ الملعب = ٩,١٥م، وطول قوس قطاع المنطقة التالفة ٢٢م.



مساحة القطاع الدائري = $\frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}}$ × مساحة الدائرة (لماذا؟)

= $\frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{٢} \times \text{نق} \; \pi}$ × نق^{٢} × π = $\frac{١}{٢}$ × طول قوس القطاع × نق (لماذا؟)

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٢ × ٩,١٥ = ٠٠٠٠م^{٢}

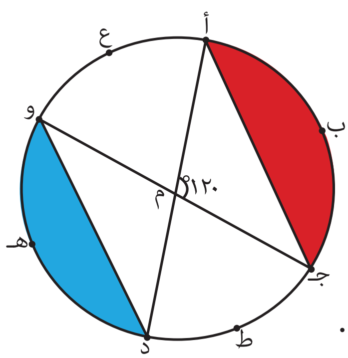
أتعلّم: مساحة القطاع الدائري = $\frac{\text{طول قوس القطاع}}{\text{محيط الدائرة}}$ × مساحة الدائرة .

= $\frac{١}{٢}$ × طول قوس القطاع × نق

تعريف: يُسمّى الجزءُ المحصورُ بين قوسٍ ووترٍ يمرُّ بنهايتيّ ذلك القوس في الدائرة القطعةَ الدائريّة.

نشاط ٥:

أتأمّل الشكل المجاور، ثم أُكمل:



- زاوية القطعة الدائرية أ ب جـ = زاوية القطاع الدائري أ م جـ ب
= ١٢٠° (لماذا؟)
- زاوية القطعة الدائرية د هـ و = زاوية القطاع الدائري .... = ...
- زاوية القطعة الدائرية جـ ط د = ...

أتعلّم: زاوية القطعة الدائريّة تساوي زاويةَ القطاعِ الدائريّ المشتركة معه في القوس نفسه.

نشاط٦:

أجدُ زاويةَ قطعةٍ دائريّةٍ في قطاعٍ دائريّ، طولُ قوسِه ٥,٦ π سم، ونصفُ قطرِ دائرتِه ٧سم.

$$\text{زاوية القطعة الدائريّة} = \text{زاوية القطاع الدائري} = \frac{\text{طول قوس القطاع}}{٢ \times \text{نق}\ \pi} \times ٣٦٠^\circ$$

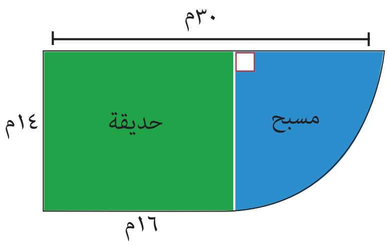
$$= \frac{٥,٦\ \pi}{٢\ (٧)\ \pi} \times ٣٦٠^\circ = \ldots\ldots$$

تمارين ومسائل:

١) قطاعٌ دائريّ مسِاحتُه ٥٠ سم^٢، ونصفُ قطرِ دائرته ٧سم، فما طول قوس هذا القطاع؟

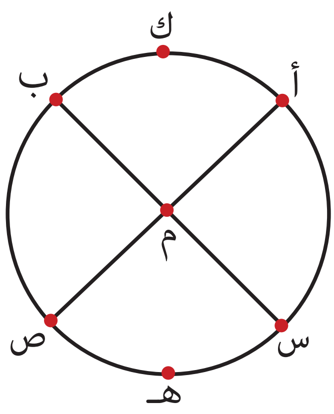
٢) ما قياسُ زاويةِ قطاعٍ دائريّ، نصفُ قطرِ دائرتِه ١٥سم، ومِساحتُه ٤٥٠سم^٢؟

٣) يُمثّلُ الشكلَ المجاورَ مخطّطَ مسبحٍ وحديقةِ منزل. أجدُ:



أ) مِساحةَ سطحِ المسبح. ب) محيطَ الحديقةِ والمسبح.

٤) قطاعٌ دائريّ محيطُه ٢٥سم، ومِساحتُه ٣٦سم^٢، أجدُ نصفَ قطرِ دائرتِه، وطولَ قوسه.



٥) أجدُ طولَ قوسِ قطعةٍ دائريّةٍ في دائرةٍ نصفُ قطرِها ٢١ سم، وقياسُ زاويةِ قطاعِها ٣٦°.

٦) رُسِمَ قطران في دائرة مركزها م، كما في الشكل المجاور فإذا كانت مساحة القطعة الدائرية أ ك ب = ٥سم^٢، وكانت مساحة القطاع الدائري ص م س هـ = ١١سم^٢، فما مساحة المثلث م س ص.

١-٢٧ الأسطوانة

تعريف: الأسطوانة الدائريّة القائمة: هي المجسّمُ المتولّدُ من دوران المستطيل دورةً كاملةً حول أحدِ أضلاعِه.

نشاط ١:

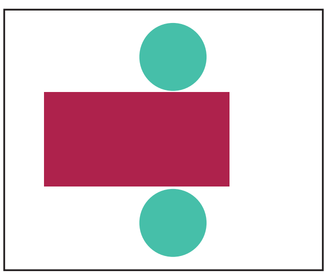
١) أحضر علبة معدنية أسطوانية مغلقة من القاعدتين، وأرسم مولداً لهذه الأسطوانة.

٢) أحضر قطعة كرتون مستطيلة الشكل، بحيث يكون عرضها مساوياً لطول مولد الأسطوانة، وأضعها على سطح مستوٍ.

الشكل (١)

٣) أثبت مولد الأسطوانة عند حافة قطعة الكرتون كما في الشكل (١).

٤) أدور الأسطوانة على قطعة الكرتون حتى يعود مولد الأسطوانة ملامساً لسطح القطعة.



الشكل (٢)

٥) أحدد المنطقة التي دارت عليها الأسطوانة.

٦) أقص المنطقة المستطيلة الناتجة والتي طولها يساوي محيط قاعدة الأسطوانة، وعرضها يساوي ارتفاع الأسطوانة.

٧) أرسم قاعدتي الأسطوانة، وأقصهما. فتكون شبكة الأسطوانة كما في الشكل (٢).

أتعلّم: شبكةُ الأسطوانةِ الدائرية القائمة: هي مستطيلٌ طولُ أحد أضلاعِه محيطُ القاعدة ، وطولُ الضّلع الآخر للمستطيل ارتفاعُ الأسطوانة ، ودائرتان متطابقتان. تُسمّى الدائرتان قاعدتيّ الأسطوانة.

نشاط ٢:

يُرادُ بناءُ أسطوانةٍ مفتوحةٍ من القاعدتين من مستطيلٍ، طولُه يساوي ٧ π سم، وعرضُه ٣سم، فما المِساحةُ الجانبيّة للأسطوانة؟

ارتفاع الأسطوانة = عرض المستطيل = ٣سم. محيط قاعدة الأسطوانة = طول المستطيل = ٧ π سم (لماذا؟)

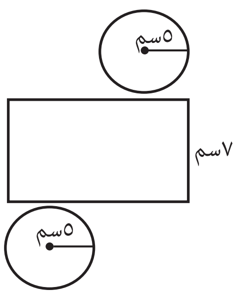
المساحة الجانبيّة للأسطوانة = محيط قاعدة الأسطوانة × الارتفاع (لماذا؟)

= ٧ π × ٣ = ...سم^{٢}

أتعلّم: المِساحةُ الجانبيّةُ للأسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع = ٢نق π × الارتفاع.

نشاط ٣:

معتمداً على شبكة الأسطوانة المبيّنة في الشكل المجاور، أجدُ المِساحةَ الكليّة لهذه الأسطوانة.



المِساحة الجانبيّة للأسطوانة = مساحة المستطيل.

= محيط الدائرة × ارتفاع الأسطوانة (لماذا؟) = ٢ نق π × ٧ = ٢ × ٥ × ٧ × π = ...سم^{٢}

مساحة قاعدة الأسطوانة = مساحة الدائرة. = نق^{٢} × π = ...سم^{٢}

المساحة الكليّة للأسطوانة = المساحة الجانبيّة للأسطوانة + مساحة القاعدتيْن

= ٧٠ π + ٢ × مساحة الدائرة = ٧٠ π + ٥٠ π = ...سم^{٢}

أتعلّم: المِساحة الكليّة للأسطوانة = المساحة الجانبيّة + مساحة القاعدتين.

= ٢ نق π ع + ٢نق^{٢}π

نشاط ٤:

ما المِساحة الكليّة لأسطوانةٍ نصفُ قطرِ قاعدتِها ٣,٥سم، وارتفاعها ٨سم؟

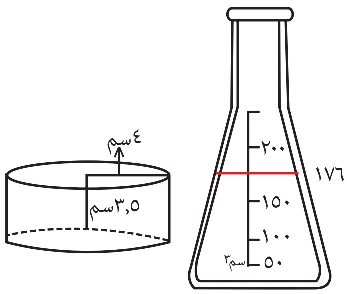
المساحة الكليّة للأسطوانة = ٢نق π ع + ٢نق^{٢} π

= ٢(٣,٥) π (٨) + ٢(٣,٥)^{٢} π = ٥٦ π + ٢(١٢,٢٥) π

= ٥٦ π +.... = ...سم^{٢}

نشاط ه:

وعاءٌ على شكل أسطوانةٍ نصفُ قطرِ قاعدتِه ٤سم ، وارتفاعُه ٣,٥سم، مُلِئ بالماء، وأُفرِغَ في مدرجٍ مخبريّ لقياس الحجم، فأشار التدريج إلى أنّ حجم الماء في الأسطوانة ١٧٦سم^{٣}، كما في الشكل التوضيحي المجاور.



ما العلاقة بين حجم الماء في الأسطوانة وحاصل ضرب مساحة قاعدتها في ارتفاعها؟

مساحة القاعدة × الارتفاع = نق^{٢} π × ع

= (٤)^{٢} × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٣,٥ = ... × ١١ (لماذا؟) = ١٧٦سم^{٣}

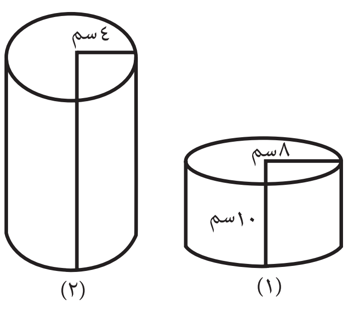
ألاحظ أنّ: حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع.

أتعلّم: حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع.
= نق^{٢} π × ع

تمارين ومسائل

١) أسطوانةٌ قائمةٌ، محيطُ قاعدتِها ٢٠ π سم، وارتفاعها ١٠سم، أجدُ مِساحتَها الجانبيّة.

٢) علبة إسطوانية الشكل ارتفاعُها ١٠سم، وحجمها ٢٥٠ π سم^{٣} ، فما نصفُ قطرِ قاعدةِ هذه العلبة؟



٣) معتمداً على الشكل المجاور، ما ارتفاع الأسطوانة الثانية، بحيث يكون للأسطوانتيْن الحجم نفسه؟

٤) علبةُ صابونٍ على شكل أسطوانةٍ قائمة، حجمها ٣٢٠ π سم^{٣}، فإذا كان نصفُ قطرِها ٨سم، فكم يبلغ ارتفاعُ هذه العلبة؟

مهمة تعليمية:

وعاءان لتخزين الزيت الأول على شكل إسطوانة قطرها ١٤سم وارتفاعها ١٤سم، والثاني على شكل مكعب طول ضلعة ١٤سم، فأي الوعائين يتسع لكمية أكبر من الزيت؟

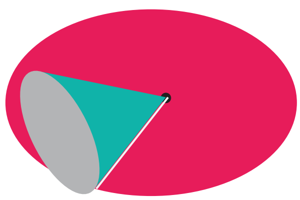
١-٢٨ المخروط

تعريف: المخروط القائم: هو المجسّمُ المتولّدُ من دوران مثلّثٍ قائمِ الزّاوية دورةً كاملةً حول أحدِ ضلعيّ القائمة.

راسم المخروط القائم: قطعةٌ مستقيمةٌ تصلُ رأسَ المخروطِ وأيّةَ نقطةٍ تقعُ على دائرةِ قاعدتِه.

ارتفاع المخروط القائم: العمودِ النّازلِ من رأسِ المخروطِ على قاعدةِ المخروط.

نشاط ١:



الشكل (١)

١) أُحضرُ مخروطاً مُغلَقاً من القاعدة وأرسم مولداً لهذا المخروط.

٢) أرسمُ دائرةً نصفُ قطرِها يساوي طولَ راسمِ المخروط.

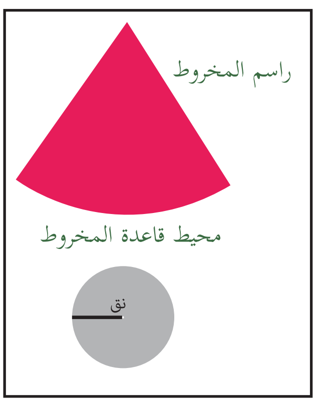
٣) أضعُ المخروطَ على سطح الدائرة، بحيث يكون المولّدُ (الراسم) منطبقاً على نصف قطر الدائرة، ورأس المخروط في مركز الدائرة كما في الشكل (١).

٤) أُدوّرُ المخروطَ إلى أنْ يعودَ المولّدُ ملامساً لسطح الدائرة من جديد.

وألاحظُ أنّ الشكلَ الناتجَ عن دورانِ المخروط دورةً كاملةً هو قطاعٌ دائريّ.

٥) أقصُّ الشّكلَ الناتجَ.

٦) أرسم قاعدة المخروط وأقصّها، فتكون شبكة المخروط كما في الشكل (٢).



الشكل (٢)

أتعلّم: شبكةُ مخروطٍ دائريَ قائم تتكوّنُ من قطاعٍ دائريٍّ نصفُ قطرِ دائرته يساوي راسمَ المخروط، ودائرةٍ نصفُ قطرِها يساوي نصفَ قطرِ قاعدةِ المخروط.

طول راسم المخروط = نصف قُطر القطاع الدائري،

محيط قاعدة المخروط = طول قوس القطاع الدائري.

نشاط٢:

أجدُ المِساحةَ الجانبيّة لمخروطٍ دائريّ قائم، قُطرُ قاعدتِه ٢م، وطول راسمه ٣,٥م.

المساحة الجانبيّة للمخروط = $\frac{١}{٢}$ × نصف قطر دائرة القطاع × طول قوس القطاع

= $\frac{١}{٢}$ × ل × ٢ × نصف قطر الدائرة × π، حيث ل: راسم المخروط. (لماذا؟)

= ل نق π، حيث نق : نصف قطر قاعدة المخروط. (لماذا؟)

= ٣,٥ × ١ × .... = ...م^{٢}

أتعلم: المساحة الجانبية للمخروط = ل نق π، حيث ل: راسم المخروط،
نق: نصف قطر قاعدة المخروط.

نشاط٣:

مخروطٌ دائريّ قائم، نصفُ قطرِ قاعدتِه ٩سم، وارتفاعُه ١٢سم، فما مِساحتُه الجانبيّة؟

ل^{٢} = نق^{٢} + ع^{٢} ومنها ل^{٢} = (٩)^{٢} + (...)^{٢}

أي أنّ: ل^{٢} = ... + ١٤٤، ومنها: ل^{٢} = ٢٢٥ ، ومنها: ل = ١٥سم

المساحة الجانبيّة للمخروط = ل نق π = ١٥ × ٩ × π = ...سم^{٢}

نشاط٤:

أُبيّنُ أنّ المساحةَ الكليّة لمخروطٍ دائريّ قائم، طولُ نصفِ قطرِ قاعدتِه ٧سم، وطولُ راسمِه ٢٠ سم، تساوي ٥٩٤سم^{٢}.

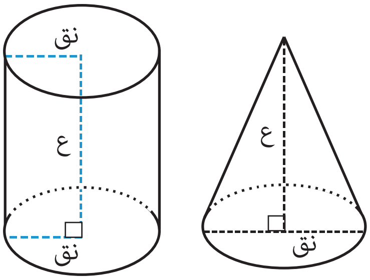
المساحة الجانبيّة للمخروط = ل نق π = ٢٠ × ٧ × ... = ٤٤٠سم^{٢}

مساحة قاعدة المخروط = نق^{٢} π = ٧ × ٧ × $\frac{٢٢}{٧}$ = ...سم^{٢}

المساحة الكليّة = المساحة الجانبيّة + مساحة القاعدة

= ٤٤٠ + ١٥٤ = ...سم^{٢}

نشاط ٥:



أُحضرُ مخروطاً، وأسطوانةً مشتركيْن في القاعدة والارتفاع.

١- أملأُ المخروطَ بالرمل.   ٢- أُفرغُ الرمل في الأسطوانة.

٣- أكرّرُ حتى تمتلئ الأسطوانة.

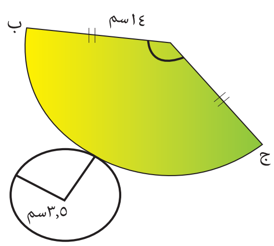
٤- ألاحظ أنّ عددَ المخاريط التي تملأ الأسطوانة = ٣.

أي أنّ: حجم المخروط $=\frac{١}{٣}\times$ حجم الأسطوانة.

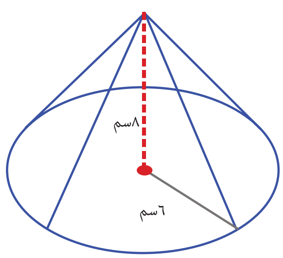
أتعلّم: حجم المخروط $=\frac{١}{٣}\times$ حجم الأسطوانة المشتركة معه في القاعدة والارتفاع.

$=\frac{١}{٣}$ نق^{٢} π ع

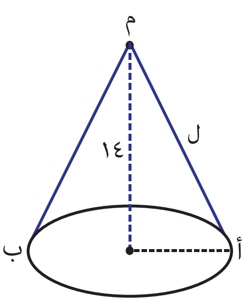
تمارين ومسائل



١) الشكل المجاور يمثّلُ شبكةَ مخروط، أجدُ طولَ $\overset{\frown}{\text{ب ج}}$.



٢) أجدُ حجمَ المخروطِ الموضّح في الشكل المقابل.



٣) مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٤سم ومساحته الجانبية ٦٢,٨سم^{٢}، معتبراً (π = ٣,١٤)، أجد:

١- ارتفاع المخروط.   ٢- طول راسم المخروط.

٤) الشكل المجاور مخروط فيه أ ب قطرُ القاعدة، طولُ القوس $\overset{\frown}{\text{أ جـ ب}}$ يساوي ٧ π سم، ارتفاعُ المخروط يساوي ١٤سم، أجدُ المِساحةَ الكليّة للمخروط.

مهمة تعليمية:

أعلنتْ شركةٌ عن إمكانيّةِ إنشاءِ مشروعِ عملِ صوامعَ لتخزينِ الحبوب، ذات قاعدةٍ مخروطيّةٍ، نصفُ قطرِ قاعدتها ٣م، وارتفاعُها ٤م. أجدُ حجمَ الصومعةِ، علماً بأنّ ارتفاعَ الصومعةِ الكليّ ١٢م .

ورقة عمل (١)

١) أضعُ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ بماذا تحدّد القطعةُ الدائريّةُ؟

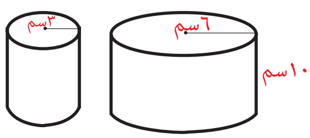
أ) نصفيّ قطريْن وقوسٍ محصور بينهما. ب) وتريْن وقوسٍ محصور بينهما.

جـ) قوسٍ ووترٍ يمر بنهايتيّ القوس. د) نصفي قطرين ووتر في الدائرة.

٢ رُسمَ شكلٌ سداسيٌّ منتظَمٌ في دائرةٍ نصفُ قطرِها ١٤سم، ما قياسُ زاويةِ القطاع الدائري المقابلة لأحد أضلاع الشكل السداسي؟

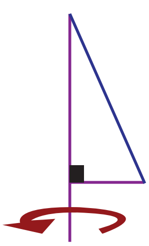
أ) ٤٥° ب) ٦٠° جـ) ٩٠° د) ١٢٠°

٣ قرّرَ مصنعٌ مضاعفةَ نصفِ قطرِ علبةِ البندورة، كما هو موضّحٌ في الشكل المجاور، كم يتضاعف حجم العلبة؟



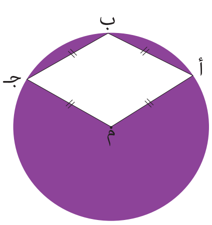
أ) ضعفين. ب) ٣ أضعاف. جـ) ٤ أضعاف. د) ٦ أضعاف.

٤ معتمداً على الرسم التوضيحيّ المجاور، ما ارتفاعُ المخروطِ الناتج عن دوران مثلثٍ قائمِ الزّاوية، طولُ وترِه ١٠سم، وطول قاعدته ٦سم؟



أ) ٦ سم ب) ٨ سم جـ) ١٠ سم د) ١٦ سم

٢) أجدُ مِساحةَ المنطقةِ المظلّلةِ في الشكل المجاور، علماً بأنّ مِساحةَ الدائرة ٦٤ π سم^2، م مركز الدائرة.



٣) أسطوانةٌ دائريّةٌ قائمةٌ مملوءةٌ بالماء، قطرُ قاعدتِها ٢٠سم، وارتفاعُها ١٠سم، فُرّغَ ما فيها من ماءٍ في إناءٍ فارغٍ على شكلِ مخروطٍ دائريٍّ قائم، نصفُ قطرِ قاعدتِه ٣٠سم، فكم يكونُ ارتفاعُ الماءِ فيه؟

اختبار ذاتي

س١: أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة للفقرات (١-١٠):

١) ما قيمة (ع) التي تجعل للمعادلة (س٢ – ٨س + ع) جذراً وحيداً؟

أ) -١٦ ب) ١٦ جـ) ٢ د) -٢

٢)ما قيمة زاوية القطعة الدائرية في قطاع دائري طول قوسه (٥,٦ π) سم ونصف قطره (٧) سم؟

أ) ١٤٤° ب) ١٦٩° جـ) ١٧٥° د)١٥٥°

٣) ما الصيغة التي يمكن استخدامها لحساب حجم الأسطوانة التي نصف قطرها (نق)،وارتفاعها (ع)؟

أ) $\frac{٣}{٤}$ نق٣ π ع ب) نق π ع جـ) $\frac{١}{٤}$ نق٢ π ع د) نق٢ π ع

٤) أي من المعادلات الآتية تربيعية؟

أ) س٢ – ٤س + ١ = ٠ ب) $\sqrt{س}$ – ١ = ٠

جـ) س – ٣ = ٢س د) س($\sqrt{س}$ – ٢) = ٠

٥) ما مجموعة حل المعادلة التربيعية ٢س٢ – س – ٣ = ٠؟

أ) $\frac{-٢}{٣}$ ، ١ ب) $\frac{-٣}{٢}$ ، ١ ج) $\frac{٢}{٣}$ ، -١ د) $\frac{٣}{٢}$ ، -١

س٢: أجد جذور المعادلة التربيعية الآتية : ٢س٢ + ٥س + ١ = ٠ (باستخدام طريقة إكمال المربع).

س٣: خزان وقود مخروطي الشكل مصنوع من الفولاذ، نصف قطر قاعدته ٣م، وارتفاعه ٤م، أجد تكلفة طلائه من الداخل والخارج، إذا كان سعر علبة الدهان ٦ دنانير، وتكفي لطلاء ١٠م٢.

س٤: اجد حل المعادلتين س + ٣ص = ٣، ٢س + ص = -٤ بالتعويض.